

实对称矩阵最大特征值极小化问题的 一个 BT 型 ε -次梯度算法^{*1)}

叶 东 毅

(福州大学计算机科学系)

A BT TYPE ε -SUBGRADIENT ALGORITHM FOR MINIMIZING THE GREATEST EIGENVALUE OF A REAL SYMMETRIC MATRIX

Ye Dongyi

(Department of Computer Science, Fuzhou University)

Abstract

We present in this paper a BT-type ε -subgradient algorithm for minimizing the greatest eigenvalue of a real parametrized symmetric matrix. The convergence of the proposed algorithm is proved. Finally, numerical examples are given to illustrate the algorithm.

一、引 言

考虑依赖于参数向量 $x \in \mathbb{R}^m$ 的实对称矩阵

$$A(x) = \sum_{j=1}^m A_j x_j + B, \quad x = (x_1, \dots, x_m)^T,$$

其中 $A_j (j=1, \dots, m)$ 和 B 均为 $n \times n$ 实对称矩阵, 它们不依赖于 x . 记 $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geq \dots \geq \lambda_n(x)$ 为 $A(x)$ 的 n 个依大小顺序排列的特征值, 记

$$\rho(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(x)| = \max\{\lambda_1(x), -\lambda_n(x)\}$$

为绝对值最大的特征值. 在许多应用领域中会遇到极小化最大特征值问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \lambda_1(x) \tag{1a}$$

或者绝对值最大特征值的极小化问题

* 1995年5月2日收到.

1) 国家教委留学回国人员科研资助项目.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \rho(x). \quad (1b)$$

一般来说, 当 $A(x)$ 有重的最大或绝对值最大的特征值时, 函数 λ_1 或 ρ 是 x 的不可微凸函数. 因此问题(1a)(1b)通常是非光滑的凸规划问题. 对于这类特征值优化问题, 已提出了一些算法^[1~4], 其中[4]的利用序列二次规划思想的算法是比较有效的一个. 但不足的是理论上无法保证该算法的收敛性^[4], 另外每次迭代的计算量也比较大. BT法^[5]是目前用于求解凸规划问题的一个比较有效和可行的次梯度算法, 因此可以用来求解特征值优化问题. 为了在BT法中避免使用精确的次梯度从而节省计算量, 本文针对问题(1a)和(1b), 首先推导了 $\lambda_1(x)$ 和 $\rho(x)$ 的 ε -次梯度的一个比较简便的计算公式, 然后给出一个基于BT法的 ε -次梯度算法并证明了该算法的全局收敛性. 另外还给出利用重置策略来节省存储量的改进算法以及几个数值算例的结果.

二、 $\lambda_1(x)$ 和 $\rho(x)$ 的 ε -次梯度计算

首先, 回顾一下凸函数的 ε -次梯度的定义.

定义^[6]. 设 f 是 \mathbb{R}^m 上的连续凸函数, f 在 x 处的 ε -次梯度 $\partial_\varepsilon f(x)$ 为 ($\varepsilon \geq 0$)

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{g \in \mathbb{R}^m: f(z) \geq f(x) + g^T(z-x) - \varepsilon, \forall z \in \mathbb{R}^m\}.$$

作者在[7]中给出 $\partial_\varepsilon \lambda_1(x)$ 的一个表达式

$$\partial_\varepsilon \lambda_1(x) = \{D^*Y: \lambda_1(x) - \text{tr}(YB) \leq x^T D^*Y + \varepsilon, Y \in \text{co}\{yy^T, \|y\| = 1\}\},$$

其中 $D^*Y = \sum_{j=1}^m \text{tr}(YA_j)e_j$, tr 表示迹, e_j 为第 j 个分量为 1 其余分量为零的 \mathbb{R}^m 中的单位向量, $y \in \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ 表示 \mathbb{R}^n 中的欧氏范数, co 为凸包运算.

直接利用上式来计算 $\partial_\varepsilon \lambda_1(x)$ 是比较困难的. 在实际应用中只要计算 $\partial_\varepsilon \lambda_1(x)$ 的一个元素或一个子集就可以了. 为此, 记

$$G_\varepsilon(x) = \text{co}\{D^*yy^T: \lambda_1(x) - \text{tr}(yy^TB) \leq x^T D^*yy^T + \varepsilon, \|y\| = 1\}.$$

容易看出 $G_\varepsilon(x) \subseteq \partial_\varepsilon \lambda_1(x)$. 由于

$$\text{tr}(yy^TB) = \text{tr}(y^TB y) = y^T B y,$$

$$D^*yy^T = \sum_{j=1}^m \text{tr}(yy^T A_j) e_j = \sum_{j=1}^m (y^T A_j y) e_j,$$

故有

$$\begin{aligned} x^T D^*yy^T + y^T B y &= \sum_{j=1}^m (y^T A_j x_j y) + y^T B y \\ &= y^T \left(\sum_{j=1}^m A_j x_j \right) y + y^T B y = y^T A(x) y, \end{aligned}$$

因此

$$G_\varepsilon(x) = \text{co}\{(y^T A_1 y, \dots, y^T A_m y)^T \in \mathbb{R}^m: \lambda_1(x) \leq y^T A y + \varepsilon, \|y\| = 1\}. \quad (2)$$

根据 Rayleigh 商原理

$$\lambda_1(x) = \max_{\|y\|=1} y^T A(x) y,$$

可以看出, 当计算精确的次梯度中的一个元素时(对应于 $\varepsilon=0$), 需要计算满足 $\lambda_1(x) = y^T A(x) y$ 的一个单位向量 y , 这等价求对应 $\lambda_1(x)$ 的一个特征向量. 而计算 $\partial_\varepsilon \lambda_1(x)$ ($\varepsilon>0$) 中的一个元素时, 只需计算对应 $\lambda_1(x)$ 的一个近似的特征向量或任一满足条件 $\lambda_1(x) \leq y^T A(x) y + \varepsilon$ 的单位向量.

