一类变时滞微分代数方程单支方法的收敛性[*1)]

肖飞雁 张诚坚
(华中科技大学数学系, 武汉 430074)

摘 要

B- 收敛和 D- 收敛的概念被推广到了变时滞微分代数方程问题, 给出了 D_A- 收敛的定义, 讨论了该类问题的 D_A- 收敛性, 并给出了相应的误差估计, 证明了如果 G- 稳定的单支方法对于常微分方程初值问题在经典意义下是 p 阶相容的且 $\frac{\beta_k}{\alpha_k}>0$, 那么具有线性插值过程的该方法是 p 阶 D_A- 收敛的, 这里 p=1 或 2.

关键词: 变时滞微分代数方程, 单支方法,G- 稳定,D- 收敛

MR (2000) 主题分类: 65L05, 65H10, 34K28

CONVERGENCE OF ONE-LEG METHODS FOR A CLASS OF VARIABLE RETARDED DIFFERENTIAL ALGEBRAIC EQUATIONS

Xiao Feiyan Zhang Chengjian
(*Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

Abstract

This paper extends B-convergence and D-convergence to a class of variable retarded differential algebraic equations and puts forward D_A-convergence. Furthermore, D_A-convergence of the problem is discussed and its error estimation is given. Finally, it is proved that a One-Leg method with linear interpolation procedure is D_A-convergent of order p if it is G-stable and consistent of order p for ordinary differential equations and $\frac{\beta_k}{\alpha_k}>0$,here p=1 or 2.

Keywords: variable retarded differential algebraic equations, one-leg methods, G-stability, D-convergence

2000 Mathematics Subject Classification: 65L05, 65H10, 34K28

1. 引 言

时滞微分代数方程 (RDAEs) 在计算机辅助设计, 电路分析, 力学系统, 化学反应模拟及自动控制系统的实时仿真等科学与工程应用领域中有着非常广泛的应用, 因此研究此类问题具有十分重要的理论意义及实用价值. 然而, 由于此类方程既有时滞项, 又有代数限制条件, 使

[*] 2007 年 1 月 9 日收到.
[1)] 国家自然科学基金 (10571066) 资助项目.

得分析变的十分困难. 迄今只有少量文章 (如 [1-7]) 对时滞微分代数方程的数值求解问题进行了研究, 而这些文献主要只针对方法的稳定性进行了讨论 (如 [2,3]) 且仅限于常时滞的问题.

本文主要讨论了一类 1 指标的变时滞微分代数方程, 提出了 $K_{\alpha,\beta,\gamma}^{(A)}$ 问题类, 将 B- 收敛和 D- 收敛的概念推广到了变时滞微分代数方程问题类 $K_{\alpha,\beta,\gamma}^{(A)}$, 给出了 D_A- 收敛的定义, 讨论了该问题类的 D_A- 收敛性, 并给出了相应的误差估计. 在文末, 我们用数值试验验证了本文的主要结论.

2. 模型问题类 $K_{\alpha,\beta,\gamma}^{(A)}$

设 $\langle .,. \rangle$ 是空间 C^M 中的内积, $\|.\|$ 是由该内积导出的范数, 考虑下列变时滞微分代数方程

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), x(t-\tau(t)), y(t)), & t>0, \\ 0 = g(x(t), x(t-\tau(t)), y(t)), & t>0, \\ x(t) = \varphi(t), y(t)=\psi(t), & -\tau_1 \le t \le 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

这里 $0<\tau_0 \le \tau(t) \le \tau_1$; $\varphi : [-\tau_1, 0] \to C^M, \psi : [-\tau_1, 0] \to C^N$ 是已知的充分光滑的函数且满足相容条件 $0 = g(\varphi(0), \varphi(-\tau(0)), \psi(0))$; $f : C^M \times C^M \times C^N \to C^M$ 和 $g : C^M \times C^M \times C^N \to C^N$ 是充分光滑的映射; 雅可比矩阵 $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ 在解的邻域内存在有界逆矩阵, 且 g 分别对 $x(t), x(t-\tau(t)), y(t)$ 的偏导数的范数在解的邻域内有界且为适度大小. 记

$$L_1 = \sup \|(\frac{\partial g(x,u,y)}{\partial y})^{-1}\|, L_2 = \sup \|\frac{\partial g(x,u,y)}{\partial x}\|, L_3 = \sup \|\frac{\partial g(x,u,y)}{\partial u}\|.$$

