2005,**25A**(2):176－181

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

Banach 空间中强增生型变分包含解的具混合误差项的 Ishikawa 迭代逼近*

谷峰

(杭州师范学院数学系　杭州 310012)

摘要:该文研究了 Banach 空间中一类强增生型变分包含解的存在性及其具有混合误差项的 Ishikawa 迭代程序的收敛性问题. 所得结果改进和推广了张石生,曾六川等人的相关应结果.

关键词:变分包含;强增生映象;具混合误差项的 Ishikawa 迭代程序。

MR(2000)主题分类:49J30;47H06;47H17　　**中图分类号**:O177.91　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)02-176-06

1　引言

设 X 是实 Banach 空间,X^* 是其对偶空间,$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$表 X 与 X^* 间的广义对偶对,$D(T)$与 $R(T)$分别表映象 T 的定义域与值域.

设 $T,A:X\to X$,$g:X\to X^*$ 是三个映象,$\varphi:X^*\to R\cup\{+\infty\}$为真凸的下半连续泛函. 1999 年,张石生教授[1]引入与研究了下列 Banach 空间中的变分包含问题 $VIP(T,A,g,\varphi)$:对给定的 $f\in X$,求 $u\in X$,使得

$$\begin{cases} g(u)\in D(\partial\varphi), \\ \langle Tu-Au-f,v-g(u)\rangle\geqslant\varphi(g(u))-\varphi(v), \quad \forall v\in X^*, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$\partial\varphi$表 φ 的次微分.

注意到,当 $X=H$ 是 Hilbert 空间时,则(1.1)式等价于如下问题:对给定的 $f\in H$,求 $u\in H$,使得

$$\begin{cases} g(u)\in D(\partial\varphi), \\ \langle Tu-Au-f,v-g(u)\rangle\geqslant\varphi(g(u))-\varphi(v), \quad \forall v\in H, \end{cases} \tag{1.2}$$

称(1.2)式为 Hilbert 空间中的变分包含问题,它曾在 Hassouni-Moudafi[2], Ding[3,4], Chang[5], Kazmi[6], Zeng[7]中研究过. 易见,通过适当地选择算子 T,A,g 及点 f 与泛函 φ,若干熟知的变分不等式类问题,如在 Noor[8,9], Siddiqi-Ansari[10,11]及 Zeng[12]中研究过的变分不等式类,都可得到.

最近,曾六川教授[13]在 Banach 空间的框架下,给出了强增生型的变分包含问题(1.1)

收稿日期:2003-01-30;修订日期:2003-11-03

E-mail:gufeng99@sohu.com

* 基金项目:黑龙江省自然科学基金(A0211)、黑龙江省普通高校骨干教师创新能力资助计划(1053G015)、黑龙江省教育厅科研项目(10511132)、杭州师范学院引进人才科研启动基金资助

的解的存在唯一性及其具误差的 Ishikawa 迭代程序的收敛性定理. 他的结果改进和推广了张石生[1]的相应结果.

本文继续研究 Banach 空间中变分包含问题(1.1)的解的存在性唯一性及其具混合误差项的 Ishikawa 迭代程序的收敛性. 本文结果是张石生[1]和曾六川[13]的相应结果的改进和推广.

映象 $J: X\to 2^{X^*}$ 称为正规对偶映象,如果

$$J(x)=\{f\in X^*: \langle x, f\rangle=\|x\|\,\|f\|, \|f\|=\|x\|\},\quad x\in X.$$

定义 1.1　映象 $T: D(T)\subset X\to X$ 称为强增生的,如果存在常数 $k\in(0,1)$ 使得 $\forall x, y\in D(T)$,存在 $j(x-y)\in J(x-y)$,满足

$$\langle Tx-Ty, j(x-y)\rangle\geqslant k\|x-y\|^2,$$

其中的 k 称为 T 的强增生常数.