注意到 $-\lambda_n(x)$ 是矩阵 $-A(x)$ 的最大特征值, 于是有

$$\partial_\varepsilon(-\lambda_n(x)) = \{-D^*Y: x^T D^*Y + \text{tr}(YB) \leq \lambda_n(x) + \varepsilon, Y \in \text{co}\{yy^T: \|y\|=1\}\}.$$

类似地, 记

$$P_\varepsilon(x) = \text{co}\{-D^*yy^T: x^T D^*yy^T + \text{tr}(yy^T B) \leq \lambda_n(x) + \varepsilon, \|y\|=1\},$$

则知 $P_\varepsilon(x) \subseteq \partial_\varepsilon(-\lambda_n(x))$, 且

$$P_\varepsilon(x) = \text{co}\{(-y^T A_m y, \dots, -y^T A_m y)^T: \lambda_n(x) + \varepsilon \geq y^T A(x) y, \|y\|=1\}. \quad (3)$$

由于 $\rho(x) = \max(\lambda_1(x), -\lambda_n(x))$, 故可得^[6]

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \rho(x) = \{ & \partial_{\varepsilon_1}(\alpha_1 \lambda_1(x)) + \partial_{\varepsilon_2}(-\alpha_2 \lambda_n(x)): \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \\ & \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \rho(x) - (\alpha_1 \lambda_1(x) - \alpha_2 \lambda_n(x)) = \varepsilon \}. \end{aligned} \quad (4)$$

因此, 在计算 $\partial_\varepsilon \rho(x)$ 的一个元素时, 应分3种情形. 若在 x 处, $\lambda_1(x) > -\lambda_n(x)$, 即 $\rho(x) = \lambda_1(x)$, 则在(4)中取 $\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$. 可知 $\partial_\varepsilon \lambda_1(x) \subseteq \partial_\varepsilon \rho(x)$, 因此可按(2)式来计算 $\partial_\varepsilon \rho(x)$ 中的一个元素; 若 $\lambda_1(x) < -\lambda_n(x)$, 即 $\rho(x) = -\lambda_n(x)$, 则 $\partial_\varepsilon(-\lambda_n(x)) \subseteq \partial_\varepsilon \rho(x)$, 故可按(3)式计算 $\partial_\varepsilon \rho(x)$ 中的一个元素. 若在 x 处, $\lambda_1(x) = -\lambda_n(x)$, 则取 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, 可以看到¹⁾

$$\frac{1}{2} [\partial_\varepsilon(\lambda_1(x)) + \partial_\varepsilon(-\lambda_n(x))] \subseteq \partial_\varepsilon \rho(x). \quad (5)$$

故若取 $g_1 \in G_\varepsilon(x), p_1 \in P_\varepsilon(x)$, 则

$$\frac{1}{2} (p_1 + g_1) \in \partial_\varepsilon \rho(x).$$

记 $S = \{D^*Y: Y \in \text{co}\{yy^T: \|y\|=1\}\}$.

易见 S 是 \mathbb{R}^m 中的有界集, 且对 $\forall \varepsilon \geq 0$ 和 $\forall x \in \mathbb{R}^m$ 有

$$\partial_\varepsilon \lambda_1(x) \subseteq S, \partial_\varepsilon(-\lambda_n(x)) \subseteq -S. \quad (6)$$

由(4)可知(参见1))

$$\partial_\varepsilon \rho(x) \subseteq \{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2: \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1, g_1 \in S, g_2 \in -S\}. \quad (7)$$

因此, 对任意 $\varepsilon \geq 0$ 及 $x \in \mathbb{R}^m$, 存在一常数 $M > 0$ 使得对 $\forall g \in \partial_\varepsilon \lambda_1(x) \cup \partial_\varepsilon(-\lambda_n(x)) \cup \partial_\varepsilon \rho(x)$, 均有

$$\|g\| \leq M. \quad (8)$$

三、BT 型 ε -次梯度法

首先简要地介绍一下 Zowe^[5] 提出的 BT 算法的基本思想.

1) 若 $f(x)$ 是凸函数, $\alpha > 0$, 则有 $\partial_\varepsilon(\alpha f(x)) = \alpha \partial_{\frac{\varepsilon}{\alpha}} f(x)$.

假定在算法的第 k 次迭代时, 有 $x_k \in \mathbb{R}^m$ 和一个次梯度向量 $g_k \in \partial f(x_k)$, 这里 f 为待极小化的凸函数. 为了得到 $f(x_k+d) - f(x_k)$ 的一个比较好的近似模型, BT 算法借助 Lemaréchal 的 Bundle 法思想, 不单纯利用当前点的次梯度 g_k , 还利用前 $k-1$ 次迭代点的次梯度向量 $g_i \in \partial f(x_i) (i=1, \dots, k-1)$ 来构造如下的分段线性函数:

$$f_{cp}(x_k; d) = \max_{1 \leq i \leq k} \{f(x_i) + g_i^T(x_k + d - x_i)\} - f(x_k).$$

记 $\alpha_i = f(x_k) - [f(x_i) + g_i^T(x_k - x_i)] \geq 0, i=1, \dots, k$, 则 $f_{cp}(x_k; d)$ 可以写成

$$f_{cp}(x_k; d) = \max_{1 \leq i \leq k} \{g_i^T d - \alpha_i\}.$$

在 BT 算法中, 搜索方向 d_k 为下述优化问题的解:

$$\begin{cases} \min f_{cp}(x_k; d), \\ \text{s.t. } \frac{1}{2} \|d\| \leq h. \end{cases} \quad (9)$$

问题(9)可以化为一等价的二次规划问题或者其对偶二次规划来求解.

我们讨论一下 BT 算法同 ε -次梯度的关系.