这里的上确界是对所有 $x, u \in C^M, y \in C^N$ 来取的, 且假设 L_1, L_2, L_3 是具有适度大小的常数. 此外, 进一步假设 f 满足下列条件

$$\begin{aligned} &Re\langle x_1 - x_2, f(x_1, u_1, y) - f(x_2, u_2, y)\rangle \le \alpha \|x_1 - x_2\|^2 + \beta \|u_1 - u_2\|^2, \\ &x_1, x_2, u_1, u_2 \in C^M, y \in C^N; \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\|f(x,u,y_1) - f(x,u,y_2)\| \le \gamma \|y_1 - y_2\|, x, u \in C^M, y_1, y_2 \in C^N. \tag{2.3}$$

这里 α, β, γ 为实常数. 将满足上述条件的一切初值问题 (2.1) 所构成的问题类记为 $K_{\alpha,\beta,\gamma}^{(A)}$.

由雅可比矩阵 $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ 在解的邻域内存在有界逆矩阵及隐函数定理可知 (2.1) 中第二式有唯一解

$$y(t) = G(x(t), x(t-\tau(t))), t \ge 0. \tag{2.4}$$

于是, 可得到下列状态空间方程

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), x(t-\tau(t)), G(x(t), x(t-\tau(t)))), & t>0, \\ x(t) = \varphi(t), & -\tau_1 \le t \le 0, \\ G(x(t), x(t-\tau(t)))) = \psi(t), & -\tau_1 \le t \le 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

显然, (2.1) 是 1 指标的时滞微分代数方程. 由隐函数定理, 我们有

$$\|G_x(x,u)\| = \| -(\frac{\partial g(x,u,y)}{\partial y})^{-1} \cdot (\frac{\partial g(x,u,y)}{\partial x})\| \le L_1 L_2; \tag{2.6}$$

$$\|G_u(x,u)\| = \| -(\frac{\partial g(x,u,y)}{\partial y})^{-1} \cdot (\frac{\partial g(x,u,y)}{\partial u})\| \le L_1 L_3. \tag{2.7}$$

3. 单支方法的 D_A- 收敛性

对变时滞微分代数方程 (2.1) 应用 k 步单支方法 (ρ,σ), 我们有下列格式:

$$\begin{cases} \rho(E)x_n = & hf(\sigma(E)x_n,\bar{x}_n,\sigma(E)y_n), \quad n\geq 0,\\ 0 = & g(\sigma(E)x_n,\bar{x}_n,\sigma(E)y_n), \quad n\geq 0.\end{cases} \tag{3.1}$$

这里 h 是步长, $\bar{x}_n$ 是 $x(\sigma(E)t_n-\tau(\sigma(E)t_n))$ 的逼近值, 它可利用 $\{x_j\}_{j\leq n+k}$ 的值在点 $t=\sigma(E)t_n-\tau(\sigma(E)t_n)$ 处进行某种的插值获得,$\rho(x)=\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_jx^j$, $\sigma(x)=\sum\limits_{j=0}^{k}\beta_jx^j$ 是生成多项式, 它们是实系数且即约的, 满足 $\rho(1)=0,\rho'(1)=\sigma(1)=1$.

