线性椭圆型方程的一个有限差分异步并行算法*

李　磊[1)]

（西安交通大学数学系）

A FINITE DIFFERENCE ASYNCHRONOUS ITERATIVE ALGORITHM FOR LINEAR ELLIPTIC PDEs

Li　Lei

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an, China)

Abstract

In this paper, we presented a stable difference scheme for linear elliptic PDEs. It is convergent by the asynchronous iterative method on multiprocessors.

1. 引　言

用区域分解算法求解偏微分方程是近年来随着越来越多的 MIMD 系统的开发而发展起来的. 国内康立山教授等[1,2]在这一领域做了大量的工作. 本文则从另一角度出发，对二阶线性椭圆型方程构造了一个稳定的差分格式，而求解这个差分方程组的异步迭代过程收敛于原方程的解.

考察线性椭圆型方程

$$\begin{cases} -(au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy})+du_x+eu_y+fu=g(x,y), \\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中系数 a,b,c,d,e,f 是 x,y 的函数,在 Ω 内每一点处均满足椭圆型条件

$$a>0,c>0,ac-b^2>0,\ \forall(x,y)\in\Omega. \tag{2}$$

Ω 是平面上一个开矩形域，$0<x<1,0<y<1$，$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界.

笔者在[3]中就 $d=e=f\equiv 0$ 的情形对方程(1)构造了一个稳定的差分格式,其差分矩阵是 M 矩阵. 根据 M 矩阵的性质及Baudet 的异步迭代收敛定理[5],这个差分格式在多处理机系统上异步运行(或类似地，在单处理机上混乱松弛)是收敛的. 本文将其结果推

* 1990 年 11 月 5 日收到.

1) 现在地址是日本 030 青森市青森大学工学部.

广到一般情形.

2. 差分方程

为了得出方程(1)的离散模拟，在矩形域 $0<x<1$，$0<y<1$ 上取等步长 $h=\frac{1}{N+1}$，并记离散问题的网格节点为 $(x_i,y_j)=(ih,jh)$，u 在 (x_i,y_j) 上的值为 u_{ij}，$g(x,y)$ 在 (x_i,y_j) 上的值为 g_{ij}，$0\leqslant i,j\leqslant N+1$.

首先，用中心差商来近似 $(u_{xx})_{ij}$，$(u_{yy})_{ij}$，$(u_x)_{ij}$ 和 $(u_y)_{ij}$，而用 x 向前差商 y 向前差商和 x 向后差商 y 向后差商两种近似的均值来近似 $(u_{xy})_{ij}$，即

$$(u_{xx})_{ij}\doteq\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}),$$

$$(u_{yy})_{ij}\doteq\frac{1}{h^2}(u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}),$$

$$(u_{xy})_{ij}\doteq\frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1}-u_{i,j+1}-u_{i+1,j}+2u_{ij}-u_{i-1,j}-u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}),$$

$$(u_x)_{ij}\doteq\frac{1}{2h}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}),$$

$$(u_y)_{ij}\doteq\frac{1}{2h}(u_{i,j+1}-u_{i,j-1}),$$

将这些近似式代入(1),便得到(1)的下述离散模拟:

$$G_1\hat{u}=\hat{g},\tag{3}$$

其中 G_1 是 N^2 阶块三对角矩阵

$$G_1=[C_i,A_i,B_i]_{i=1\sim N},\tag{4}$$

$A_i,B_i,C_i,i=1\sim N$ 是N阶三对角矩阵.

$$A_i=\left[b_{ij}-c_{ij}-\frac{h}{2}e_{ij},\ 2\left(a_{ij}+c_{ij}-b_{ij}+\frac{1}{2}f_{ij}h^2\right),\right.$$
$$\left.\left(b_{ij}-c_{ij}+\frac{h}{2}e_{ij}\right)\right]_{j=1\sim N},$$

$$B_i=\left[0,\ b_{ij}-a_{ij}+\frac{h}{2}d_{ij},\ -b_{ij}\right]_{j=1\sim N},$$

$$c_i=\left[-b_{ij},\ b_{ij}-a_{ij}-\frac{h}{2}d_{ij},\ 0\right]_{j=1\sim N},$$

$$\hat{u}=(u_{11},u_{12},\cdots,u_{1N},u_{21},\cdots,u_{2N},\cdots\cdots,u_{N1},u_{N2},\cdots,u_{NN})^T,$$

$$\hat{g}=h^2(g_{11},\cdots,g_{1N},g_{21},\cdots,g_{2N},\cdots\cdots,g_{N1},\cdots,g_{NN})^T.$$

