

# 脉冲响应的一种有效数值解法<sup>\*1)</sup>

张智江 李岳生

(中山大学)

## A EFFECTIVE NUMERICAL SOLUTION TO IMPULSE RESPONSE

Zhang Zhijiang Li Yuesheng

(Zhongshan University)

### Abstract

Impulse response is one of the absolutely necessary data in the modern scientific fields, such as resource exploration, directional design. In this paper, a effective numerical method is obtained by the techniques of reducing the singularity and characteristics differences. Some examples are given.

### § 1. 引言

在资源勘探、系统设计和信号处理<sup>[1-4]</sup>等实际问题中,常常需要知道系统的脉冲响应,其数学提法如下:

考虑偏微分方程组

$$\begin{cases} a(x)w_t(x,t) + p_x(x,t) = 0, & x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ p_t(x,t) + a(x)w_x(x,t) = 0, & a(x) > 0. \end{cases} \quad (1.1a)$$

$$(1.1b)$$

初始条件(表示系统在 $t \leq 0$ 时是静止的)

$$w(x,t) = p(x,t) = 0, \quad t \leq 0, \quad (1.2)$$

边值条件(给系统加的脉冲)

$$p(0,t) = 2a^{\frac{1}{2}}(0)\delta(t), \quad (1.3)$$

其中 $w(x,t)$ 表示波速, $p(x,t)$ 表示压力, $\delta(t)$ 为脉冲,即Delta函数.

在许多应用问题中,需要知道系统(1.1)在脉冲(1.3)作用下的表面响应 $w(0,t)$ ,通常记为 $h(t)$ .实际上 $h(t) = w(0,t)$ 是初边值问题(1.1)—(1.3)的解在表面 $x = 0$ 上的迹.因此,求脉冲响应的问题本质上为下述问题.

**问题.** 给定 $a(x) > 0$ ,求解(1.1)—(1.3)得 $w(x,t)$ , $p(x,t)$ ,取 $h(t) = w(0,t)$ 即得脉冲响应数据.

\* 1995年10月17日收到.

1) 国家攀登项目基金和广东省自然科学基金联合资助.

对初、边值问题 (1.1)—(1.3), 直接对其用差分法求数值解, 效果并不理想, 主要原因是: 第一, 边值条件 (1.3) 带有广义函数  $\delta(t)$ , 在原点  $t = 0$  处有很强的奇性, 简单的差分很难反映其本质; 第二, 直接对方程组 (1.1) 作差分不能充分利用其特征性质.

为了导出一种有效的数值解法, 本文首先是降低问题的奇性, 然后沿其特征线作差分逼近, 推导出计算格式. 数值实验结果表明, 这种方法是非常有效的, 与 Sondhi<sup>[5]</sup> 给出的精确解相比, 误差很小.

## § 2. 问题的转化

记  $\tilde{w}(x, t), \tilde{p}(x, t)$  分别为  $\int_0^t w(x, \tau) d\tau, \int_0^t p(x, \tau) d\tau$ . 容易看出,  $\tilde{w}(x, t), \tilde{p}(x, t)$  也满足方程组 (1.1). 因此, 对初、边值条件 (1.2), (1.3) 作相应的对  $t$  积分, 便可以得到如下关于  $\tilde{w}(x, t), \tilde{p}(x, t)$  的初、边值问题:

$$\begin{cases} a(x)\tilde{w}_t(x, t) + \tilde{p}_x(x, t) = 0, & a(x) > 0, \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$\begin{cases} \tilde{p}_t(x, t) + a(x)\tilde{w}_x(x, t) = 0, & x \geq 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (2.1b)$$

初始条件

$$\tilde{w}(x, 0) = \tilde{p}(x, 0) = 0, \quad (2.2)$$

边值条件

$$\tilde{p}(0, t) = 2a^{\frac{1}{2}}(0)H(t), \quad (2.3)$$

这里  $H(t)$  是 Heaviside 阶梯函数.

条件 (2.3) 的奇性相对于 (1.3) 就降低了. 现在可以将求脉冲响应的过程分为以下两步:

1°. 求解初、边值问题 (2.1)—(2.3), 得到  $\tilde{w}(x, t), \tilde{p}(x, t)$ , 特别是  $\tilde{w}(0, t)$ .