由 Dahlquist 的限制性定理, 我们可对 $\bar{x}_n$ 进行线性插值. 令 $\tau_0=(\bar{m}-\bar{\delta})h,\tau_1=(m-\delta)h,\tau(\sigma(E)t_n)=(m_n-\delta_n)h$,$\bar{m},m,m_n$ 是正整数,$\bar{\delta},\delta,\delta_n\in[0,1)$, 显然, 我们有 $\bar{m}\leq m_n\leq m$. 我们定义

$$\begin{cases} \bar{x}_n=\delta_n\sigma(E)x_{n-m_n+1}+(1-\delta_n)\sigma(E)x_{n-m_n}, & \sigma(E)t_n-\tau(\sigma(E)t_n)\geq 0,\\ \bar{x}_n=\varphi(\sigma(E)t_n-\tau(\sigma(E)t_n)), & \sigma(E)t_n-\tau(\sigma(E)t_n)\leq 0.\end{cases} \tag{3.2}$$

这里当 $l\leq 0$ 时, $x_l=\varphi(lh)$.

由 (2.4) 及 (3.1) 的第二式, 我们有

$$G(\sigma(E)x_n,\bar{x}_n)=\sigma(E)y_n, n\geq 0. \tag{3.3}$$

代入 (3.1) 的第一式可得

$$\rho(E)x_n=hf(\sigma(E)x_n,\bar{x}_n,G(\sigma(E)x_n,\bar{x}_n)), n\geq 0, \tag{3.4}$$

$$\bar{x}_n=\begin{cases} \delta_n\sigma(E)x_{n-m_n+1}+(1-\delta_n)\sigma(E)x_{n-m_n}, & \sigma(E)t_n-\tau(\sigma(E)t_n)\geq 0,\\ \varphi(\sigma(E)t_n-\tau(\sigma(E)t_n)), & \sigma(E)t_n-\tau(\sigma(E)t_n)\leq 0.\end{cases} \tag{3.5}$$

这里当 $l\leq 0$ 时, $x_l=\varphi(lh)$.

下面恒设 $x(t),y(t)$ 为 (2.1) 的真解且具有后文所需要用到的各阶连续导数, 满足

$$\|\frac{d^ix(t)}{dt^i}\|\leq M_i, \qquad \|\frac{d^iy(t)}{dt^i}\|\leq \bar{M}_i.$$

仿照文献 [8,9] 我们有如下定义.

定义 3.1. 带插值过程 (3.2) 的单支方法 (3.1) 称为是 p 阶 D_A- 收敛的, 如果用该方法从初始值 $x_0,x_1,...,x_{k-1}$, $y_0,y_1,...,y_{k-1}$ 出发, 按定步长 h 求解初值问题 (2.1), 所得到的逼近序列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 的整体误差有下列估计:

$$\begin{aligned}\|x(t_n)-x_n\|\leq\ & C_1(t_n)(h^p+\max_{0\leq i\leq k-1}\|x(t_i)-x_i\| \\ & +\max_{0\leq i\leq k-1}\|y(t_i)-y_i\|), \qquad n\geq k, h\in(0,h_0],\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\|\sigma(E)(y(t_n)-y_n)\|\leq\ & C_2(t_n)(h^p+\max_{0\leq i\leq k-1}\|x(t_i)-x_i\| \\ & +\max_{0\leq i\leq k-1}\|y(t_i)-y_i\|), \qquad n\geq k, h\in(0,h_0],\end{aligned} \tag{3.7}$$

这里 $C_1(t_n), C_2(t_n), h_0$ 仅依赖于方法, 某些导数界 $M_i, \bar{M}_i, \alpha, \beta, \gamma, \tau_1, \tau_0$ 及 $L_i(i=1,2,3)$.

下面我们讨论方法的 D_A- 收敛性. 在下文的证明中, 参数 const 泛指有界常量, 且仅依赖于方法, 某些导数界 $M_i, \bar{M}_i, \alpha, \beta, \gamma, \tau_1, \tau_0$ 及 $L_i(i=1,2,3)$.