我们也可导出 (1) 的另一种形式的差分格式. 仍用中心差商近似 $(u_{xx})_{ij}$，$(u_{yy})_{ij}$，$(u_x)_{ij}$ 和 $(u_y)_{ij}$，而用 x 向前差商 y 向后差商和 x 向后差商 y 向前差商的均值来近似 $(u_{xy})_{ij}$，即

$$(u_{xy})_{ij} \doteq \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}).$$

$$i, j = 1 \sim N$$

代入(1),得到(1)的另一种形式的离散模拟

$$G_2\hat{u} = \hat{g}, \tag{5}$$

其中 G_2 是 N^2 阶块三对角矩阵:

$$G_2 = [F_i, D_i, E_i]_{i=1-N}, \tag{6}$$

$D_i, E_i, F_i, i = 1 \sim N$ 是N阶三对角矩阵.

$$D_i = \left[-\left(b_{ij} + c_{ij} + \frac{h}{2}e_{ij}\right),\ 2\left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + \frac{1}{2}f_{ij}h^2\right),\right.$$

$$\left.-\left(b_{ij} + c_{ij} - \frac{h}{2}e_{ij}\right)\right]_{j=1-N},$$

$$E_i = \left[b_{ij},\ -\left(a_{ij} + b_{ij} - \frac{h}{2}d_{ij}\right),\ 0\right]_{j=1-N},$$

$$F_i = \left[0,\ -\left(a_{ij} + b_{ij} + \frac{h}{2}d_{ij}\right),\ b_{ij}\right]_{j=1-N},$$

$\hat{u}, \hat{g}$ 的意义同(3).

3. 差分方程异步迭代的收敛性

定理 1. i) 若 $\forall(x,y)\in\Omega, b, f \geqslant 0$, $\inf\limits_{x\in\Omega}(c-b) = s > 0$, $\inf\limits_{x\in\Omega}(a-b) = t > 0$, e, d 有界: $|e| \leqslant L, |d| \leqslant k$, 且步长 $0 < h < \min\left(\frac{2s}{L}, \frac{2t}{k}\right)$, G_1 是由(1)推导而得的 N^2 阶方阵(4),则 G_1 为M矩阵。

ii) 若 $\forall(x,y)\in\Omega$, $f \geqslant 0$, $b \leqslant 0$, $\inf\limits_{x\in\Omega}(b+c) = u > 0$, $\inf\limits_{x\in\Omega}(a+b) = v > 0$; e, d 有界: $|e| \leqslant L$, $|d| \leqslant K$, 且步长 $0 < h < \min\left(\frac{2u}{L}, \frac{2v}{K}\right)$, G_2 是由(1)推导而得的 N^2 阶方阵(6),则 G_2 为M矩阵.

证明. i) 由假定, $\forall(x,y)\in\Omega$ 时, $0 \leqslant b < \min(a,c)$, 从而(在矩阵的同一行中, $a \sim f$ 的 (i,j) 下标是一致的)

$$\begin{aligned} 2\left(a_{ij} + c_{ij} - b_{ij} + \frac{1}{2}f_{ij}h^2\right) &\geqslant 2(2\sqrt{a_{ij}c_{ij}} - b_{ij}) + f_{ij}h^2 \\ &\geqslant 2(2\min(a_{ij}, c_{ij}) - b_{ij}) + f_{ij}h^2 \\ &> 2\min(a_{ij}, c_{ij}) + f_{ij}h^2 > 0, \end{aligned}$$

$$b_{ij} - c_{ij} \pm \frac{h}{2}e_{ij} < \frac{-hL}{2} \pm \frac{h}{2}e_{ij} \leqslant -\frac{h}{2}(L \mp e_{ij}) \leqslant 0, \tag{7}$$

$$b_{ij} - a_{ij} \pm \frac{h}{2}d_{ij} < -\frac{hk}{2} \pm \frac{h}{2}d_{ij} \leqslant -\frac{h}{2}(k \mp d_{ij}) \leqslant 0, \tag{8}$$

$$-b_{ij} \leqslant 0, \ i,j = 1 - N.$$

所以 G_1 的对角元为正,非对角元非正. 又 G_1 的每一行元素不外乎形如(可能某些行少掉一些非主对角元)

$$0,\cdots,0,-b_{ij},b_{ij}-a_{ij}-\frac{h}{2}d_{ij},0,\cdots,0,b_{ij}-c_{ij}-\frac{h}{2}e_{ij},$$