引理 1.1[14]　设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 是三个非负实数列,且满足下面的不等式

$$a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+b_n+c_n,\quad \forall n\geqslant 0,$$

其中 $\{t_n\}\subset[0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$, $b_n=o(t_n)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$,则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

引理 1.2[1]　设 X 是实自反 Banach 空间, $\partial\varphi\circ g$ 是 $X\to 2^X$ 的映象,则下面的结论等价

(i) $x^*\in X$ 是变分包含问题(1.1)的解;

(ii) $x^*\in X$ 是映象 $S: X\to 2^X$ 的不动点,其中

$$S(x)=f-(Tx-Ax+\partial\varphi(g(x)))+x;$$

(iii) $x^*\in X$ 是方程 $f\in Tx-Ax+\partial\varphi(g(x))$ 的解.

2　主要结果

定理 2.1　设 X 是实自反 Banach 空间,设 $T, A: X\to X$, $g: X\to X^*$ 是三个映象,而 $\varphi: X^*\to R\cup\{+\infty\}$ 是具有 Gâteaux 微分 $\partial\varphi$ 的泛函,且满足以下条件

(i) $T-A+\partial\varphi\circ g: X\to X$ 是 Lipschitz 的和强增生的,其强增生常数为 $k\in(0,1)$;

设 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的实数列, $\{u_n\}, \{v_n\}, \{u'_n\}$ 和 $\{u''_n\}$ 都是 X 中的序列,满足条件

(ii) $L_*(1+L_*)\beta_n+L_*^2(1+L_*)\alpha_n\leqslant k-r$, $\forall n\geqslant 0, r\in(0,k)$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

(iv) $u_n=u'_n+u''_n$, $\|u'_n\|=o(\alpha_n)$, $\sum_{n=0}^{\infty}\|u''_n\|<\infty$ 且 $\|v_n\|\to 0\quad(n\to\infty)$.

其中 $L_*=1+L$, L 是映象 $T-A+\partial\varphi\circ g$ 的 Lipschitz 常数. 对任给的 $f\in X$,定义映象 $S: X\to X$ 如下

$$Sx=f-(Tx-Ax+\partial\varphi(g(x)))+x.$$

对任给的 $x_0\in X$,具有混合误差项的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 定义如下

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nSy_n+u_n,\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nSx_n+v_n, n\geqslant 0.\end{cases}\tag{2.1}$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于变分包含问题(1.1)的唯一解.

证　由条件(i)易知,映象 $T-A+\partial\varphi\circ g: X\to X$ 是连续的和强增生的,故由 Deimling[16] 知,对任给的 $f\in X$,方程 $f=(T-A+\partial\varphi\circ g)(x)$ 有唯一解 x^*. 再由引理 1.2 知, x^*

是变分包含问题(1.1)的唯一解,因而也是 S 在 X 中的唯一不动点,即 $Sx^*=x^*$.

下面证明具混合误差项的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于变分包含问题(1.1)的唯一解 x^*.

由条件(i)和 S 的定义知,$\forall\, x,y\in X$,存在 $j(x-y)\in J(x-y)$,使得

$$\begin{aligned}\langle Sx-Sy,\ j(x-y)\rangle &=\langle f-(T-A+\partial\varphi\circ g)x+x\\ &\quad-(f-(T-A+\partial\varphi\circ g)y+y),\ j(x-y)\rangle\\ &=\|x-y\|^2-\langle(T-A+\partial\varphi\circ g)x\\ &\quad-(T-A+\partial\varphi\circ g)y,\ j(x-y)\rangle\\ &\leqslant(1-k)\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

从而可得

$$\langle(I-S)x-(I-S)y,\ j(x-y)\rangle\geqslant k\|x-y\|^2,$$

这意味着 $\langle(I-S-kI)x-(I-S-kI)y,\ j(x-y)\rangle\geqslant0$,从而由 Kato[17] 的引理 1.1 可知,对任意的 $x,y\in X$ 和 $t>0$,有

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y+t[(I-S-kI)x-(I-S-kI)y]\|. \tag{2.2}$$

由(2.1)式得

$$\begin{aligned}(1-\alpha_n)x_n&=x_{n+1}-\alpha_nSy_n-u_n\\ &=[1-(1-k)\alpha_n]x_{n+1}+\alpha_n(I-S-kI)x_{n+1}+\alpha_nSx_{n+1}-\alpha_nSy_n-u_n.\end{aligned} \tag{2.3}$$

