

一类二次曲面的有效显示*

顾景文

(江苏省电子计算站)

AN EFFICIENT DISPLAY FOR A CLASS OF QUADRIC SURFACES

Gu Jing-wen

(Jiangsu Computer Installation)

Abstract

In this paper a method for generation of a class of quadric surfaces is described, by which the hidden surface problem is completely solved by finding the so-called "ridge-lines" and "critical edges" on the surface. The generation of visible patches is fast and efficient, and the storage requirements are quite small. The method can be used for all devices for output of pictures.

一、引言

用计算机显示或绘制三维物体的图象是计算机绘图中的一大难题。由于它应用广泛,因此日益受到人们的重视。所谓物体的机器生成,简言之,就是从一个视点观察物体并将其从三维空间投影到一个二维图象空间上获得一张透视图。然后依据某种原则从中除去从视点观察物体上那些不可见部分的投影,最后将图形画出或加以显示。这个过程的关键在于决定物体上哪些部分是可见的,哪些部分是不可见的。因为关于物体的处理实质上就是对于曲面的处理,所以这一类问题也称为隐藏面(物体由曲面组成)或隐藏线(物体由多面体和直线组成)问题。对于不同的曲面,不同的图象显示、输出设备和不同的应用场合,已有许多不同的隐藏面算法^[1-7]。Sutherland等^[8]将这种隐藏面算法表征为利用某种“相干性”的分类问题,将曲面分为可见的、不可见的和可能可见的三部分,然后重点对可能可见的部分进行处理。采用的手段是细分或扫描之后进行比较、确定。而隐藏面算法中最费时间和存贮需求最大的工作也就是小片曲面的比较和可见性的确定。为较容易地进行这样的处理,现有的许多算法[9、10]是对用平面四(多)边形逼近的曲面进行细分,而最后产生的“网状”图形也是由直线连接而成。因而图形的质量依赖于细分的程

* 1983年5月5日收到。

度。至于有些算法^[1]将曲面细分到对应于图象平面上的一个象元为止,则需付出更大的代价,化费更多的时间。基于隐藏面问题的上述特点,即使对于一个被数学定义了的曲面,至今还没有一个既能保证图形质量而同时又做到迅速简便、存贮量少的比较完美的隐藏面算法。本文的目的则是试图在这一方面进行一下尝试,文中对于一类比较常用的由函数 $z = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4y + a_5x + a_6$ 所定义的曲面提出一种有效的算法。它通过解析地决定“临界边”和“脊线”等问题而迅速地解决了分类问题,完全确定了曲面的可见和不可见部分而不需作进一步的比较。最终的图形除脊线外都是由二次曲线构成的。实施中即使采用大步长的扫描方式,结果也是令人满意的。算法兼有精度高、运算简单、存贮量少、实施快速等优点,且可适用于各种图象输出设备。

二、方法的数学基础

为便于讨论,我们约定:由 $z = f(x, y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4y + a_5x + a_6$ 所确定的曲面定义于矩形区域 $R: [a, b] \times [c, d]$ 上,且 $a, c > 0$ 。视点位于坐标系原点 O ,坐标系服从常规意义下的 $x - y - z$ 右手系法则。设图象平面为 $y = E > 0$ (常数),且图象坐标系 $U - V$ 的原点为此平面与 y 轴的交点,其横坐标轴 V 轴与 x 轴同向,纵轴 U 与 z 轴同向。

现作一过原点和 z 轴的平面 $y = kx$, $c/b \leq k \leq \frac{c}{a}$, 我们称它为视平面。它与曲面 $f(x, y)$ 的交线便为一抛物线段。再从原点 O 引这样两条射线(从位于视点的观察者来说,就是两条视线):一条与抛物线相切于 T 点,另一条经过抛物线段的前端点 F 并与抛物线相交于点 I (见图 1,我们假定这样的点在所论的定义区域内都是存在的)。那末这两条“视线”就将抛物线分成三段,其中除了在点 T 和 I 之间的第二段,由于为第一段 FT 所掩盖而不可见到外都是可见的曲线段。我们分别称切点 T 和交点 I 为“脊点”和“临界点”。当 k 连续地从 c/b 增大到 c/a ,即当视平面连续地“扫过”所定义的区域时,临界点 I 和脊点 T 就分别追踪出原曲面上的一段(或数段)“临界边”和“脊线”,前端点 F 扫出曲面的可见边界曲线。而可见段 FT 、 IB 和不可见段 TI 则分别描绘出完全可见和完全不可见的曲面部分。因此,只要决定了临界边和脊线,曲面的生成问题也就容易解决了。