$$2\left(a_{ij}+c_{ij}-b_{ij}+\frac{1}{2}f_{ij}h^2\right),\ \left(b_{ij}-c_{ij}+\frac{h}{2}e_{ij}\right),\ 0,\cdots,0,$$

$$b_{ij}-a_{ij}+\frac{h}{2}d_{ij},-b_{ij},0,\cdots,0,$$

其中 $2\left(a_{ij}+c_{ij}-b_{ij}+\frac{1}{2}f_{ij}h^2\right)$ 是 G_1 的主对角元. 由于

$$\begin{aligned}&2\left(a_{ij}+c_{ij}-b_{ij}+\frac{1}{2}f_{ij}h^2\right)+\left(b_{ij}-c_{ij}-\frac{h}{2}e_{ij}\right)+\left(b_{ij}-c_{ij}+\frac{h}{2}e_{ij}\right)\\&\quad+\left(b_{ij}-a_{ij}-\frac{h}{2}d_{ij}\right)+\left(b_{ij}-a_{ij}+\frac{h}{2}d_{ij}\right)-2b_{ij}\\&=f_{ij}h^2\geqslant 0,\ i,j=1-N,\end{aligned}$$

且由(7)、(8)两式知 G_1 的第 1 行元素

$$\begin{aligned}\Sigma&=2\left(a_{11}+c_{11}-b_{11}+\frac{1}{2}f_{11}h^2\right)+\left(b_{11}-c_{11}+\frac{h}{2}e_{11}\right)\\&\quad+\left(b_{11}-a_{11}+\frac{h}{2}d_{11}\right)-b_{11}\\&=\left(\frac{h}{2}e_{11}+c_{11}-b_{11}\right)+\left(\frac{h}{2}d_{11}+a_{11}-b_{11}\right)+b_{11}+f_{11}h^2\end{aligned}$$

满足严格不等式 $\Sigma>0$, 故 G_1 是对角占优的. 不难看出 G_1 也是不可约的(事实上 G_1的非零元的分布不少于 Possion 方程差分矩阵情形(即$a=c\equiv 1, b=d=e=f\equiv 0$, $\forall(x,y)\in\Omega$), 而后者是不可约的[4].), 从而 G_1 为不可约对角占优阵, 即得 G_1 为M矩阵.

ii) 类似于 i) 的证明,当$-\min(a,c)<b\leqslant 0,\forall(x,y)\in\Omega$ 时,因为

$$\begin{aligned}2\left(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}+\frac{1}{2}f_{ij}h^2\right)&\geqslant 2(2\sqrt{a_{ij}c_{ij}}+b_{ij})+f_{ij}h^2\\&\geqslant 2(2\min(a_{ij},c_{ij})+b_{ij})+f_{ij}h^2\\&>2\min(a_{ij},c_{ij})+f_{ij}h^2>0,\end{aligned}$$

$$-\left(b_{ij}+c_{ij}\pm\frac{h}{2}e_{ij}\right)<-\frac{h}{2}L+\frac{h}{2}|e_{ij}|\leqslant 0,$$

$$-\left(a_{ij}+b_{ij}\pm\frac{h}{2}d_{ij}\right)<-\frac{h}{2}k+\frac{h}{2}|d_{ij}|\leqslant 0,$$

$$b_{ij}\leqslant 0,\ i,j=1-N,$$

所以 G_2 的主对角元为正,非主对角元非正. 又 G_2 的每 1 行元素不外乎形如(可能某些

行少掉一些非主对角元)

$$0,\cdots,0,-\left(a_{ij}+b_{ij}+\frac{h}{2}d_{ij}\right),\ b_{ij},0,\cdots,0,-\left(b_{ij}+c_{ij}+\frac{h}{2}e_{ij}\right),$$

$$2\left(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}+\frac{h^2}{2}f_{ij}\right),-\left(b_{ij}+c_{ij}-\frac{h}{2}e_{ij}\right),\ 0,\cdots,0,b_{ij},$$

$$-\left(a_{ij}+b_{ij}-\frac{h}{2}d_{ij}\right),\ 0,\cdots,0,$$

其中 $2\left(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}+\frac{1}{2}f_{ij}h^2\right)$ 是 G_2 的主对角元. 由于

$$\begin{aligned}2&\left(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}+\frac{1}{2}f_{ij}h^2\right)-\left(b_{ij}+c_{ij}-\frac{h}{2}e_{ij}\right)\\&-\left(b_{ij}+c_{ij}+\frac{h}{2}e_{ij}\right)-\left(a_{ij}+b_{ij}+\frac{h}{2}d_{ij}\right)\\&-\left(a_{ij}+b_{ij}-\frac{h}{2}d_{ij}\right)+2b_{ij}\\&=f_{ij}\geqslant 0,\ i,j=1-N,\end{aligned}$$