由于 $g_i \in \partial f(x_i), i=1, \dots, k$, 故对任意 $z \in \mathbb{R}^m$, 有

$$f(z) \geq f(x_i) + g_i^T(z - x_i) = f(x_k) + g_i^T(z - x_k) - \alpha_i,$$

所以 $g_i \in \partial_{\alpha_i} f(x_k)$.

因此, 近似模型 $f_{cp}(x_k; d)$ 实际上是基于 k 个 x_k 处的取不同 ε 值的 f 的 ε -次梯度向量构成的. 根据 Hiriart-Urruty 的表示定理^[8]

$$f(x+d) - f(x) = \max_{\varepsilon \geq 0} (\max_{g \in \partial_{\varepsilon} f(x)} g^T d - \varepsilon), \quad (10)$$

可以看出 $f_{cp}(x_k; d)$ 等价于用 $\partial_{\alpha_i} f(x_k)$ 的元素 g_i 来近似公式(10)的右端项而得到的模型. 因此 BT 算法可以看成是一种 ε -次梯度法, 只是在每个当前点处要计算精确的次梯度而不是某一 ε -次梯度.

在应用 BT 算法时, 为了避免计算精确的次梯度, 节省计算量, 根据上述讨论及(10)式, 我们可用 ε -次梯度来代替精确的次梯度. 通过适当地选取 ε -次梯度, 可以保证算法产生的点列收敛于原问题的一个最优解(如果存在最优解的话). 在下一节中将证明这点. 现给出 BT 型 ε -次梯度法的主要计算过程. 为统一起见, 记 $\varphi(x)$ 为问题(1a)和(1b)的目标函数. 因此, 根据不同情形, $\partial_{\varepsilon} \varphi(x)$ 可按 $\partial_{\varepsilon} \lambda_1(x)$ 或 $\partial_{\varepsilon} \rho(x)$ 的计算方法给出.

步 1°. 给定初始点 $x_1 \in \mathbb{R}^m$, t -参数上下限 $+\infty > \bar{t} > \underline{t} > 0$, 初始 $\varepsilon_1 \geq 0$, 初始 t -参数 $t_1^0 \in [\underline{t}, \bar{t}]$, 参数 $0 < m_1 < 1, 0 < h < 0.01(\bar{t} - \underline{t})$, 置 $y_1 = x_1, k=1$.

步 2°. 假定在第 k 次迭代时有点 x_k , 初始 t -参数 $t_k^0 \in [\underline{t}, \bar{t}]$, 辅助点 $y_j, \varepsilon_j \geq 0$ 以及 ε_j -次梯度向量 $g_j \in \partial_{\varepsilon_j} \varphi(y_j)$, 其中 $j \in J_k = \{1, 2, \dots, k\}$. 计算

$$\beta_j^k = \varphi(x_k) - [\varphi(y_j) + g_j^T(x_k - y_j)], j \in J_k, \quad (11)$$

易知 $\beta_j^k \geq -\varepsilon_j$, 也即 $\beta_j^k + \varepsilon_j \geq 0$. 置 $l=0$.

步 3°. 求解如下的对应于 (t_k^l, J_k) 的二次规划

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} t_k' \left\| \sum_{j \in J_k} \mu_j g_j \right\|^2 + \sum_{j \in J_k} \mu_j (\beta_j^k + \varepsilon_j), \\ \text{s.t. } \sum_{j \in J_k} \mu_j = 1, \mu_j \geq 0, j \in J_k. \end{cases} \quad (12)$$

记其解为 $\mu_k^i = (\mu_{i1}^k, \dots, \mu_{ik}^k)^T$, 计算

$$d_k^i = -p_k^i = -t_k' \sum_{j \in J_k} \mu_{ij}^k g_j,$$

$$\eta_k^i = \sum_{j \in J_k} \mu_{ij}^k (\beta_j^k + \varepsilon_j) \geq 0,$$

$$w_k^i = \frac{1}{2t_k'} \|p_k^i\|^2 + \eta_k^i,$$

$$v_k^i = -\left(\frac{\|p_k^i\|^2}{t_k'} + \eta_k^i \right).$$

如果 $w_k^i = 0$ (也即 $v_k^i = 0$), 则停止算法, x_k 即为极小解; 否则 $w_k^i > 0$ (也即 $v_k^i < 0$), 令 $y_k^i = x_k + d_k^i$, 并对 y_k^i 做如下判别:

(i) 如果 $\varphi(y_k^i) - \varphi(x_k) \leq m_1 v_k^i$, 则令

$$x_{k+1} = y_k^i, y_{k+1} = y_k^i, \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k,$$

并称 x_{k+1} 为严格步所得. 置 $k = k+1$, 转步 2°.

(ii) 如果 $\varphi(y_k^i) - \varphi(x_k) > m_1 v_k^i$, 而且 $\underline{t} \leq t_k' \leq \underline{t} + h$, 则令 $x_{k+1} = x_k$, $y_{k+1} = y_k^i$, $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{2} (1 - m_1) w_k^i$, 并称 x_{k+1} 为空步所得. 置 $k = k+1$, 转步 2°.

(iii) 如果 $\varphi(y_k^i) - \varphi(x_k) > m_1 v_k^i$, 而且 $t_k' > \underline{t} + h$, 则令 $t_k^{i+1} = \frac{1}{2} (t_k' + \underline{t})$, 并置 $k = l+1$, 转步 3°. 该步骤称为内循环. 容易看出经有限次内循环后即可定出 x_{k+1} .

以上主要描述的是 BT 型 ε - 次梯度法由 x_k 出发计算 x_{k+1} 的过程. 下面做几点补充说明.

1. 对 $k > 1$ 时, 初始 t - 参数 t_k^0 取作 $t_k^0 = \min\{\bar{t}, (1 + \delta) t_{k-1}^i\}$, 其中 t_{k-1}^i 为第 $k-1$ 次迭代结束时的 t - 参数值, 而且若 x_k 是严格步所得, 取 $\delta = \frac{1}{2}$, 否则取 $\delta = 0$.