注意到

$$(1-\alpha_n)x^*=[1-(1-k)\alpha_n]x^*+\alpha_n(I-S-kI)x^*, \tag{2.4}$$

从(2.2)—(2.4)式我们可得

$$\begin{aligned}(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|&\geqslant[1-(1-k)\alpha_n]\|x_{n+1}-x^*\\ &\quad+\frac{\alpha_n}{1-(1-k)\alpha_n}[(I-S-kI)x_{n+1}-(I-S-kI)x^*]\|\\ &\quad-\alpha_n\|Sx_{n+1}-Sy_n\|-\|u_n\|\\ &\geqslant[1-(1-k)\alpha_n]\|x_{n+1}-x^*\|-\alpha_n\|Sx_{n+1}-Sy_n\|-\|u_n\|,\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|&\leqslant\frac{1-\alpha_n}{1-(1-k)\alpha_n}\|x_n-x^*\|\\ &\quad+\frac{\alpha_n}{1-(1-k)\alpha_n}\|Sx_{n+1}-Sy_n\|+\frac{\|u_n\|}{1-(1-k)\alpha_n}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

由于 $T-A+\partial\varphi\circ g$ 是具有常数 L 的 Lipschitz 映象,所以由 S 的定义易知,S 是具有常数 $L_*=1+L$ 的 Lipschitz 映象. 从而由(2.1)式可得

$$\begin{aligned}\|y_n-x^*\|&\leqslant(1-\beta_n)\|x_n-x^*\|+\beta_n\|Sx_n-x^*\|+\|v_n\|\\ &\leqslant(1-\beta_n)\|x_n-x^*\|+\beta_nL_*\|x_n-x^*\|+\|v_n\|\\ &\leqslant L_*\|x_n-x^*\|+\|v_n\|,\end{aligned} \tag{2.6}$$

于是,再由(2.1)式及(2.6)式,并注意到条件(i),有

$$\begin{aligned}\|Sx_{n+1}-Sy_n\|&\leqslant L_*\|x_{n+1}-y_n\|\\ &\leqslant L_*[(1-\alpha_n)\|x_n-y_n\|+\alpha_n\|Sy_n-y_n\|+\|u_n\|]\\ &\leqslant L_*[(1-\alpha_n)\beta_n\|x_n-Sx_n\|+(1-\alpha_n)\|v_n\|\\ &\quad+\alpha_n(1+L_*)\|y_n-x^*\|+\|u_n\|]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant[L_*(1+L_*)\beta_n+L_*^2(1+L_*)\alpha_n]\|x_n-x^*\|\\&\quad+L_*(1+L_*)\|v_n\|+L_*\|u_n\|\\&\leqslant(k-r)\|x_n-x^*\|+L_*(1+L_*)\|v_n\|+L_*\|u_n\|.\end{aligned}\tag{2.7}$$

将(2.7)式代入(2.5)式，并注意到条件(iv)及 $1-(1-k)\alpha_n\geqslant k$，我们有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|&\leqslant\frac{1-\alpha_n+(k-r)\alpha_n}{1-(1-k)\alpha_n}\|x_n-x^*\|\\&\quad+\frac{L_*(1+L_*)\alpha_n}{1-(1-k)\alpha_n}\|v_n\|+\frac{1+L_*}{1-(1-k)\alpha_n}\|u_n\|\\&\leqslant\left(1-\frac{r\alpha_n}{1-(1-k)\alpha_n}\right)\|x_n-x^*\|\\&\quad+\frac{1}{k}L_*(1+L_*)\alpha_n\|v_n\|+\frac{1}{k}(1+L_*)\|u_n\|\\&\leqslant(1-r\alpha_n)\|x_n-x^*\|+\frac{1}{k}L_*(1+L_*)\alpha_n\|v_n\|\\&\quad+\frac{1}{k}(1+L_*)\|u'_n\|+\frac{1}{k}(1+L_*)\|u''_n\|.\end{aligned}$$