且 G_2 的第 1 行元素满足严格不等式

$$\begin{aligned}2&\left(a_{11}+b_{11}+c_{11}+\frac{1}{2}f_{11}h^2\right)-\left(b_{11}+c_{11}-\frac{h}{2}e_{11}\right)-\left(a_{11}+b_{11}-\frac{h}{2}d_{11}\right)\\&=\left(a_{11}+b_{11}+\frac{h}{2}d_{11}\right)+\left(c_{11}+b_{11}+\frac{h}{2}e_{11}\right)-2b_{11}+f_{11}h^2\\&>\left(\frac{k}{2}h+\frac{h}{2}d_{11}\right)+\left(\frac{L}{2}h+\frac{h}{2}e_{11}\right)-2b_{11}+f_{11}h^2\\&\geqslant -2b_{11}+f_{11}h^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

故 G_2 满足对角占优条件，且 G_2 与 Possion 方程差分矩阵相比可知，G_2 也是不可约的. 从而 G_2 为不可约对角占优阵，即知 G_2 为 M 矩阵.

推论 1. 当定理 1 的条件 i) 成立时，差分方程(3)有唯一解；当定理 1 的条件 ii) 成立时，差分方程(5)有唯一解.

定理 2. i) 设 G_{1D} 表示 G_1 的对角元组成的矩阵，G_{11},G_{12} 为 G_1-G_{1D} 的任意一个严格分裂；$G_1-G_{1D}=G_{11}+G_{12}$，则在定理 1 的条件 i) 成立时，下列迭代格式

$$\hat{u}^{k+1}=-(G_{1D}+G_{11})^{-1}G_{12}\hat{u}^k+(G_{1D}+G_{11})^{-1}\hat{g}$$

的异步迭代过程(按照 Baudet 的定义[5])收敛于方程组(3)的唯一解.

ii) 设 G_{2D} 表示 G_2 的对角元组成的矩阵，G_{21},G_{22} 为 G_2-G_{2D} 的任意一个严格分裂，$G_2-G_{2D}=G_{21}+G_{22}$，则在定理 1 的条件 ii) 成立时，下列迭代格式

$$\hat{u}^{k+1}=-(G_{2D}+G_{21})^{-1}G_{22}\hat{u}^k+(G_{2D}+G_{21})^{-1}\hat{g}$$

的异步迭代过程(按照 Baudet 的定义[5])收敛于方程组(5)的唯一解.

证明. 根据 M 矩阵的性质[4]，显然 $-(G_{1D}+G_{11})^{-1}G_{12}$ 和 $-(G_{2D}+G_{21})^{-1}G_{22}$ 均为非负矩阵，并且有

$$\rho(-(G_{1D}+G_{11})^{-1}G_{12})<1,\quad \rho(-(G_{2D}+G_{21})^{-1}G_{22})<1.$$

再由 G. M. Baudet 的异步迭代收敛定理即知定理 2 成立.

4. 差分格式的收敛性

定理 3. 若(1)的解 u 充分光滑,并且定理 1 的条件 (i) 满足, 则差分方程(3)的解 u_h 收敛到(1)的解,收敛阶为 $O(h^2)$.

证明. 由于 u 充分光滑,由二元 Taylor 展式可知,其差分算子

$$\begin{aligned}
L_h(u) = & -b_{ij}(u_{i-1,j-1}+u_{i+1,j+1})+(b_{ij}-a_{ij})(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}) \\
& +\frac{h}{2}d_{ij}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})+(b_{ij}-c_{ij})(u_{i,j-1}+u_{i,j+1}) \\
& +\frac{h}{2}e_{ij}(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})+2\left(a_{ij}+c_{ij}-b_{ij}+\frac{1}{2}f_{ij}h^2\right)u_{ij} \\
= & -b_{ij}\left(2u_{ij}+h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij}+O(h^4)\right) \\
& +(b_{ij}-a_{ij})\left(2u_{ij}+h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij}+O(h^4)\right) \\
& +\frac{h}{2}d_{ij}\left(2h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij}+\frac{h^3}{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{ij}+O(h^4)\right) \\
& +(b_{ij}-c_{ij})\left(2u_{ij}+h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij}+O(h^4)\right) \\
& +\frac{h}{2}e_{ij}\left(2h\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij}+\frac{h^3}{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{ij}+O(h^4)\right) \\
& +2\left(a_{ij}+c_{ij}-b_{ij}+\frac{1}{2}f_{ij}h^2\right)u_{ij} \\
= & \, h^2\left(-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu\right)_{ij}+O(h^4).
\end{aligned}$$