对任给的 $k\times k$ 实对称正定矩阵 $G=[G_{ij}]$, 定义积空间 $C^{k\times M}$ 中的范数 $\|\cdot\|_G$ 如下:

$$\|U\|_G = (\sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}\langle u_i, u_j\rangle)^{\frac{1}{2}}, \forall U=(u_1^T, u_2^T, ..., u_k^T)^T \in C^{k\times M}.$$

我们假定

$$\hat{x}_n = x(t_n) + c_1 h^2 x''(t_n), \tag{3.8}$$

$$\bar{X}_n = x(\sigma(E)t_n - \tau(\sigma(E)t_n)). \tag{3.9}$$

则存在 $e_n \in C^M$, 使得

$$\rho(E)\hat{x}_n + \alpha_k e_n = hf(\sigma(E)\hat{x}_n + \beta_k e_n, \bar{X}_n, G(\sigma(E)\hat{x}_n + \beta_k e_n, \bar{X}_n)), n=0,1,2,.... \tag{3.10}$$

引理 3.1. 如果单支方法 (ρ,σ) 在经典意义下是 $p\le 2$ 阶相容的且 $\dfrac{\beta_k}{\alpha_k}>0$, 那么存在常数 $const_1$ 和 $h_1\le 1$, 它们仅依赖于方法, 某些导数界 $M_i, \bar{M}_i, \alpha, \beta, \gamma, \tau_1, \tau_0$ 及 $L_i(i=1,2,3)$, 使得

$$\|e_n\| \le const_1 h^{p+1}, h\in(0,h_1], n=0,1,2,.... \tag{3.11}$$

证明. 不妨设

$$x(\sigma(E)t_n) = \sum_{j=0}^{k-1}(\beta_j - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\alpha_j)\hat{x}_{n+j} + \frac{\beta_k}{\alpha_k} h x'(\sigma(E)t_n) + R_1^{(n)} \tag{3.12}$$

$$\rho(E)\hat{x}_n = hx'(\sigma(E)t_n) + R_2^{(n)}.$$

对 (3.12)Taylor 展开并对比系数, 令

$$c_1 = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}(\beta_j - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\alpha_j)j^2 - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\sum_{j=0}^{k} j\beta_j + \frac{1}{2}(\sum_{j=0}^{k} j\beta_j)^2, \tag{3.13}$$

则有

$$\|R_1^{(n)}\| \le const\cdot h^3.$$

结合单支方法 p 阶相容条件, 同理可推出

$$\|R_2^{(n)}\| \le const\cdot h^{p+1}.$$

又由 (3.10) 和 (3.12), 我们有

$$\begin{aligned}
&\|x(\sigma(E)t_n) - \sigma(E)\hat{x}_n - \beta_k e_n\|^2 \\
&= Re\langle x(\sigma(E)t_n) - \sigma(E)\hat{x}_n - \beta_k e_n, \frac{\beta_k}{\alpha_k} h[f(\sigma(E)x_n, x(\sigma(E)t_n - \tau(\sigma(E)t_n)), G(\sigma(E)x_n, \\
&\quad x(\sigma(E)t_n - \tau(\sigma(E)t_n)))) - f(\sigma(E)\hat{x}_n + \beta_k e_n, \bar{X}_n, G(\sigma(E)\hat{x}_n + \beta_k e_n, \bar{X}_n))] + R_1^{(n)}\rangle \\
&\le \frac{\beta_k}{\alpha_k} h(\alpha + \gamma L_1 L_2)\|x(\sigma(E)t_n) - \sigma(E)\hat{x}_n - \beta_k e_n\|^2 \\
&\quad + \|R_1^{(n)}\|\cdot\|x(\sigma(E)t_n) - \sigma(E)\hat{x}_n - \beta_k e_n\|.
\end{aligned}$$

若取

$$h_1=\begin{cases}1,\alpha+\gamma L_1L_2\le 0,\\ \min\{1,\dfrac{\alpha_k}{2\beta_k(\alpha+\gamma L_1L_2)}\},\alpha+\gamma L_1L_2>0,\end{cases}$$

