一种带不等式约束的 Bottleneck 问题的 Primal 和 Threshold 算法*

张 宝 康
（上海计算技术研究所）

THE PRIMAL AND THRESHOLD ALGORITHMS FOR A BOTTLENECK PROBLEM WITH AN INEQUALITY

Zhang Bao-kang
(*Shanghai Institute of Computer Technology*)

Abstract

We discuss a bottleneck problem with an inequality: $\max\limits_{x\in T}\min\limits_{i} c_i x_i$ $T=\left\{x \;\middle|\; \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b,\ x_i \geqslant 0,\ \text{integer}\right\}$. A necessary and sufficient condition for the optimal solution to the problem is given. A primal algorithm based on the necessary and sufficient condition and a threshold algorithm are presented. At last, a numerical example is listed.

§1. 引　言

在 [1] 中我们研究了一种带等式约束的整数 Bottleneck 问题.现在考虑不等式情形，$T=\left\{x \;\middle|\; \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b,\ x_i \geqslant 0,\ x_i \text{ 整数}\right\}$在这情形下，最优解完全可能在 T 内点达到，因此情形就不那么简单了.

我们定义不等式约束的整数 Bottleneck 问题为

$$\begin{cases} \max \min\limits_{i} c_i x_i, \\ S.T.\ \sum\limits_{1}^{n} a_i x_i \leqslant b, \\ x_i \geqslant 0,\ \text{整数}, \end{cases} \tag{1.1}$$

* 1987 年 4 月 24 日收到.

其中仍假设 $c_i>0$，$a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$b>0$. 再设 $b\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i$，否则目标函数值只能为零. 同时令 $T\neq\Phi$，这样(1.1)一定有解，且目标函数值非零.

对(1.1)，也可按[2]去处理，把它化为 0—1 规划问题，从而有相应的 Primal 和 Threshold 算法. 但这样做法，将使问题的变量数剧增.

本文将根据[1]的结果，直接对(1.1)建立相应的 Primal 和 Threshold 算法.

§2. 充要条件

设 $x\in T$，则 x 是(1.1)解的充要条件是

$$\begin{cases}\sum_{i\in I}a_is_i+\sum_{i\in J_1}a_ih_i-\sum_{i\in J_2}a_il_i\leqslant P,\\ s_i\geqslant 1,\ h_i\geqslant 0,\\ c_i(x_i-l_i)>f(x),\ i\in J_2,\\ s_i,\ h_i,\ l_i\ \text{为整数}.\end{cases}\tag{2.1}$$

不相容，其中

$$\begin{cases}P=b-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\geqslant 0\ (\text{称为剩余量}),\\ f(x)=\min_i c_ix_i,\\ I=\{i|c_ix_i=f(x)(i=1,2,\cdots n)\},\\ J_1=\{i|c_ix_i>f(x)\geqslant c_i(x_i-1),\ (i=1,2,\cdots n)\},\\ J_2=\{i|f(x)<c_i(x_i-1)(i=1,2,\cdots,n)\}.\end{cases}\tag{2.2}$$

证. 充分性. 设 x 不是最优解，$\bar{x}$ 为最优解，则 $\bar{x}$ 一定可表示为

$$\bar{x}_i=\begin{cases}x_i+s_i,\ s_i\geqslant 1,\ i\in I,\\ x_i+h_i,\ h_i\geqslant 0,\ i\in J_1,\\ x_i-l_i,\ c_i(x_i-l_i)>f(x),\ i\in J_2,\\ s_i,\ h_i\ l_i\ \text{为整数}.\end{cases}\tag{2.3}$$

因为 $\bar{x}\in T$，故有 $\sum_{1}^{n}a_i\bar{x}_i\leqslant b$，则必得(2.1)的一个解 s_i, h_i, l_i，这样 x 必定是(1.1)的一个最优解.

必要性. 设 x 为(1.1)的最优解，若(2.1)有解 s_i, h_i, l_i，令

$$\bar{x}_i=\begin{cases}x_i+s_i,\ i\in I,\\ x_i+h_i,\ x\in J_1,\\ x_i-l_i,\ x\in J_2,\end{cases}$$

则 $\bar{x}\in T$，且有 $f(\bar{x})>f(x)$，因而(2.1)必不相容.