2°. 利用关系  $\tilde{w}(x, t) = \int_0^t w(x, \tau) d\tau$ , 可得到

$$h(t) = w(0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{w}(0, t).$$

## § 3. 计算格式

为了简单起见, 记  $w_j^i = \tilde{w}(x_j, t_i), p_j^i = \tilde{p}(x_j, t_i)$ , 这里时间步长和空间步长均设为  $\Delta$ ,  $x_j = j \cdot \Delta, t_i = i \cdot \Delta, j, i \geq 0, a_j = a(x)|_{x=(j+\frac{1}{2})\Delta}$ .

将方程组 (2.1) 改写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_t \\ \tilde{p}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_x \\ \tilde{p}_x \end{pmatrix} = 0. \quad (3.1)$$

记

$$V(x, t) = \begin{pmatrix} \tilde{w}(x, t) \\ \tilde{p}(x, t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

则有

$$V_t(x, t) + A \cdot V_x(x, t) = 0. \quad (3.2)$$

易知, 矩阵  $A$  的特征值为  $\pm 1$ , 其对应的左特征向量分别为  $(a(x), 1), (-a(x), 1)$ . 用矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a(x) & 1 \\ -a(x) & 1 \end{pmatrix}$$

左乘方程 (3.2) 得

$$\begin{pmatrix} a(x) & 1 \\ -a(x) & 1 \end{pmatrix} V_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x) & 1 \\ -a(x) & 1 \end{pmatrix} V_x = 0. \quad (3.3)$$

展开 (3.3) 式有

$$a(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{w} + \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{p}(x, t) = 0, \quad (3.4a)$$

$$a(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{w} - \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{p}(x, t) = 0. \quad (3.4b)$$

将 (3.4a) 从  $Q = (x_j, t_i)$  积分到  $R = (x_{j+1}, t_{i+1})$  得

$$\int_Q^R a(x) d\tilde{w} + d\tilde{p} = 0.$$

用中点积分公式逼近第一项有

$$\int_Q^R a(x) d\tilde{w} \approx a_j (w_{j+1}^{i+1} - w_j^i).$$

类似地, 从  $(x_j, t_i)$  到  $(x_{j+1}, t_{i-1})$  积分 (3.4b) 也可导出对应的格式, 合起来得到

$$a_j w_j^i + p_j^i = a_j w_{j+1}^{i+1} + p_{j+1}^{i+1}, \quad (3.5a)$$

$$a_j w_j^i - p_j^i = a_j w_{j+1}^{i-1} - p_{j+1}^{i-1}. \quad (3.5b)$$

在 (3.5a) 中, 分别用  $j-1, i-1$  代替  $j, i$ , 与 (3.5b) 联立, 整理可得另一种格式

$$w_j^i = \frac{1}{a_j + a_{j-1}} (a_j w_{j+1}^{i-1} + a_{j-1} w_{j-1}^{i-1} - p_{j+1}^{i-1} + p_{j-1}^{i-1}), \quad (3.6a)$$

$$p_j^i = \frac{1}{a_j + a_{j-1}} (a_{j-1} p_{j+1}^{i-1} + a_j p_{j-1}^{i-1} - a_j a_{j-1} (w_{j+1}^{i-1} - w_{j-1}^{i-1})). \quad (3.6b)$$

至此便可以给出求解初、边值问题 (2.1)—(2.3) 的沿特征差分格式

$$w_j^i = \frac{1}{a_j + a_{j-1}} (a_j w_{j+1}^{i-1} + a_{j-1} w_{j-1}^{i-1} - p_{j+1}^{i-1} + p_{j-1}^{i-1}), \quad (3.7a)$$