则有

$$\|x(\sigma(E)t_n)-\sigma(E)\hat{x}_n-\beta_k e_n\|\le 2\|R_1^{(n)}\|,h\in(0,h_1]. \tag{3.14}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\|h[x'(\sigma(E)t_n)-f(\sigma(E)\hat{x}_n+\beta_k e_n,\bar{X}_n,G(\sigma(E)\hat{x}_n+\beta_k e_n,\bar{X}_n))]\|\\ \le\ &\frac{3\alpha_k}{\beta_k}\|R_1^{(n)}\|,h\in(0,h_1].\end{aligned}$$

另一方面,

$$\alpha_k e_n=hf(\sigma(E)\hat{x}_n+\beta_k e_n,\bar{X}_n,G(\sigma(E)\hat{x}_n+\beta_k e_n,\bar{X}_n))-hx'(\sigma(E)t_n)-R_2^{(n)}.$$

因此,

$$\|e_n\|\le\frac{3}{|\beta_k|}\|R_1^{(n)}\|+\frac{1}{|\alpha_k|}\|R_2^{(n)}\|\le const_1h^{p+1},h\in(0,h_1].$$

引理 3.1 证明完毕.

记

$$\epsilon_n=((x_n-\hat{x}_n)^T,(x_{n+1}-\hat{x}_{n+1})^T,...,(x_{n+k-1}-\hat{x}_{n+k-1})^T)^T\in C^{k\times M}.$$

类似于文 [9] 中定理 3.1 的证明, 我们有下列引理:

引理 3.2. 如果单支方法 (ρ,σ) 关于实对称矩阵 G 是 G- 稳定的 (cf. [10]), 那么

$$\begin{aligned}\|\epsilon_{n+1}\|_G^2\le\ &\|\epsilon_0\|_G^2+h\sum_{i=0}^{n}[\|\epsilon_i\|_G^2+2c_2(1+h)\|\sigma(E)(x_i-\hat{x}_i)\|^2\\ &+(2\beta+\gamma L_1L_3)(1+h)\|\bar{x}_i-\bar{X}_i\|^2+(1+h)(2c_2\beta_k^2+h^{-2}\lambda_1)\|e_i\|^2]\\ &n=0,1,2,....\end{aligned} \tag{3.15}$$

这里, $c_2=\max\{0,(2\alpha+2\gamma L_1L_2+\gamma L_1L_3)\}$, λ_1 表示矩阵 G 的最大特征值.

引理 3.3. 存在仅依赖于方法, 部分导数界及 τ_0,τ_1 的常数 $const_2$ 和 h_2, 当 $h\in(0,h_2]$ 时, 有下列不等式成立:

$$\sum_{i=0}^{n}\|\bar{x}_i-\bar{X}_i\|^2\le const_2(k+1)\sum_{i=0}^{n+k-1}\|x_i-\hat{x}_i\|^2+const_2(n+1)(mc_1^2M_2^2+1)h^4. \tag{3.16}$$

证明. 由 (3.2) 和 (3.9), 我们有

$$\begin{aligned}&\|\bar{x}_i-\bar{X}_i\|=\|\bar{x}_i-x(\sigma(E)t_i-\tau(\sigma(E)t_i))\|\\ &\le\delta_i\sum_{j=0}^{k}|\beta_j|\cdot\|x_{i-m_i+1+j}-\hat{x}_{i-m_i+1+j}\|+(1-\delta_i)\sum_{j=0}^{k}|\beta_j|\cdot\|x_{i-m_i+j}-\hat{x}_{i-m_i+j}\|\\ &\quad+\|\delta_i\sum_{j=0}^{k}\beta_j\hat{x}_{i-m_i+1+j}+(1-\delta_i)\sum_{j=0}^{k}\beta_j\hat{x}_{i-m_i+j}-x(\sigma(E)t_i-\tau(\sigma(E)t_i))\|.\end{aligned}$$