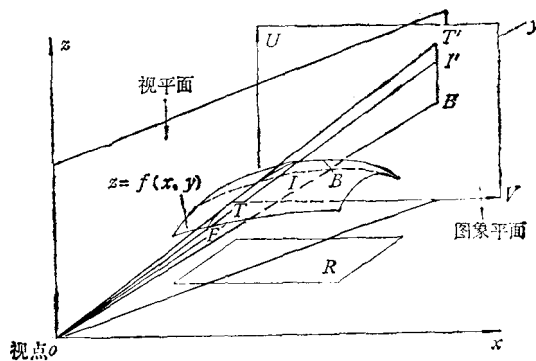


图 1

上面叙述的是解问题的基本思想，下面我们将导出这些临界边和脊线所应满足的条件。

平面 $y = kx (k > 0)$ 与曲面 f 的交线为

$$\begin{cases} z = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4y + a_5x + a_6, \\ y = kx. \end{cases} \quad (1)$$

现将 $x-y$ 坐标系旋转 θ 角,使得直线 $y = kx$ 成为新坐标系 $x'-y'$ 中的 x' 轴,则坐标变换为

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\theta = \text{tg}^{-1}k$. 因此

$$\sin \theta = k/\sqrt{1+k^2} = \alpha, \quad \cos \theta = 1/\sqrt{1+k^2} = \beta.$$

注意在 $y = kx$ 时, $y' = 0$, 将(2)代入(1)得交线方程

$$z = (a_1\beta^2 + a_2\alpha^2 + a_3\alpha\beta)x'^2 + (a_4\alpha + a_5\beta)x' + a_6. \quad (3)$$

求切点 T 也就是求 x'_0 使满足

$$\frac{dz(x'_0)}{dx'} = \frac{z(x'_0)}{x'_0}. \quad (4)$$

在我们的约定之下,自然要求 $x'_0 > 0$. 由(3)有

$$(a_1\beta^2 + a_2\alpha^2 + a_3\alpha\beta)x_0'^2 - a_6 = 0. \quad (5)$$

从中解得

$$x'_0 = \left(\frac{a_6}{a_1\beta^2 + a_2\alpha^2 + a_3\alpha\beta} \right)^{1/2}.$$

代入(2),并注意 $\alpha = k\beta$, 有

$$\begin{cases} x = \beta x'_0 = \left(\frac{a_6}{a_1 + a_2k^2 + a_3k} \right)^{1/2}, \\ y = kx, \end{cases} \quad (6)$$

此即为脊点 T 的 x, y 坐标. 由(5)式可得到

$$a_2y^2 + a_3xy + a_1x^2 - a_6 = 0, \quad (7)$$

它与 k 无关,这就表明了曲面上的“脊线”所应满足的关系式. 在所论的区域中有约束条件 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$.

注意用(6)式计算产生脊线比用(7)式更为方便,但(7)式是用以产生网络曲线的. 同时还应注意到,当 $a_1 + a_2k^2 + a_3k = 0$ 时,因 $\beta > 0$, 因此由(5)式可知此时必有 $a_6 = 0$. (3)式表明交线为一条经过视点的直线,所以这是一种退化的情况,整条线段都为脊点. 这时,用线段 $y = kx$ 上任何一点来计算脊点都可,对于脊线的处理不会带来麻烦.