2. 一般地, 记 $t_k = t_k^i$ 为第 k 次迭代结束时的 t - 参数值, $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_k^k)^T$ 为相应于 (t_k, J_k) 的二次规划问题 (12) 的解. 又记

$$d_k = -p_k = -t_k \sum_{j \in J_k} \mu_j^k g_j,$$

$$\eta_k = \sum_{j \in J_k} \mu_j^k (\beta_j^k + \varepsilon_j) \geq 0,$$

$$w_k = \frac{1}{2t_k} \|p_k\|^2 + \eta_k,$$

$$v_k = -\left(\frac{1}{t_k} \|p_k\|^2 + \eta_k \right),$$

则由算法构造可知 $y_{k+1} = x_k + d_k$, 而且要么 $\varphi(y_{k+1}) - \varphi(x_k) \leq m_1 v_k$, 则 $x_{k+1} = y_{k+1} = x_k + d_k$ (严

格步); 要么 $\varphi(y_{k+1}) - \varphi(x_k) > m_1 v_k$ 且 $t \leq t_k \leq t+h$, 则 $x_{k+1} = x_k$ (空步). 因此, 无论哪种情况, 皆有 $\varphi(x_k) \geq \varphi(x_{k+1})$, 即 $\{\varphi(x_k)\}$ 为单调不升数列.

3. 对 $j \in J_k$, β_j^{k+1} 与 β_j^k 有如下的关系:

$$\begin{aligned} \beta_j^{k+1} &= \varphi(x_{k+1}) - \varphi(y_j) - g_j^T(x_{k+1} - y_j) \\ &= \varphi(x_k) - \varphi(y_j) - g_j^T(x_k - y_j) + \varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) - g_j^T(x_{k+1} - x_k) \\ &= \beta_j^k + \varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) - g_j^T(x_{k+1} - x_k), \end{aligned} \quad (13)$$

而 $\beta_{k+1}^{k+1} = \varphi(x_{k+1}) - \varphi(y_{k+1}) - g_{k+1}^T(x_{k+1} - y_{k+1})$. 因此, 如果 x_{k+1} 为空步所得, 则 $\beta_j^{k+1} = \beta_j^k$, $j \in J_k$.

四、收敛性分析

记 $\{x_k\}$ 为上述 BT 型 ε - 次梯度法产生的点列, 如果算法经有限次迭代后停止, 则有:

引理 1. 假设存在 $\bar{k} \geq 1$ 使得 $v_{\bar{k}} = 0$, 则 $x_{\bar{k}}$ 为函数 φ 的极小点.

证明. 由假设 $0 = v_{\bar{k}} = -\left(\frac{1}{t_{\bar{k}}} \|p_{\bar{k}}\|^2 + \eta_{\bar{k}}\right)$ 可得

$$\sum_{j \in J_{\bar{k}}} \mu_j^{\bar{k}} g_j = 0 \text{ 和 } \sum_{j \in J_{\bar{k}}} \mu_j^{\bar{k}} (\beta_j^{\bar{k}} + \varepsilon_j) = 0. \quad (14)$$

因 $g_j \in \partial_{\varepsilon_j} \varphi(y_j)$, 故对 $\forall y \in \mathbb{R}^m$ 有

$$g_j^T(y - y_j) \leq \varphi(y) - \varphi(y_j) + \varepsilon_j, \quad j \in J_{\bar{k}}. \quad (15)$$

又由 $\beta_j^{\bar{k}}$ 的定义, 有

$$g_j^T(y_j - x_{\bar{k}}) = \varphi(y_j) - \varphi(x_{\bar{k}}) + \beta_j^{\bar{k}}, \quad j \in J_{\bar{k}}. \quad (16)$$

将 (15)(16) 两式相加得

$$g_j^T(y - x_{\bar{k}}) \leq \varphi(y) - \varphi(x_{\bar{k}}) + \beta_j^{\bar{k}} + \varepsilon_j, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m,$$

因此 $\left(\sum_{j \in J_{\bar{k}}} \mu_j^{\bar{k}} g_j\right)^T (y - x_{\bar{k}}) \leq \varphi(y) - \varphi(x_{\bar{k}}) + \sum_{j \in J_{\bar{k}}} \mu_j^{\bar{k}} (\beta_j^{\bar{k}} + \varepsilon_j)$. 由 (14) 式即知 $0 \leq \varphi(y) - \varphi(x_{\bar{k}})$,

故 $x_{\bar{k}}$ 是函数 φ 的极小点. 证毕.

不失一般性, 以下均假设 $\{x_k\}$ 是无穷点列, 首先假设函数 φ 在 \mathbb{R}^m 上下有界, 也即 $\inf_{x \in \mathbb{R}^m} \varphi(x) > -\infty$. 我们要证明 $\{x_k\}$ 的任一个聚点是 φ 的极小点.

引理 2. 如果点列 $\{x_k\}$ 中有无穷多个点是由严格步得到的, 不妨设是 $\{x_{k_l+1}\}$, 则

$$\lim_{l \rightarrow \infty} v_{k_l} = 0. \quad (17)$$

证明. 假设 (17) 式不成立, 则存在某个 $\bar{v} < 0$ 以及 $\{v_{k_l}\}$ 的一个子列 (不失一般性就取 $\{v_{k_l}\}$ 本身) 使得 $v_{k_l} \leq \bar{v}$ 对一切 $l \geq 1$ 均成立. 由严格步的定义知 $\varphi(x_{k_l+1}) - \varphi(x_{k_l}) \leq m_1 v_{k_l} \leq m_1 \bar{v}$, $\forall l \geq 1$. 因为 $\{\varphi(x_k)\}$ 是单调不增的, 故 $\varphi(x_{k_{l+1}}) \leq \varphi(x_{k_l+1})$. 因此有 $\varphi(x_{k_{l+1}}) - \varphi(x_{k_l}) \leq m_1 \bar{v}$, $\forall l \geq 1$. 由此可推得 $\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(x_{k_l}) = -\infty$, 这与 $\inf_{x \in \mathbb{R}^m} \varphi(x) > -\infty$ 矛盾. 证毕.