通过 Taylor 展开, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}\beta_j\hat{x}_{i-m_i+1+j} &\le \sum_{j=0}^{k}\beta_j x(t_{i-m_i+1+j}) + const\cdot h^2\\ &\le \sum_{j=0}^{k}\beta_j[x(t_i)+(j-m_i+1)h\cdot x'(t_i)] + const\cdot h^2\\ &\le x(t_i)+[(1-m_i)+\sum_{j=0}^{k}j\beta_j]x'(t_i)h + const\cdot h^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}\beta_j\hat{x}_{i-m_i+j} &\le \sum_{j=0}^{k}\beta_j x(t_{i-m_i+j}) + const\cdot h^2\\ &\le x(t_i)+[-m_i+\sum_{j=0}^{k}j\beta_j]x'(t_i)h + const\cdot h^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(\sigma(E)t_i-\tau(\sigma(E)t_i)) &= x(t_i+h\sum_{j=0}^{k}j\beta_j-\tau(\sigma(E)t_i))\\ &= x(t_i)+x'(t_i)[h\sum_{j=0}^{k}j\beta_j-\tau(\sigma(E)t_i))]+O(h^2)\\ &= x(t_i)+x'(t_i)h[\sum_{j=0}^{k}j\beta_j-(m_i-\delta_i)]+O(h^2).\end{aligned}$$

取 $h_2=min\{h_1,\frac{\tau_0}{2}\}$, 则当 $h\in(0,h_2]$ 时, 有 $2\le\bar{m}\le m_i\le m$. 因此, 综上分析可得

$$\begin{aligned}\|\bar{x}_i-\bar{X}_i\|^2 &\le const_2[\sum_{j=-m_i}^{k-m_i+1}\|x_{i+j}-\hat{x}_{i+j}\|^2+h^4]\\ &\le const_2[\sum_{j=0}^{k-1}\|x_{i+j}-\hat{x}_{i+j}\|^2+(mc_1^2M_2^2+1)h^4]\\ &\le const_2[\sum_{j=0}^{i+k-1}\|x_j-\hat{x}_j\|^2+(mc_1^2M_2^2+1)h^4],\end{aligned}\tag{3.17}$$

从而有

$$\sum_{i=0}^{n}\|\bar{x}_i-\bar{X}_i\|^2\le const_2(k+1)\sum_{i=0}^{n+k-1}\|x_i-\hat{x}_i\|^2+const_2(n+1)(mc_1^2M_2^2+1)h^4.$$

这里 $const_2$ 仅依赖于方法, 某些导数界 M_i,τ_1,τ_0. 引理 3.3 证明完毕.

定理 3.1. 如果 G- 稳定的单支方法 (ρ,σ) 对于常微分方程初值问题在经典意义下是 p 阶相容的, 且有 $\frac{\beta_k}{\alpha_k}>0$, 那么具有插值过程 (3.2) 的单支方法是 p 阶 D_A- 收敛的, 这里 $k\ge1,p=1$ 或 2.

证明. 由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n}\|\sigma(E)(x_i-\hat{x}_i)\|^2\\ \le\ &(k+1)\sum_{j=0}^{k}\beta_j^2\sum_{i=0}^{n+k-1}\|x_i-\hat{x}_i\|^2+(k+1)\beta_k^2\|x_{n+k}-\hat{x}_{n+k}\|^2.\end{aligned}\tag{3.18}$$

假设 λ_1 和 λ_2 表示矩阵 G 的最大和最小特征值, 则有

$$\|\epsilon_{n+1}\|_G^2 \geq \lambda_2\|x_{n+k}-\hat{x}_{n+k}\|^2, \tag{3.19}$$

$$\|\epsilon_i\|_G^2 \leq \lambda_1\sum_{j=0}^{k-1}\|x_{i+j}-\hat{x}_{i+j}\|^2, \tag{3.20}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\|\epsilon_i\|_G^2 \leq \lambda_1 k\sum_{i=0}^{n+k-1}\|x_i-\hat{x}_i\|^2, \tag{3.21}$$