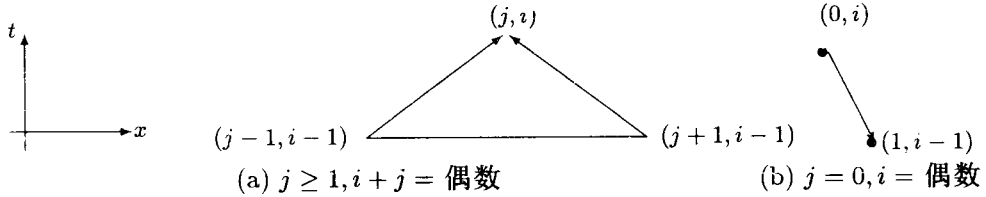
$$p_j^i = \frac{1}{a_j + a_{j-1}} (a_{j-1} p_{j+1}^{i-1} + a_j p_{j-1}^{i-1} - a_j a_{j-1} (w_{j+1}^{i-1} - w_{j-1}^{i-1})), \quad (3.7b)$$

当  $j \geq 1$ ,  $i+j$  为偶数,

$$w_0^i = \frac{1}{a_0} (p^i - p_1^{i-1}) + w_1^{i-1}, \quad (3.7c)$$

当  $j = 0, i$  为偶数.

以上特征差分格式的方向更新图为



脉冲响应的具体计算步骤如下:

第一步. 利用以上给出的特征差分格式以及初边值条件 (2.2), (2.3), 计算出

$$w_j^i = \bar{w}(x_j, t_i), p_j^i = \bar{p}(x_j, t_i), x_j = j \cdot \Delta, t_i = i \cdot \Delta, j \geq 0,$$

$i + j = \text{偶数}$ ;

第二步. 由关系式  $h(t) = w(0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{w}(0, t)$  及第一步求出的  $w_j^i, p_j^i$  得  $h(t_i) = (w_0^{i+2} - w_0^i) / (2 \cdot \Delta)$ .

#### § 4. 数值例子

为了进行比较, 本文的每一个例子都用两种算法做了数值实验. 一种是本文的改进算法, 另一种是普通算法, 即直接从方程组 (1.1) 出发, 沿特征差分导出类似于 (3.7) 的格式. 不同的是以下两点:

第一, 普通算法的边值条件为 (1.3), 离散成

$$P(0, t_i) = \begin{cases} 2a^{\frac{1}{2}}(0) \cdot \frac{1}{\Delta}, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases}$$

而改进算法的边值条件为 (2.3), 离散成

$$\bar{p}(0, t_i) = \begin{cases} 0 & i = 0, \\ 2a^{\frac{1}{2}}(0), & i > 0. \end{cases}$$

第二, 求脉冲响应的格式:

普通算法:  $h(t_i) = w(0, t_i)$ ;

改进算法:  $h(t_i) = (\bar{w}(0, t_{i+2}) - \bar{w}(0, t_i)) / (2 \cdot \Delta)$ .

两种方法的计算结果均与 Sondhi<sup>[5]</sup> 给出的精确解作比较. 离散步长  $\Delta = 0.01$ , 利用 P5/90 微机双精度计算.

例 1.  $a(x) = (1+x)^{-2}$ , 其脉冲响应的精确解为  $h(t) = 1$ , 计算及比较结果见图 1a (本文算法)、图 1(b) (普通算法).

例 2.  $a(x) = (1+x \cdot \operatorname{tg} x)^{-2}$ , 精确解  $h(t) = t$ , 计算及误差比较见图 2(a) 和图 2(b).

例 3.  $a(x) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{2}x) + 2} \right)^2$ , 其精确解  $h(t) = \sin t$ , 计算结果及误差比较见图 3(a) 和图 3(b).

改进算法

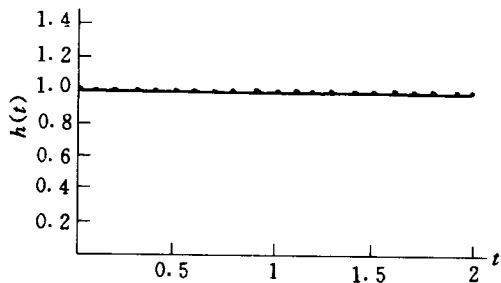


图 1(a)