对于临界边,注意到在我们的约定中,曲面的“前”边界与“左”边界,即曲面与平面 $y = c$ 和 $x = a$ 的交线都是可见的. 因此,临界边也就是以原点为顶点,以这两条边界曲线为准线的锥面与曲面的交线. 对于前边界曲线,准线方程为

$$\begin{cases} x = t, \\ y = c, & a \leq t \leq b, \\ z = f(t, c). \end{cases}$$

因而锥面方程为

$$\begin{cases} x = ts, & a \leq t \leq b, \\ y = cs, \\ z = f(t, c)s, & 0 \leq s < \infty. \end{cases} \quad (8)$$

这样,临界边上的点应满足关系式

$$f(t, c) \cdot s = f(ts, cs),$$

即

$$\begin{aligned} & (a_1t^2 + a_2c^2 + a_3ct + a_4c + a_5t + a_6)s \\ & = a_1(ts)^2 + a_2(cs)^2 + a_3ct s^2 + a_4cs + a_5ts + a_6. \end{aligned} \quad (9)$$

$s = 1$ 时, (8) 表示前边界曲线, 所以对我们所关心的区域, 应有 $s > 1$, 这样便可以对 (9) 式进行整理, 得到

$$a_1t^2s + a_2c^2s + a_3ct s - a_6 = 0.$$

乘上 cs 并注意到 $x = ts, y = cs$ 这一事实后, 有

$$a_1cx^2 + a_2cy^2 + a_3cxy - a_6y = 0. \quad (10)$$

这就是临界边上的点的 x, y 坐标所应满足的关系式。这时除了点 (x, y) 应落在区域 R 中之外, 由 (8) 式可知, 它还应服从约束条件

$$c/b < y/x < c/a.$$

类似地, 我们可以求出另一条临界边应满足的条件

$$\begin{aligned} & a_1ax^2 + a_2ay^2 + a_3axy - a_6x = 0, \\ & a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, c/a < y/x < d/a. \end{aligned} \quad (11)$$

三、算法的实施

决定了临界边和脊线以后, 曲面的生成就很容易了。从式 (7)、(10) 和 (11) 中可以看到, 脊线和临界边在区域 R 中的投影都是一条二次曲线。而且我们这里考虑的实际是单值曲面。因此, 这些投影曲线不会互相交叉。下面为便于讨论, 我们将这些投影曲线分别也称为 R 中的脊线和临界边。区域 R 被这些曲线分成三类区域 (见图 2), 脊线与边界所围的区域 R_1 , 临界边与边界所围区域 R_3 , 剩下的区域为 R_2 。对应 R_1, R_3 区域上的曲面部分是可见的, 而 R_2 上的曲面是不可见的。如果 R 中不存在脊线, 这当然是最简单的情况——整个曲面全部可见, 因此我们不讨论这一情况。由上一节所述, 曲面上临界边在图象平面中的投影也就是相应的曲面边界曲线的投影。因此在绘曲面图时, 只需将脊线画出, 而不必单独 (另外) 考虑临界边的绘制。对于曲面上常数 y 和常数 x 值的网络曲线的绘制, 只要求出 R 上相应的剖分线与脊线和临界边的交点后, 对各类交点作一简单的判别就可决定出可见和不可见的曲线段。求这种交点就是分别对式 (7)、(10)、(11) 固定一个变量后求含另一变量的二次方程的根, 这自然很容易解决。因各类交点在判别方法上

的不同,我们在具体进行时采取二步方式.

(1) 对脊线的交点确定可见段.

(2) 对临界边的交点确定可见段.

下面以剖分线 $y = h$ (常数) 为例分别加以叙述.

(1) 与脊线的交点最多有两个, 在各种可能情况下的处理过程如下:

首先, 建立函数 $g(x, y) = a_2y^2 + a_3xy + a_1x^2 - a_5$, 其中的系数 a_i 均为原曲面相应的系数. 当 $g(x, y) = 0$ 时就是式(7), 它表示了包含脊线的整条二次曲线. 所以平面上任一点 (x, y) 都按值 $g(x, y)$ 的正负性落在被二次曲线 $g(x, y) = 0$ 分离的两个区域中的一个上. 因曲面上 $y = c$ 的边界曲线是可见

的, 所以取点 (a, c) 为基准点, 而 $g(a, c)$ 为基准值(我们这里假定 $g(a, c) \equiv 0$, 若不然, 即当 (a, c) 为 R 中脊点时, 则可取 $g(a + \varepsilon, c)$ 为基准值, 而 ε 为一小正数).

A. 无脊线交点. 这时取剖分线中点 $(\frac{a+b}{2}, h)$, 考察 $F = g(\frac{a+b}{2}, h) \cdot g(a, c)$: i) $F > 0$, 这表明中点与基准点位于同一区域 R_1 中, 因此整条剖分线对应的曲线是可见的. 可全部画出, 且此时不需再作步(2)的考察而进入下一剖分线的处理; ii) $F < 0$, 则曲线不在前面的可见部分上, 转步(2).