根据引理 3.1 和引理 3.2, 我们有

$$\begin{aligned}\|\epsilon_{n+1}\|_G^2 \leq \quad & \|\epsilon_0\|_G^2 + h\sum_{i=0}^{n}[\|\epsilon_i\|_G^2 + 4c_2\|\sigma(E)(x_i-\hat{x}_i)\|^2 \\ & +2(2\beta+\gamma L_1L_3)\|\bar{x}_i-\bar{X}_i\|^2 + 2(2c_2\beta_k^2+h^{-2}\lambda_1)\cdot const_1^2\cdot h^{2(p+1)}], h\in(0,h_1].\end{aligned} \tag{3.22}$$

结合引理 3.3 及上述分析, 易得

$$\begin{aligned}\|x_{n+k}-\hat{x}_{n+k}\|^2 \leq \quad & const_3\cdot h^{2p} + const_4\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\|x_i-\hat{x}_i\|^2 \\ & +const_5\cdot h\sum_{i=0}^{n+k-1}\|x_i-\hat{x}_i\|^2, h\in(0,h_0],\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中,

$$h_0 = \begin{cases} h_2, c_2 = 0, \\ min\{h_2, \frac{\lambda_2}{8c_2(k+1)\beta_k^2}\}, c_2\neq 0.\end{cases}$$

这里 $const_3, const_4, const_5, h_0$ 是仅依赖于方法, 某些导数界 $M_i, \bar{M}_i, \alpha, \beta, \gamma, \tau_1, \tau_0, L_i(i=1,2,3)$ 及 λ_1, λ_2 的有界常量.

根据离散的 Bellman 不等式, 我们有

$$\|x_{n+k}-\hat{x}_{n+k}\|^2\leq(const_3\cdot h^{2p}+k\cdot const_4\max_{0\leq i\leq k-1}\|x_i-\hat{x}_i\|^2)\exp[const_5\cdot(n+k)h],\ h\in(0,h_0]. \tag{3.24}$$

结合 (3.8) 则有

$$\begin{aligned}\|x_{n+k}-x(t_{n+k})\| \quad & \leq \|x_{n+k}-\hat{x}_{n+k}\| + \|\hat{x}_{n+k}-x(t_{n+k})\| \\ & \leq C_1(t_{n+k})(h^p + \max_{0\leq i\leq k-1}\|x_i - x(t_i)\|), h\in(0,h_0].\end{aligned} \tag{3.25}$$

下面讨论 y 分量的误差估计. 令

$$\tau(t_n+jh) = \tau(t_n) + l_jh.$$

由 (2.4) 知

$$\begin{aligned}\sigma(E)y(t_n) \quad & = \sigma(E)G(x(t_n), x(t_n-\tau(t_n))) \\ & = \sum_{j=0}^{k}\beta_jG(x(t_n+jh), x(t_n-\tau(t_n)+(j-l_j)h)) \\ & = \sum_{j=0}^{k}\beta_jG(x(t_n)+jhx'(t_n)+O(h^2), x(t_n-\tau(t_n))+(j-l_j)hx'(t_n)+O(h^2)).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} & G(\sigma(E)x(t_n),\sigma(E)x(t_n-\tau(t_n))) \\ = \; & G(x(t_n)+\sum_{j=0}^{k}\beta_j(x'(t_n)\cdot jh+O(h^2)),x(t_n-\tau(t_n)) \\ & +\sum_{j=0}^{k}\beta_j(x'(t_n-\tau(t_n))\cdot(j-l_j)h+O(h^2))). \end{aligned}$$

将上两式分别在 $(x(t_n),x(t_n-\tau(t_n)))$ 处对二元函数 $G(x,u)$Taylor 展开后, 我们有

$$\sigma(E)y(t_n)=G(\sigma(E)x(t_n),\sigma(E)x(t_n-\tau(t_n)))+O(h^p). \quad (3.26)$$