引理 3. 如果 $\{x_k\}$ 中只有有限个点是由严格步得到的, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0. \quad (18)$$

证明. 由假设可知存在正整数 \bar{k} 使得当 $k \geq \bar{k}$ 时 x_k 均为空步所得, 因此当 $k \geq \bar{k}$ 时有 $x_k = x_{\bar{k}}$. 更具体些, 对 $k \geq \bar{k}$, 我们有 (参见算法补充说明 2.)

$$x_{k+1} = x_k, \quad y_{k+1} = x_k + d_k, \quad (19)$$

$$d_k = -p_k = -t_k \sum_{j \in J_k} \mu_j^k g_j, \quad (20)$$

$$\eta_k = \sum_{j \in J_k} \mu_j^k (\beta_j^k + \varepsilon_j), \quad (21)$$

$$v_k = -\left(\frac{1}{t_k} \|p_k\|^2 + \eta_k\right), \quad w_k = \frac{1}{2t_k} \|p_k\|^2 + \eta_k. \quad (22)$$

另外有 $\underline{t} \leq t_k \leq \underline{t} + h$. 由算法构造还可知 $t_{k+1} = t_{k+1}^0 = t_k$.

下面推导 w_{k+1} 与 w_k 之间的关系. 令

$$Q_{k+1}(\mu) = \frac{1}{2} t_{k+1} \left\| \sum_{j \in J_{k+1}} \mu_j g_j \right\|^2 + \sum_{j \in J_{k+1}} \mu_j (\beta_j^{k+1} + \varepsilon_j). \quad (23)$$

由于 $x_{k+1} = x_k$, 故由 (13) 知

$$\beta_j^{k+1} = \beta_j^k, \quad j \in J_k, \quad (24)$$

因此 (注意到 $t_{k+1} = t_k$)

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= \min_{\sum_{j \in J_{k+1}} \mu_j = 1, \mu_j \geq 0, j \in J_{k+1}} \{Q_{k+1}(\mu)\} \\ &\leq \min \left\{ \frac{1}{2} t_k \left\| \sum_{j \in J_k} \mu_j g_j \right\|^2 + \sum_{j \in J_k} \mu_j (\beta_j^k + \varepsilon_j); \sum_{j \in J_k} \mu_j = 1, \mu_j \geq 0, j \in J_k \right\} \\ &= w_k, \end{aligned}$$

即有 $0 < w_{k+1} \leq w_k \leq \dots \leq w_{\bar{k}} = \bar{w}$. 由 (22) 即知

$$\|p_k\| \leq (2t_k \bar{w})^{\frac{1}{2}} \quad \text{和} \quad \eta_k \leq \bar{w}. \quad (25)$$

下面我们进一步说明 w_{k+1} 与 w_k 之间的关系. 为此, 对 $\tau \in [0, 1]$, 令

$$\bar{\mu}_{k+1} = \tau \geq 0, \quad \bar{\mu}_j = (1 - \tau) \mu_j^k \geq 0, \quad j \in J_k,$$

则有 $\sum_{j \in J_{k+1}} \bar{\mu}_j = \tau + (1 - \tau) \sum_{j \in J_k} \mu_j^k = 1$. 因此, 如果令

$$Q(\tau) = \frac{1}{2} t_{k+1} \left\| \sum_{j \in J_{k+1}} \bar{\mu}_j g_j \right\|^2 + \sum_{j \in J_{k+1}} \bar{\mu}_j (\beta_j^{k+1} + \varepsilon_j),$$

则有 $w_{k+1} \leq \min\{Q(\tau); \tau \in [0, 1]\}$. 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_{k+1}} \bar{\mu}_j g_j &= \sum_{j \in J_k} (1 - \tau) \mu_j^k g_j + \tau g_{k+1} = (1 - \tau) \frac{p_k}{t_k} + \tau g_{k+1}, \\ \sum_{j \in J_{k+1}} \bar{\mu}_j (\beta_j^{k+1} + \varepsilon_j) &= (1 - \tau) \sum_{j \in J_k} \mu_j^k (\beta_j^k + \varepsilon_j) + \tau (\beta_{k+1}^{k+1} + \varepsilon_{k+1}) \\ &= (1 - \tau) \eta_k + \tau (\beta_{k+1}^{k+1} + \varepsilon_{k+1}), \end{aligned}$$

因此 $Q(\tau)$ 可进一步写成

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= \frac{1}{2} t_k \left\| (1-\tau) \frac{p_k}{t_k} + \tau g_{k+1} \right\|^2 + (1-\tau) \eta_k + \tau (\beta_{k+1}^{k+1} + \varepsilon_{k+1}) \\ &= \frac{1}{2t_k} \|p_k\|^2 + \frac{1}{2} t_k \tau^2 \|g_{k+1} - \frac{p_k}{t_k}\|^2 + \tau \left(p_k^T g_{k+1} - \frac{\|p_k\|^2}{t_k} \right) + (1-\tau) \eta_k + \tau (\beta_{k+1}^{k+1} + \varepsilon_{k+1}) \\ &= \frac{1}{2} t_k \tau^2 \|g_{k+1} - \frac{p_k}{t_k}\|^2 + \tau \left(p_k^T g_{k+1} - \frac{\|p_k\|^2}{t_k} \right) - \tau \eta_k + \tau (\beta_{k+1}^{k+1} + \varepsilon_{k+1}) + w_k \end{aligned} \quad (26)$$

因为 x_{k+1} 是空步所得, 故

$$\varphi(y_{k+1}) - \varphi(x_{k+1}) = \varphi(y_{k+1}) - \varphi(x_k) \geq m_1 v_k$$