B. 一个交点 (x, h) . 同样考察 $F = g(\frac{a+x}{2}, h) \cdot g(a, c)$, 当 $F > 0$ 时绘出位于 $(a, h), (x, h)$ 之间的曲线部分后转步(2), 否则绘出 $(x, h), (b, h)$ 间的曲线后转步(2).

C. 两个交点 $(x_1, h), (x_2, h)$. 这时考察 $F = g(\frac{x_1+x_2}{2}, h) \cdot g(a, c)$, 当 $F > 0$ 时绘出位于该两点间的曲线段, 否则除两点间的曲线外全部画出, 转步(2).

(2) 先用(11)式计算直线 $x = a$ 与临界边的交点, 将属于 R 的最小的交点 y 值记为 N , 作为比较值. 如 R 中无交点, 则记 $N = d + \varepsilon$, ε 为小正数.

这时因为临界边是由两个锥面与曲面的交线组成, 因此交点最多可达四个. 将交点, 包括剖分线两端点 $(a, h), (b, h)$ 按 x 值从小到大排列、编号. 这些点将剖分线分成若干个有序区间. 由临界点的性质可知, 这若干个区间(最多四个交点, 五个区间)对应的曲线的可见与不可见部分是互相间隔交叉的. 因此, 只要考察第一个区间上曲线的可见性即可.

对于第一个交点, 根据 h 与 N 的关系, R 上临界边在第一个交点邻近关于 x 的行为只能有以下两种可能:

A. $h < N$ 时, 临界边在交点附近为单调下降的(或交点为局部极小点)(见图 3), 这时交点左侧临界边上一点 Q 和视点 O 的连线与剖分线的交点 W 落在第一个区间内, 且此

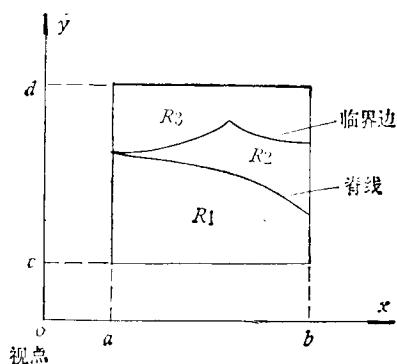


图 2

点必在直线段 QO 之内,因此对应点 W 的曲面上点为不可见的,即第一个区间上的曲线段是不可见的。

B. $h > N$ 时,临界边在交点附近为单调上升的(或交点为局部极大点)(见图 4),与 A 类似可推知第一个区间上的曲线段是可见的。

综上所述,可以得出:

- i) $h < N$, 偶数区间内曲线为可见;
- ii) $h > N$, 奇数区间内曲线为可见。

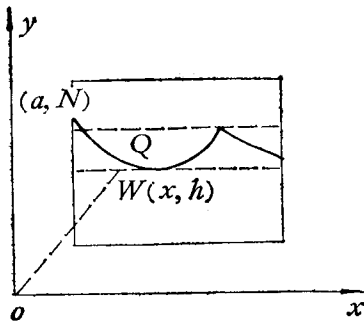


图 3

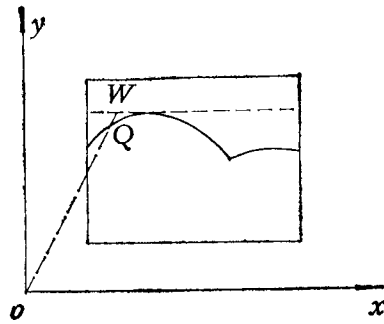


图 4

对于剖分线刚好与临界边相切或经过两段临界边的交点(见图 3)时,为便于统一处理,分别将切点(局部极点)或交点计算为两个点。

对常数 x 剖分线的处理过程与此类似。这样,只使用极少量的判别比较就可全部确定曲面上可见的网络线段。

曲面上一点 $(x, y, z(xy))$ 在图象平面中的坐标由透视变换不难得出,在我们的约定下,有:

$$U = z(x, y) \cdot E/y, V = x \cdot E/y.$$

对于常数 y 和常数 x 曲线,由上式可知,它们在图象平面上的投影均为二次曲线。特别对于 y 常数曲线的投影是形如 $U = l_1V^2 + l_2V + l_3$ 的抛物线,这种曲线的绘制自然是很容易实现的。