由中值定理及隐函数性质, 我们有

$$\|G(u_1,v_1)-G(u_2,v_2)\|\le L_1L_2\|u_1-u_2\|+L_1L_3\|v_1-v_2\|,u_1,u_2,v_1,v_2\in C^M. \quad (3.27)$$

又

$$\sigma(E)y_n=G(\sigma(E)x_n,\bar{x}_n),n\ge 0.$$

于是, 我们容易得到

$$\|\sigma(E)(y(t_n)-y_n)\|\le C_2(t_n)(h^p+\max_{0\le i\le k-1}\|x(t_i)-x_i\|),n\ge k,h\in(0,h_0].$$

因此, 该方法是 $p(p=1,2)$ 阶 D_A- 收敛的. 定理 3.1 证明完毕.

4. 数值试验

分别用带线性插值的二阶向后微分公式 (简记为 BDF), 中点公式 (简记为 MPF) 和隐式欧拉法 (简记为 IEM) 按定步长 $h>0$ 求解下列试验问题:

$$\begin{cases} x' & = & -4x(t)+x(t-arctan(t))\cdot y(t), & 1\le t\le 6; \\ 0 & = & e^{3arctan(t)}\cdot x(t)\cdot y(t)-e^{-3t}, & 1\le t\le 6; \\ x(t) & = & e^{-3t},y(t)=e^{-3arctan(t)}, & t\le 1. \end{cases}$$

其唯一真解为 $x(t)=e^{-3t},y(t)=e^{-3arctan(t)}$, 试验结果中 $errx,erry$ 分别表示解序列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 的整体绝对误差. 试验问题的数值计算结果如下:

积分步长	终止时间	整体	绝对	误差
h	T=6	MPF	BDF2	IEM
0.1	$errx$	3.673e-0010	1.0671e-009	1.0187e-008
	$erry$	3.6449e-004	1.100e-003	5.900e-003
0.01	$errx$	3.4450e-0012	1.7724e-0011	6.2218e-0010
	$erry$	3.3358e-006	1.7138e-005	5.7863e-004
0.001	$errx$	3.4722e-0014	2.7984e-0012	5.9833e-0011
	$erry$	3.3515e-008	2.7007e-006	5.7528e-005

数值试验结果表明本文结论是正确的.

注. 本文的结论及证明可平行推广到含有限个变时滞的微分代数方程的情况, 限于篇幅本文不再另外给出.

参 考 文 献

[1] Ascher U M, Petzold L R. The numerical solution of delay differential-algebraic equations of retarded and neutral type[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1995, 32: 1635-1657.

[2] Zhu W and Petzold L R. Asymptotic stability of linear delay-differential-algebraic equations[J]. Appl. Numer. Math., 1997, 24: 247-264.

[3] Zhang Chengjian, Liao Xiaoxin. Nonlinear stability of (ρ, σ)-methods for stiff delay-differential-algebraic systems[J]. Control Theory and Applications, 2001, 18: 827-832.

[4] Hauber R. Numerical treatment of retarded differential-algebraic equations by collocation methods[J]. Advances in Computational Mathmatics, 1997, 7: 573-592.

[5] Guglielmi N, Hairer E. Implementing radau IIA methods for stiff delay differential equations[J]. Computing, 2001, 67: 1-12.

[6] 李宏智, 李建国. 块隐式单步方法求解一类延迟微分代数方程 [J]. 华中科技大学学报 (自), 2003, 10: 111-113.

[7] 甘四清, 孙耿. 单支方法的收敛性 [J]. 应用数学, 2001, 14: 30-33.

[8] Zhang Chengjian, Zhou Shuzi. Nonlinear stability and D-convengence to Runge-Kutta methods for DDEs[J]. J. Comput Appl Math., 1997, 85: 225-237.

[9] Huang C M, Li S F, Fu F Y and Chen G N. stability and error analysis of one-leg methods for nonlinear delay differential equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 1999, 103: 263-279.

[10] 李寿佛. 刚性微分方程算法理论 [M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1997 年.