由 β_{k+1}^{k+1} 的定义即得 (注意到 $y_{k+1} = x_k - p_k = x_{k+1} - p_k$) $-\beta_{k+1}^{k+1} - g_{k+1}^T p_k = \varphi(y_{k+1}) - \varphi(x_k) \geq -m_1 \left(\frac{\|p_k\|^2}{t_k} + \eta_k \right)$, 亦即 $p_k^T g_{k+1} \leq m_1 \left(\frac{\|p_k\|^2}{t_k} + \eta_k \right) - \beta_{k+1}^{k+1}$. 代入(26)式得 $Q(\tau) \leq \frac{1}{2} t_k \tau^2 \|g_{k+1} - \frac{p_k}{t_k}\|^2 - \tau(1-m_1) \left(\frac{\|p_k\|^2}{t_k} + \eta_k \right) + \tau \varepsilon_{k+1} + w_k$. 因为 $\frac{\|p_k\|^2}{t_k} + \eta_k \geq w_k$, 另外, $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{2} (1-m_1) w_k$, 因此

$$Q(\tau) \leq \frac{1}{2} t_k \tau^2 \|g_{k+1} - \frac{p_k}{t_k}\|^2 - \frac{1}{2} \tau(1-m_1) w_k + w_k \quad (27)$$

由(8)和(25)式并注意到 $\underline{t} \leq t_k \leq \bar{t}$, 可以知道存在一与 k 无关的常数 $c \in [1, +\infty)$, 使得

$$\frac{\|p_k\|}{t_k} \leq c, \quad \eta_k \leq \underline{t} c, \quad \text{以及} \quad \|g_{k+1}\| \leq c.$$

于是, 由(27)式可得

$$Q(\tau) \leq 2t_k \tau^2 c^2 - \frac{1}{2} \tau(1-m_1) w_k + w_k = q(\tau).$$

容易验证 $q(\tau)$ 的极小点为 $\tau_k = \frac{(1-m_1)w_k}{8t_k c^2} \leq \frac{\frac{t_k}{2} c^2 + \underline{t} c}{8t_k c^2} \leq \frac{2t_k c^2}{8t_k c^2} \leq \frac{1}{4}$. 即 $\tau_k \in [0, 1]$,

因此,

$$w_{k+1} \leq \min\{q(\tau): \tau \in [0, 1]\} = q(\tau_k) = w_k - \frac{(1-m_1)^2}{32t_k c^2} (w_k)^2.$$

因为 $t_k \in [\underline{t}, \bar{t}]$, 故最终得

$$0 < w_{k+1} \leq w_k - \frac{(1-m_1)^2}{32\underline{t} c^2} (w_k)^2, \quad (28)$$

因此可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$. 由(22)式即知 $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$. 证毕.

由引理 2 和 3 可以得到下面的结果:

定理 1. $\{x_k\}$ 的任一个聚点是函数 φ 的极小点.

证明. 不失一般性, 假设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$, 因此由引理 2 和 3 可知存在 $\{v_k\}$ 的一个子列

$\{v_k\}$ 满足

$$\lim_{l \rightarrow \infty} v_{k_l} = 0.$$

由(22)式并利用 $t_k \geq \underline{t} > 0$, 有

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_{k_l}} \mu_j^{k_l} g_j = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \eta_{k_l} = 0. \quad (29)$$

因为 $g_j \in \partial_{\varepsilon_j} \varphi(y_j)$, 故对 $j \in J_{k_l}$, 有

$$g_j^T(y - y_j) \leq \varphi(y) - \varphi(y_j) + \varepsilon_j, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m. \quad (30)$$

另外, 由 $\beta_j^{k_l}$ 的定义有

$$g_j^T(y_j - x_{k_l}) = \varphi(y_j) - \varphi(x_{k_l}) + \beta_j^{k_l}. \quad (31)$$

将(30)和(31)两式相加得

$$g_j^T(y - x_{k_l}) \leq \varphi(y) - \varphi(x_{k_l}) + \beta_j^{k_l} + \varepsilon_j, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

在上式两端同乘以 $\mu_j^{k_l}$ 并求和得

$$\left(\sum_{j \in J_{k_l}} \mu_j^{k_l} g_j \right)^T (y - x_{k_l}) \leq \varphi(y) - \varphi(x_{k_l}) + \eta_{k_l}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

在上式中令 $l \rightarrow \infty$, 由(29)式便知 $0 \leq \varphi(y) - \varphi(\bar{x})$, 故 \bar{x} 是函数 φ 的极小点. 证毕.

下一个引理给出点列 $\{x_k\}$ 会有聚点的一个充分条件.

引理 4. 假设存在一点 $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ 满足对 $\forall k \geq 1$, 有 $\varphi(\bar{x}) \leq \varphi(x_k)$ 则 $\{x_k\}$ 是有界点列, 而且对 $\forall \delta > 0$, 都存在整数 $N = N(\delta) > 0$, 使得当 $K > M \geq N$ 时,

$$\|\bar{x} - x_k\|^2 \leq \|\bar{x} - x_M\|^2 + \delta. \quad (32)$$

证明. 由 $g_j \in \partial_{\varepsilon_j} \varphi(y_j)$ 容易验证 $g_j \in \partial_{\varepsilon_j + \beta_j} \varphi(x_k)$, $j \in J_k$, 因此, 由 $\frac{p_k}{t_k} = \sum_{j \in J_k} \mu_j^k g_j$ 可得(注意到 $\eta_k = \sum_{j \in J_k} \mu_j^k (\beta_j^k + \varepsilon_j)$)

$$\frac{p_k}{t_k} \in \partial_{\eta_k} \varphi(x_k).$$

由假设及上式可知 $0 \geq \varphi(\bar{x}) - \varphi(x_k) \geq \left(\frac{p_k}{t_k} \right)^T (\bar{x} - x_k) - \eta_k$, 因此, $p_k^T (\bar{x} - x_k) \leq t_k \eta_k$. 由算