§3. Primal 算法

从§2的充要条件出发构造如下算法：

1°任给出一初始可行解 $x^0 \in T$（如令 $x^{(0)} = (1, 1, \cdots 1)$），$k = 0$。

2°计算

$$p_k = b - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(k)},\ f(x^{(k)}) = \min_i c_i x_i^{(k)},$$

$$I^{(k)} = \{i \mid c_i x_i^{(k)} = f(x^{(k)})\ (i = 1, 2, \cdots, n)\},$$

$$J_1^{(k)} = \{i \mid c_i x_i^{(k)} > f(x^{(k)}) \geqslant c_i(x_i^{(k)} - 1)\},$$

$$J_2^{(k)} = \{i \mid f(x^{(k)}) < c_i(x_i^{(k)} - 1)\}.$$

3° 若 $\exists t \in I^{(k)}$ 有 $p_k \geqslant a_t$，则令 $a_t = \max\limits_{i \in \tilde{T}} a_i$，$\tilde{T} = \{i \mid p_k \geqslant a_i\}$

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_i^{(k)} + 1, & i = t, \\ x_i^{(k)}, & \text{其他}. \end{cases}$$

再转 2°；否则若 $J_2^{(k)} = \phi$，此时 $x^{(k)}$ 已是最优解，迭代终止．否则，转 4°。

4° 令　$a_{t1} = \min\limits_{i \in I^{(k)}} a_i$，$a_{t2} = \max\limits_{i \in J_2^{(k)}} a_i$

注：若满足条件有多个下标的话，则取最小下标，以下遇到类似情况则作同样处理。

若 $a_{t1} - a_{t2} \leqslant p$，则令

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_i^{(k)} + 1, & i \in t_1, \\ x_i^{(k)} - 1, & i \in t_2, \\ x_i^{(k)}, & \text{其他}. \end{cases}$$

再转 2°：否则 $x^{(k)}$ 即为最优解，迭代终止．

收敛性证明．　记 $J = \{1, 2, \cdots, n\}$，用 $|J| = n$ 表示下标集的模．我们只需说明：1）$x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots x^{(k)}, \cdots$，始终是在可行域内；2）或者有 $f_{k+1} > f_k$；或者有 $f_{k+1} = f_k$，$|I^{(k+1)}| < |I^{(k)}|$，从而保证迭代不会周而复始地进行；3）当迭代收敛时，已得到最优解．

关于 1），从 3° 及 4° 可知这是显然成立的．

关于 2），从 3° 及 4° 可看出，在构造 $x^{(k+1)}$ 时，有

$$|I^{(k+1)}| = |I^{(k)}| - 1.$$

若 $|I^{(k)}| = 1$，则 $f_{k+1} > f_k$，否则 $f_{k+1} = f_k$，$|I^{(k+1)}| < |I^{(k)}|$。

关于 3），在下述二种情形时迭代终止：

(i) $a_i > p_k$，$i \in I^{(k)}$ 且 $J_2^{(k)} = \phi$，

(ii) $a_i > p_k$，$i \in I^{(k)}$ 且任 $a_t - a_s > p_k$，其中 $t \in I^{(k)}$，$s \in J_2^{(k)}$．显然这二种情形发生时，对应的(2.1)必不相容，因此 $x^{(k)}$ 必为最优解．

§4. Threshold 算法

上节的算法 $x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots x^{(k)}, \cdots$ 都是在可行域内，而目标函数值单调上升(非严格单调,但又保证不会循环迭代). 本节提出另一种算法——Threshold 算法. 基本思想是先给出最大目标函数值的一个上界估计 f_0. 设最优解为 x^*, 对应的目标函数值为 f^*, 构造一个迭代序列: $f_0, f_1, f_2, \cdots f_k, \cdots$, 满足性质 (i) 若 $f_k \geqslant f^*$, 则 $f_{k+1} \geqslant f^*$(ii) $|x^{(k+1)}| < |x^{(k)}|$ $\left(定义\ |x| = \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$, 因此一定 $\exists x^{(t)}$, 满足 $f_t \geqslant f^*$, $x^{(t)} \in T$, 从而得到最优解.