令 $a_n=\|x_n-x^*\|$，$b_n=\frac{1}{k}L_*(1+L_*)\alpha_n\|v_n\|+\frac{1}{k}(1+L_*)\|u'_n\|$，$c_n=\frac{1}{k}(1+L_*)\cdot\|u''_n\|$，$t_n=r\alpha_n$，则上式变为

$$a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+b_n+c_n,\quad\forall n\geqslant0.$$

由条件(iii)，(iv)易知，$\{t_n\}\subset[0,1]$，$\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$，$b_n=o(\alpha_n)$，$\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$，于是，引理 1.1 的条件被满足，故有 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，亦即 $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$. 至此定理 2.1 证毕。 ▌

注 2.1　定理 2.1 在下列几个方面改进与推广了文[1]中的定理 2.1：其一，把文[1]的定理 3.1 中一致光滑 Banach 空间推广到实自反 Banach 空间的情形；其二，去掉了文[1]的定理 3.1 中值域 $R(S)$ 的有界性；其三，去掉了文[1]的定理 3.1 中 $\alpha_n\to0,\beta_n\to0(n\to\infty)$ 的条件限制；其四，把文[1]的定理 3.1 的迭代格式推广到更一般的具混合误差项的 Ishikawa 迭代格式.

注 2.2　定理 2.1 从以下几个方面改进和推广了文[13]的定理 2.1：其一，取消了条件 $\alpha_n\to0,\beta_n\to0(n\to\infty)$ 的限制；其二，把具误差的 Ishikawa 迭代过程推广到更一般的具混合误差项的 Ishikawa 迭代过程；其三，去掉了条件 $\{Sy_n\}$ 有界和 $\{\beta_nSx_n\}$ 强收敛到零向量的限制.

在定理 2.1 中，如果 $\forall n\geqslant0$，$\beta_n=0$ 且 $v_n=0$ 则 $y_n=x_n$，$\forall n\geqslant0$，$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nSx_n+u_n$，$n\geqslant0$. 于是，我们得到如下的结果

定理 2.2　设 $X,T,A,S,\varphi,g,f,\{\alpha_n\},\{u_n\},\{u'_n\}$ 和 $\{u''_n\}$ 满足定理 2.1 中的条件，且有

(i) $T-A+\partial\varphi\circ g:X\to X$ 是强增生的和 Lipschitz 的，其强增生常数为 $k\in(0,1)$；

(ii) $\alpha_n\leqslant\frac{k-r}{L_*^2(1+L_*)}$，$\forall n\geqslant0$，$r\in(0,k)$；

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；

(iv) $u_n=u'_n+u''_n$，$\|u'_n\|=o(\alpha_n)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\|u''_n\|<\infty$.

对任给的 $x_0\in X$，具有混合误差项的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ 定义如下

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Sx_n+u_n,\ n\geqslant 0,$$

则$\{x_n\}$强收敛于变分包含问题(1.1)的唯一解.

在定理 2.1 中取 $\varphi\equiv 0$，则有如下结果

定理 2.3 设 X 是实 Banach 空间，设 $T,A:X\to X,g:X\to X^*$ 是三个映象，$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的实数列，$\{u_n\},\{v_n\},\{u'_n\}$和$\{u''_n\}$都是 X 中的序列，且满足下列条件

(i) $T-A:X\to X$ 是 Lipschitz 的和强增生的，其强增生常数为 $k\in(0,1)$；

(ii) $L_*(1+L_*)\beta_n+L_*^2(1+L_*)\alpha_n\leqslant k-r,\ \forall n\geqslant 0,r\in(0,k)$；

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；

(iv) $u_n=u'_n+u''_n,\ \|u'_n\|=o(\alpha_n),\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|u''_n\|<\infty$ 且 $\|v_n\|\to 0(n\to\infty)$.