普通算法

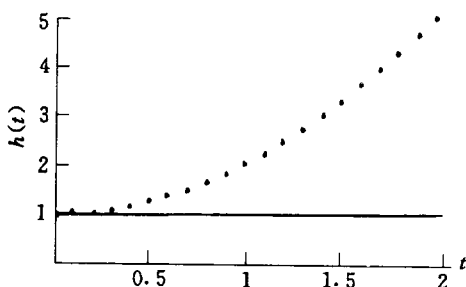


图 1(b)

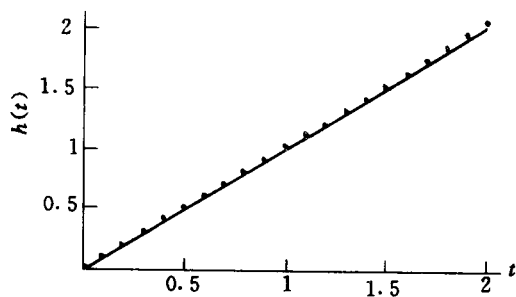


图 2(a)

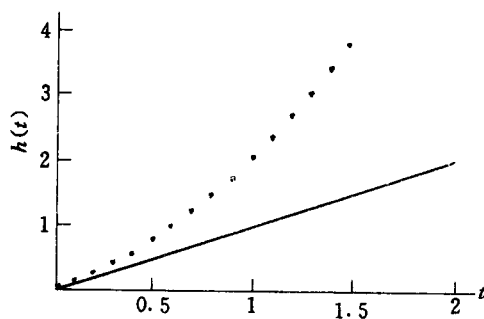


图 2(b)

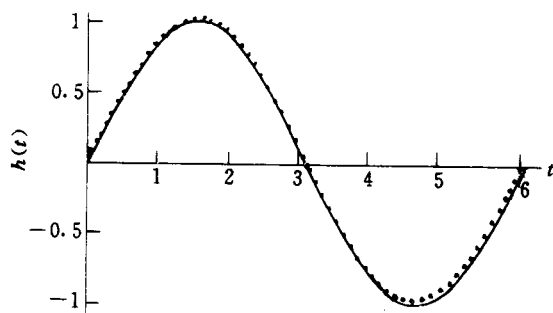


图 3(a)

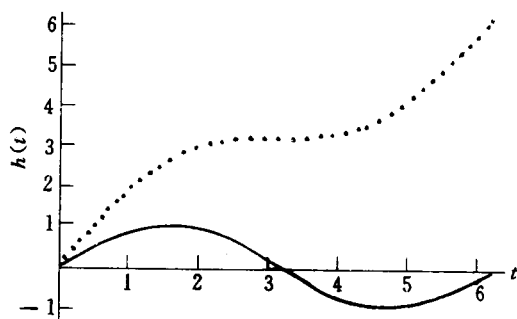


图 3(b)

注. 图中“.....”表示计算值, “——”表示精确值.

## §5. 结 论

本文给出的算法, 尽管在求  $h(t) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{w}(0, t)$  时用到数值微商, 会影响精度, 这可以用高精度差分格式或正则化方法等加以克服, 但就本文给出的例子都采用简单的向前差分格式, 计算也是稳定的. 从数值例子看出, 对带有广义函数作为边界条件的双曲方程

组 (1.1), 用普通的方法求其数值解, 效果是很差的, 甚至是发散的. 采用本文的改进算法, 在没有增加多少计算量的情况下, 结果也是很好的.

### 参 考 文 献

- [1] E.A. Robinson, S. Treitel, *Geophysical Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [2] F. Santosa, H. Schwetlick, The inverse of acoustic impedance profile by methods of characteristics, *Wave Motion* 4, 1982, 99—110.
- [3] B. Gopinath, M.M. Sondhi, Determination of the shape of the human vocal tract from acoustic measurements, *Bell Syst. Tech. Journal*, 49 (1970), 1195—1214.
- [4] J.A. Ware, K. Aki, Continuous and discret inverse scattering problems in a stratified elastic medium I: plane wave at normal incidence, *J. Acoustic. Soc. Amer.*, 45 (1969), 911—921.
- [5] M.M. Sondhi, B. Gopinath, Determination of vocal-tract shape from impulse response at Lips, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 49 (6) (1971), 1867—1873.