偏差

$$\begin{aligned}
\|R_h(u)\| &= \left\|\frac{L_h(u)}{h^2}-\left(-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu\right)_{ij}\right\| \\
&= O(h^2)\to 0,\ \text{当 } h\to 0 \text{ 时},
\end{aligned}$$

故满足相容性条件. 又由 G_1 的非奇异性可知,若对右端有一小扰动,则

$$G_1\hat{u}_1=\hat{g}_1,\qquad G_2\hat{u}_2=\hat{g}_2,$$
$$G_1(\hat{u}_1-\hat{u}_2)=\hat{g}_1-\hat{g}_2,\qquad \|\hat{u}_1-\hat{u}_2\|\leqslant\|G_1^{-1}\|\|\hat{g}_1-\hat{g}_2\|,$$

即差分方程(3)关于右端稳定. 从而(3)的解收敛到(1)的解, 且有 $O(h^2)$ 的收敛阶.

完全类似地可证明:

定理 4. 若(1)的解 u 充分光滑，并且满足定理 1 的条件 ii)，则差分方程 (5) 的解 u_k 收敛到(1)的解，其收敛阶为 $O(h^2)$.

5. 数值例子

我们采用混乱松弛迭代格式[5](用一对随机整数作循环控制变元) 在 NEC PC-9801 DS 上计算了一些例子，结果表明了算法的正确性与可行性. 这里所谓的混乱迭代过程是由若干次迭代组成，每一次迭代随机地依次(在多 CPU 上可同时独立计算)修正若干个(本算法取 N^2 个) u_{ij} 的分量，其中将整体变量作为 $u_{ij}, i, j = 1 - N$.

考虑椭圆型偏微分方程

$$-(au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}) + du_x + eu_y + fu = g(x,y)$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0,\ \Omega: 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,$$

其中 $a = xy + 1$, $b = \sin xy$, $c = xy + 1$, $d = -10y$, $e = 10x$, $f = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$, $g = -4xy$.

容易验证，上述二阶线性椭圆型方程的各项系数函数满足定理 1 的条件 i):

$$b = \sin xy \geqslant 0,\ f = \frac{4}{x^2 + y^2} \geqslant 0,$$
$$a - b = c - b = xy - \sin xy + 1 \geqslant 1, s = t = 1,$$
$$|e| \leqslant 10,\ |d| \leqslant 10,\ L = k = 10,$$

并且其准确解为 $u = x^2 + y^2$.

在区域$(0,1)\times(0,1)$上取 $N = 99$, $h = 0.01$，最大控制误差 $E < 0.0001$. 由(3)式，我们对如下迭代格式

$$\begin{aligned} u_{ij}^{k+1} = \frac{1}{2}\Big[& h^2 g_{ij} + b_{ij} u_{i-1,j-1}^k - \left(b_{ij} - a_{ij} - \frac{h}{2} d_{ij}\right) u_{i-1,j}^k \\ & - \left(b_{ij} - c_{ij} - \frac{h}{2} e_{ij}\right) u_{i,j-1}^k - \left(b_{ij} - c_{ij} + \frac{h}{2} e_{ij}\right) u_{i,j+1}^k \\ & - \left(b_{ij} - a_{ij} + \frac{h}{2} d_{ij}\right) u_{i+1,j}^k + b_{ij} u_{i+1,j+1}^k \Big] \end{aligned}$$

用混乱松弛法计算[5](在每一步中生成 1 对随机整数作为迭代变量 u_{ij} 的下标 (i,j))，其计算结果收敛于问题的准确解. 若有 3 台处理机同时计算，计算时间与串行计算相比可减少一半左右.

参　考　文　献

[1] 康立山，并行算法与区域分裂法，武汉大学出版社，1987.
[2] 吕　涛，二阶椭圆偏微分方程的一种区域分解并行算法，第一届全国并行算法研讨会论文，北京，1987.
[3] 李　磊，线性椭圆型方程的一个稳定差分格式，计算数学，**10**: 4(1988)，375—380.
[4] J. M. 奥特加，W. C. 莱茵博尔特，多元非线性方程组迭代解法，科学出版社，1983，pp. 13—16.
[5] G. M. Baudet, Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessors, J. ACM, Vol. 25, No. 2 (1978), 226—244.
[6] R. S. 瓦格香，矩阵迭代分析，上海科技出版社，1966 年，52—87.