其中 $L_*=1+L$，L 是映象 $T-A$ 的 Lipschitz 常数. 对任给的 $f\in X$，定义映象 $S:X\to X$ 如下

$$Sx=f-(Tx-Ax)+x.$$

对任给的 $x_0\in X$，具有混合误差项的 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$定义为

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Sy_n+u_n,\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Sx_n+v_n,n\geqslant 0.\end{cases}$$

则$\{x_n\}$强收敛到变分不等式

$$\langle Tx-Ax-f,\ v-g(x)\rangle\geqslant 0,\quad \forall x\in X^*$$

的唯一解.

注 2.3 本文定理 2.1—2.3 也改进和推广了文献[2—12,15]中的相关结果.

注 2.4 定理 2.1 中$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$的典型取值是

$$\alpha_n=\frac{k^2-r}{L_*(1+L_*)},\quad \beta_n=\frac{k(1-k)}{L_*^2(1+L_*)},\quad n\geqslant 0,\ r\in(0,k^2)$$

或

$$\alpha_n=\frac{k-r}{2L_*(1+L_*)},\quad \beta_n=\frac{k-r}{2L_*^2(1+L_*)},\quad n\geqslant 0,\ r\in(0,k^2).$$

参 考 文 献

[1] Chang S S. On the Mann and Ishikawa iterative approximation of solutions to variational inclusion with accretive type mappings. Compue Math Appl, 1999, **37**(9): 17—24

[2] Hassouni A, Moudafi A. A perturbed algorithm for variational inclusions. J Math Anal Appl, 1994, **185**(3): 706—721

[3] Ding X P. Perturbed proximal point algorithms for generalized quasivariational inclusions. J Math Anal Appl, 1997, **210**(1): 88—101

[4] Ding X P. Generalized strongly nonlinear quasivariational inequalities. J Math Anal Appl, 1993, **173**(2): 557—587

[5] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用. 上海：上海科技文献出版社，1991

[6] Kazmi K R. Mann and Ishikawa type pertured iterative algorithms for generalized quasivariational inclusions. J Math Anal Appl, 1997, **209**(2): 572—584

[7] Zeng L C. Iterative algorithms for finding approximate solutions for general strongly nonlinear variational inequalities. J Math Anal Appl, 1994, **187**(2): 352—360

[8] Noor M A. General variational inequalities. Appl Math Lett, 1998, **1**(2): 119—122

[9] Noor M A. An iterative algorithm for variational inequalities. J Math Anal Appl, 1991, **158**(3): 446—455

［10］ Siddiqi A H，Ansari Q H. General strongly nonlinear variational inequalities. J Math Anal Appl，1992，**166**(2)：386－392
［11］ Siddiqi A H，Ansari Q H，Kazmi K R. On nonlinear variational inequalities. Indian J Pure Appl Math，1994，**25**(4)：969－973
［12］ Zeng L C. Iterative algorithm for finding approximate solutions to completely generalized strongly nonlinear quasi-variational inequality. J Math Anal Appl，1996，**201**：180－191
［13］ 曾六川. Banach 空间中强增生型变分包含解的具误差的 Ishikawa 迭代逼近. 数学物理学报，2002，**22**A(1)：99－106
［14］ Liu L S. Isikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces. J Math Anal Appl，1995，**194**：114－125
［15］ 张石生. Banach 空间中增生映象的变分包含解的存在性和逼近问题. 应用数学和力学，2001，**22**(9)：898－904
［16］ Deimling K. Zeros of accretive operators. Manuscripa Math，1974，**13**：365－374
［17］ Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations. J Math Soc Japan，1967，**19**：508－520

On the Ishikawa Iterative Approximation with Mixed Errors for Solutions to Variational Inclusions with Strongly Accretive Type Mappings in Banach Spaces

Gu Feng
(*Department of Mathematics*，*Hangzhou Teacher's College*，*Hangzhou* 310012)

Abstract：The purpose of this paper is to investigate the existence of solutions and convergence of Ishikawa iterative process with mixed errors for a class of variational inclusions with strongly accretive type mappings in real reflexive Banach spaces. The results presented in this paper extend and improve the corresponding results of Chang and Zeng.

Key words：Variational inclusion；Strongly accretive mapping；Ishikawa iterative process with mixed errors.
MR(2000) Subject Classification：49J30；47H06；47H17