算法的计算步骤如下:

(1°) 构造初始点 $x^{(0)}$, 其中

$$x_i^{(0)} = \left[\frac{b - \sum_{j \neq i} a_j}{a_i}\right] (i = 1, 2, \cdots, n), \quad 令\ k = 0.$$

(2°) 计算

$$f_k = \min_i c_i x_i^{(k)},$$
$$I^{(k)} = \{i \mid c_i x_i^{(k)} = f_k\},$$
$$J_1^{(k)} = \{i \mid c_i(x_i^{(k)} - 1) \leqslant f_k < c_i x_i^{(k)}\},$$
$$J_2^{(k)} = \{i \mid c_i(x_i^{(k)} - 1) > f_k\}.$$

(3°)

(3° − 1) $J_2^{(k)} \neq \phi$ 令 $c_{i_0}(x_{i_0}^{(k)} - 1) = \max\limits_{i \in J_2^{(k)}} c_i(x_i^{(k)} - 1)$, 转(4°);

(3° − 2) $J_2^{(k)} = \phi$, $J_1^{(k)} \neq \phi$

(3° − 2.1) $\tilde{I}^{(k)} = \{i \mid f_k = c_i(x_i^{(k)} - 1)\} \neq \phi$, $i \in J_1^{(k)}$, 则任取 $i_0 \in \tilde{I}^{(k)}$, 转 (4°);

(3° − 2.2) $\tilde{I}^{(k)} = \phi$ $f_k > c_i(x_i^{(k)} - 1)$ $i \in J_1^{(k)}$

(3° − 2.2.1) $f_k > f^*$, 令 $c_{i_0}(x_{i_0}^{(k)} - 1) = \max\limits_{i \in J_1^{(k)}} c_i(x_i^{(k)} - 1)$, 转(4°);

(3° − 2.2.2) $f_k = f^*$, 此时, $x^{(k)}$ 已是最优解,迭代停止.

(3° − 3) $J_1^{(k)} = J_2^{(k)} = \phi$,

(3° − 3.1) $f_k > f^*$, $c_{i_0}(x_{i_0}^{(k)} - 1) = \max\limits_i c_{i_0}(x_{i_0}^{(k)} - 1)$, 转(4°);

(3° − 3.2) $f_k = f^*$, $x^{(k)}$ 已是最优解,迭代终止.

(4°) 构造 $x^{(k+1)}$, 其中

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_i^{(k)}, & i \neq i_0, \\ x_i^{(k)} - 1, & i = i_0, \end{cases}$$

$k + 1 \Rightarrow k$, 转 (2°).

收敛性证明. 为了保证算法是收敛的,我们只需证明: 1) $|x^{(k+1)}| < |x^{(k)}|$ 2) 若 $f_k \geqslant f^*$, 则必有 $f_{k+1} \geqslant f^*$ 3) 迭代终止时已得到最优解.

关于 1)，从(4°)中可知这是显然成立.

关于 2)，从算法描述中可知只有在下述二种情况下计算 $x^{(k+1)}$:

(i) 当 $c_{i_0}(x_{i_0}^{(k)}-1)\geqslant f_k\geqslant f^*$，因

$$f_{k+1}=\min\{c_{i_0}(x_{i_0}^{(k)}-1),\ \min_{i\neq i_0}c_ix_i^{(k)}\}$$

因此必有 $f_{k+1}\geqslant f_k\geqslant f^*$;