法知 $x_{k+1} = x_k - r_k p_k$, 其中若 x_{k+1} 是严格步所得, 则 $r_k = 1$, 若 x_{k+1} 是空步所得, 则 $r_k = 0$. 因此, 对 $\forall k \geq 1$ 有

$$-(x_{k+1} - x_k)^T (\bar{x} - x_k) = r_k (p_k)^T (\bar{x} - x_k) \leq r_k t_k \eta_k$$

进一步有

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - x_{k+1}\|^2 &= \|\bar{x} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_k\|^2 - 2(x_{k+1} - x_k)^T (\bar{x} - x_k) \\ &\leq \|\bar{x} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_k\|^2 + 2r_k t_k \eta_k. \end{aligned}$$

由此可得对 $K > M \geq 1$ 有

$$\|\bar{x} - x_k\|^2 \leq \|\bar{x} - x_M\|^2 + \sum_{i=M}^{K-1} \{\|x_{i+1} - x_i\|^2 + 2r_i t_i \eta_i\}.$$

因为 $\|x_{i+1} - x_i\|^2 = r_i^2 \|p_i\|^2 = r_i \|p_i\|^2$, 故由上式得

$$\|\bar{x} - x_k\|^2 \leq \|\bar{x} - x_M\|^2 + \sum_{i=M}^{K-1} \{r_i \|p_i\|^2 + 2r_i t_i \eta_i\}. \quad (33)$$

由算法构造可知 $\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1}) \geq m_1 r_i (-V_i)$, 故而有 $\varphi(x_1) - \varphi(x_k) \geq m_1 \sum_{i=1}^{K-1} r_i (-V_i)$. 因为 $-\varphi(x_k) \leq -\varphi(\bar{x})$, 故有 $\varphi(x_1) - \varphi(\bar{x}) \geq m_1 \sum_{i=1}^{\infty} r_i (-V_i)$, 即

$$\begin{aligned} [\varphi(x_1) - \varphi(\bar{x})] / m_1 &\geq \sum_{i=1}^{\infty} r_i \left(\frac{\|p_i\|^2}{t_i} + \eta_i \right) \\ &\geq \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{\infty} (r_i \|p_i\|^2 + r_i t_i \eta_i). \end{aligned}$$

由此可得 $\sum_{i=1}^{\infty} (r_i \|p_i\|^2 + 2r_i t_i \eta_i) \leq \frac{2T[\varphi(x_1) - \varphi(\bar{x})]}{m_1} < +\infty$. 故由(33)式可知对 $\forall \delta > 0$, 存

在 $N = N(\delta) > 0$ 使得当 $K > M \geq N$ 时

$$\|\bar{x} - x_k\|^2 \leq \|\bar{x} - x_M\|^2 + \delta.$$

(32)式由此得证. 这同时也说明了 $\{x_k\}$ 的有界性.

利用定理1和引理4可得到如下的收敛性结果:

定理2. 如果 $X^* = \text{Arg min } \varphi \neq \emptyset$, 则 $\{x_k\}$ 必收敛于某个 $\bar{x} \in X^*$.

证明. 因为 $X^* \neq \emptyset$, 故至少有一点 $\hat{x} \in X^*$ 使得对 $K \geq 1$ 有 $\varphi(\hat{x}) \leq \varphi(x_K)$. 由引理4即知 $\{x_k\}$ 有界, 故 $\{x_k\}$ 有一收敛子列 $\{x_{K_i}\}$ 趋向某一 \bar{x} . 由定理1知 $\bar{x} \in X^*$. 下面证明 $\lim_{K \rightarrow \infty} x_K = \bar{x}$. 对 $\forall \delta > 0$, 因为 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{K_i} = \bar{x}$, 故存在 $L > 0$, 使得当 $l \geq L$ 时有 $\|x_{K_l} - \bar{x}\| \leq \frac{1}{2} \delta$. 另外, 因为 $\bar{x} \in X^*$, 故 $\forall K \geq 1$, $\varphi(\bar{x}) \leq \varphi(x_K)$. 由引理4知存在 $N > 0$ 使得当 $K > M \geq N$ 时有 $\|\bar{x} - x_K\|^2 \leq \|\bar{x} - x_M\|^2 + \frac{1}{2} \delta^2$. 因此, 如果取一 K_i 满足 $K_i \geq \max\{N, K_l\}$, 则当 $K > M = K_i$ 时有 $\|\bar{x} - x_K\|^2 \leq \frac{1}{4} \delta^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \leq \delta^2$, 也即 $\|\bar{x} - x_K\| \leq \delta$, 故有 $\lim_{K \rightarrow \infty} x_K = \bar{x}$. 证毕.

以上我们分析了BT型 ε -次梯度算法的收敛性. 下面讨论一下该算法的改进. 注意到算法要求存贮 K 个 ε -次梯度 $g_j \in \partial_{\varepsilon} \varphi(y_j)$, $j \in J_K$. 当 K 较大时要占据较大的内存且二次规划问题(12)的规模也很大, 因此采用重置的办法来改进. 在第 $m+1$ 次迭代时, 记 $\tilde{g}_m = \sum_{j \in J_m} \mu_j^m g_j$, $\tilde{\beta}_m^{m+1} = \sum_{j \in J_m} \mu_j^m \beta_j^m$, $\tilde{\varepsilon}_m = \sum_{j \in J_m} \mu_j^m \varepsilon_j$, 置 $J_{m+1} = \{m, m+1\}$, 则对应 (t_{m+1}, J_{m+1}) 的二次规划问题(12)化为(其中用 $\tilde{g}_m, \tilde{\beta}_m^{m+1}, \tilde{\varepsilon}_m$ 代替 g_m, β_m^{m+1} 和 ε_m)