四、结 束 语

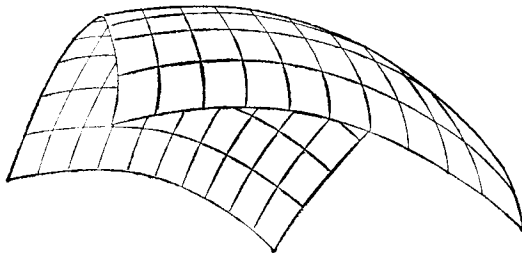
在本文中我们给出了椭圆抛物面和双曲抛物面的隐藏面算法。用代数几何的方法精确地确定了表面上的脊线和临界边,从而完全确定了可见的和不可见的曲面部分,而不必象[3]中那样需要假定视点位于无穷远处(这是一种特例)。可惜的是,方法不能被推广到一般的二次曲面场合,因为对一般的二次曲面,我们得不到象本文中那样简单易解的临界边条件。但是,我们愿意指出,在一般的二次曲面

$$a_0z^2 + a_1z + a_2zx + a_3zy + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x + a_8y + a_9 = 0$$

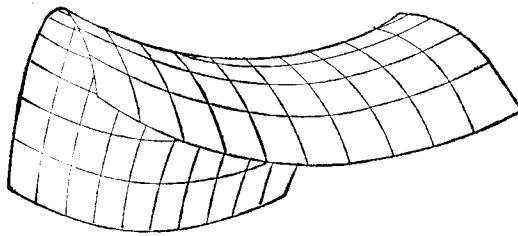
中,当 $a_1 = 0$ 时,也能推得脊线和临界边在 $x-y$ 平面上的投影分别为二次曲线和直线,因而在采取某些措施以后也可以利用本方法加以绘制,对此不作进一步的讨论。还要指出,本方法中的定义域 R 也可以为一般的三角形区域。这对于在离散分布的数据点上取本方法所用的二次曲面进行拟合的应用场合或许是有用的。

此外,用本方法绘制的曲面的网络线都是二次曲线,这对于具有二次补偿功能的设备自然是很理想的,它的存贮需求极少,实施相当容易。

附图 1、2 就是用本方法绘制的两张抛物面的网络图象。可以看到,尽管我们在这里采用了大步长的扫描,得到的结果却是满意的。



附图 1 消去了隐藏部分的椭圆抛物面



附图 2 双曲抛物面(隐藏面消去)

参 考 文 献

- [1] A. Appel, The notion of quantitative-invisibility and the machine rendering of solids, Proc. 1967 ACM Nat. Conf., 387—393.
- [2] J. Encarnacao, W. Giloi, PRADIS-An advanced programming system for 3-D display, Proc AFIPS SJCC 1972, 985—998.
- [3] R. Mahl, Visible surface algorithms for quadric patches, IEEE Trans. Computers, Vol. C-21, No. 1, 1972.
- [4] J. G. Griffiths, Drawing opaque solids using an incremental plotter, The Computer J., Vol. 16, No. 1, 1973.
- [5] H. Gouraud, Continuous shading of curved surfaces, IEEE Trans. Computers, Vol. 20, No. 6, 1971.
- [6] Wolfgang K. Giloi, Interactive Computer graphics, data structures, algorithms, languages, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1978, 165—184.
- [7] Bui Tuong Phong, Illumination for computer generated pictures, Communications of the ACM, Vol. 18, No. 6, 1975.

-
- [8] Sutherland, I. E. et al., A characterization of ten hidden-surface algorithms, *Computing Surveys*, Vol. 6, No. 1, 1974.
 - [9] M. E., Newell, A solution to the hidden surface problem, *Proc. of the ACM*, Vol. 1, 1972, 443—448.
 - [10] J. G., Griffiths, A data-structure for the elimination of hidden surfaces by patch subdivision, *CAD*, Vol. 7, No. 3, 1975.
 - [11] F. E., Catmull, Computer display of curved surfaces, *Proc. Conf. Computer Graphics, Pattern Recognition, Data Structure*, 1975, 11—17.