(ii) 当 $f_k>f^*$ 时，若 $c_{i_0}(x_{i_0}^{(k)}-1)\geqslant f^*$ 则仍有 $f_{k+1}\geqslant f^*$. 假设 $c_{i_0}(x_{i_0}^{(k)}-1)<f^*$，则必有 $c_i(x_i^{(k)}-1)<f^*$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 现设 $\min_i c_ix_i^*=c_{i_1}x_{i_1}^*$,

$$\min_i c_ix_i^{(k)}=c_{i_2}x_{i_2}^{(k)},$$

则

$$c_{i_1}(x_{i_1}^{(k)}-1)<c_{i_1}x_{i_1}^*.$$

因 x^*, $x^{(k)}$ 为整数，故定有

$$f_k=c_{i_2}x_{i_2}^{(k)}\leqslant c_{i_1}x_{i_1}^{(k)}\leqslant c_{i_1}x_{i_1}^*=f^*.$$

这与假设矛盾，因此 2) 必成立.

关于 3)，可知当 $f_k=f^*$ 时，$J_2^{(k)}=\phi$.

(i) $c_jx_j^*\geqslant f^*=f_k>c_i(x_i^{(k)}-1)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ $(j=1,2,\cdots,n)$，特别当 $j=i$ 时有

$$c_jx_j^*>c_j(x_j^{(k)}-1)\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

则

$$c_jx_j^*\geqslant c_jx_j^{(k)}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

可知 $x^{(k)}$ 已是可行点，$f_k=f^*$，最优解已得到.

(ii) $c_jx_i^{(k)}=f_k$ $(i=1,2,\cdots n)$，显然有

$$c_ix_i^*\geqslant f^*=f_k\geqslant c_jx_j^{(k)}\quad(i=1,2,\cdots n)\ (j=1,2,\cdots n).$$

同理可知 $x^{(k)}$ 已是最优解.

§5. 数 值 例 子

$$\begin{cases}\max\ \min\{2x_1\ x_2,\ 5x_3,\ 4x_4\},\\ \text{S.T. } 4x_1+3x_2+5x_3+2x_4\leqslant 32,\\ \qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\ \text{整数}.\end{cases}$$

用 Primal 算法求解.

$k=$	0	1	2	3	4	5
$x^{(k)}$	(1, 1, 1, 1)	(1, 2, 1, 1)	(2, 2, 1, 1)	(2, 3, 1, 1)	(2, 4, 1, 1)	(3, 4, 1, 1)
P_k	18	15	11	8	5	1
$J^{(k)}$	{2}	{1, 2}	{2}	{2}	{1, 2, 4}	{2, 4}
$J_1^{(k)}$	{1, 3, 4}	{3, 4}	{1, 3, 4}	{3, 4}	{3}	{1, 3}
$J_2^{(k)}$	ϕ	ϕ	ϕ	{1}	ϕ	ϕ
f_k	1	2	2	3	4	4

用 Threshold 算法求解.

$k=$	0	1	2	3	4	5	
$\lambda^{(k)}$	(5,7,2,10)	(4,7,2,10)	(4,7,2,9)	(4,7,2,8)	(4,7,2,7)	…	…
$I^{(k)}$	{2}	{2}	{2}	{2}	…	…	…
J_1^k	{3}	{1,3}	{1,3}	{1,3}	…	…	…
$J_2^{(k)}$	{1,4}	{4}	{4}	{4}	…	…	…
f_k	7	7	7	7	…	…	…
$k=$	9	10	11	12	· · ·	…	15
$x^{(k)}$	(4,7,2,2)	(4,7,2,1)	(4,7,1,1)	(3,7,1,1)	(3,6,1,1)	…	(3,4,1,1)
$I^{(k)}$	{2}	{2}	{4}	{4}	…	…	{2,4}
$J_1^{(k)}$	{1,3}	ϕ	{3}	{1,3}	…	…	{1,3}
$J_2^{(k)}$	{4}	{1,3,4}	{1,2}	{2}	…	…	Φ
f_k	7	4	4	4	…	…	4

可知，二种算法都可得到最优解，$x^* = (3,4,1,1)$ 对应目标函数值为 $f^* = 4$。

参 考 文 献

[1] 张宝康，一种整数 *Bottleneck* 问题的讨论，数值计算和计算机应用，8: 3(1987).

[2] R.S. Garfinkel, G.L. Nemhauser, Integer Programming, John Wiley & sons, 1972.