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} t_{m+1}^2 \|\mu_1 \tilde{g}_m + \mu_2 g_{m+1}\|^2 + \mu_1 (\tilde{\beta}_m^{m+1} + \tilde{\varepsilon}_m) + \mu_2 (\beta_{m+1}^{m+1} + \varepsilon_{m+1}), \\ \text{s.t. } \mu_1 + \mu_2 = 1, \mu_1, \mu_2 \geq 0. \end{cases}$$

在以后的迭代中就不要存贮 $g_j (j \in J_m)$ 了. 置 $J_{m+2} = J_{m+1} \cup \{m+2\}$ 进入下一轮迭代, 并如此递归下去. 以后每经过 m 次迭代之后都进行上述的重置过程. 这样只要存贮至多

$m+1$ 个 ε - 次梯度向量. 另外, 二次规划问题的规模也得以控制, 因此可以节省内存和计算量. 从上述的收敛性证明过程可以看出, 经过上述重置处理后的 BT 型 ε - 次梯度算法仍然具有全局收敛性.

五、数值算例

我们用上述的 BT 型 ε - 次梯度法对三个例子^[4]进行了计算, 得到了问题的近似最优解, 说明本文的算法是可行的.

例 1. 取 $m=n=2$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 算法参数取作, $m_1=0.2$, $\varepsilon_1=1.0$, $\underline{t}=0.1$, $\bar{t}=120.0$, $t^0=10.0$, $h=0.5$, 停机条件为 $W_k \leq 10^{-4}$. 以下的例子也取同样的算法参数和停机条件.

初始点 $x_1 = (1.0, 2.0)^T$, 算法经 10 次迭代求得最优解 $\bar{x} = (0.0, 0.0)^T$, 对应的目标函数数值 $\rho(\bar{x}) = 1.0$.

例 2. 取 $m=n=3$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.1 \\ 1 & 0 & 1.2 \\ 1.1 & 1.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

初始点为 $x_1 = (1.0, 0.9, 0.8)^T$, $\rho(x_1) = 7.605$. 算法经 24 次迭代求得近似解 $\bar{x} = (-0.1164, -0.2498, -1.8460)^T$, 对应的目标函数数值为 $\rho(\bar{x}) = 1.1017$.

例 3. 取 $m=n=10$, $A_k = e_k e_k^T$, e_k 为 10×10 单位阵的第 k 列,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & \\ & 1.1 & 0 & & & & & & & & \\ & 1 & 2.1 & 0 & & & & & & & \\ & 1 & 2 & 3.1 & 0 & & & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4.1 & 0 & & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5.1 & 0 & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6.1 & 0 & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7.1 & 0 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8.1 & 0 & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9.1 & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10}$$

对称

初始点 $x_1 = (1.0, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1)^T$. 经过 75 次迭代, 求得近似解 $\bar{x} = (-21.2558, -20.5887, -19.2458, -18.6045, -17.2238, -16.6347, -15.1852, -14.7416, -13.0531, -13.4608)^T$, 对应的目标函数数值 $\rho(\bar{x}) = 22.3662$.

同[4]中的算法相比, 本文算法的收敛速度要慢一些, 这从上述算例可以看得出来. 这是因为[4]中算法利用了目标函数的某种二阶信息以及序列二次规划的技术, 因此一般来说要比只利用一阶信息的 BT- 型 ε - 次梯度法收敛速度快. 然而, [4]的算法在理论上无法保证收敛性(例如当参数 TOL 选择不当时, [4]的算法可能失败而无法收敛).

除此之外,在每次迭代中,为了构造搜索方向的二次规划,[4]的算法要求计算 $A(x)$ 的所有特征值 $\lambda_i(x)$ 和对应的一组正交的特征向量,当矩阵阶数较大时,这要花费许多的计算量.而本文算法只要增加一个 ε -次梯度即可(这相当于计算分别对应 $\lambda_1(x)$ 和/或 $\lambda_n(x)$ 的一个近似的特征向量),故计算量要小得多.因此,与[4]的算法相比,本文算法也有它的优点.对于矩阵阶数较大的应用问题,如弹性结构频率优化设计问题(用有限元法求解时),采用本文的算法比较简单可行,而且理论上能保证其收敛到极小解.这方面的应用结果和分析将另文讨论.

参 考 文 献

- [1] N. Olhoff, J. E. Taylor, On structural optimization, *J. Applied Mechanics*, Vol. 50, (1983) pp. 1138—1151.
- [2] E. Polak, Y. Wardi, Nondifferentiable optimization algorithm for designing control systems having singular value inequalities, *Automatica*, 18, 1982, pp. 267—283.
- [3] R. Fletcher, Semi-definite matrix constraints in optimization, *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 23, (1985), pp. 493—513.
- [4] M. L. Overton, On minimizing the maximum eigenvalue of a symmetric matrix, *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, Vol. 9, No. 2 (1988), pp. 256—268.
- [5] J. Zowe, The BT-algorithm for minimizing a nonsmooth functional subject to linear constraints, In *Nonsmooth Optimization and Related Topics*, edited by F. H. Clarke, V. F. Demyanov and F. Giannessi, Plenum Press, 1989, pp. 459—480.
- [6] J. B. Hiriart-Urruty, ε -subdifferential calculus, In *Convex Analysis and Optimization*, Edited by J. P. Aubin and R. B. Vinter, Pitman, New York, (1982), pp. 43—92.
- [7] Ye Dongyi, Sensitivity analysis of the greatest eigenvalue of a symmetric matrix via the ε -subdifferential of the associated convex quadratic form, *J. of Optimization Theory and Applications*, Vol. 76, No. 2, (1993), pp. 287—304.
- [8] J. B. Hiriart-Urruty, Limiting behavior of the approximate first order and second order directional derivatives for a convex function, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, Vol. 6, (1982), pp. 1309—1326.