

# 求解扩散方程的交替分段显-隐式方法\*

张宝琳

(北京应用物理与计算数学研究所)

## AN ALTERNATING SEGMENT EXPLICIT-IMPLICIT METHOD FOR THE DIFFUSION EQUATION

Zhang Bao-lin

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing)

### Abstract

The segment implicit scheme of finite difference approximation is constructed with the aid of Saul'yev asymmetric schemes. Then a new alternating segment explicit-implicit method for the diffusion equation is developed, which is suitable for the computation on parallel and vector computers. The method is unconditionally stable and also gives more accurate solutions because of its better truncation error. In the numerical experiments for an example the accuracy of the method is compared with that of the AGE method (Evans and Abdullah).

本文的目的是研究适合在并行机与向量机上求解下述扩散方程的有限差分方法: 求满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (1)$$

的解  $u(x, t)$  适合初始条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

及边界条件

$$\begin{aligned} u(0, t) &= g_0(t), \\ u(1, t) &= g_1(t). \end{aligned} \quad (3)$$

习知, 在求解上述问题的有限差分逼近方法中, 古典显式方法适合于并行计算, 但不绝对稳定、而像古典隐式和 Crank-Nicolson 格式这类隐式方法是绝对稳定的, 但需要求解线性代数方程组, 实现并行计算有一定困难。D.J.Evans 和 A.R. Abdullah<sup>[1,2]</sup> 巧妙地利用 Saul'yev 非对称格式<sup>[3]</sup>构造了交替分组显式格式 (AGE), 并证明了格式是绝对稳定的。近来, Evans 等又将 AGE 方法的应用拓广到许多方面<sup>[4-6]</sup>。本文提出利用

\* 1989 年 5 月 23 日收到。

Saul'yev 格式构造分段隐式格式的思想,建立了交替分段显-隐式格式。方法不但具有明显的并行性,而且绝对稳定。文中还讨论了方法的截断误差,并通过算例与 AGE 方法作了比较。

首先,将开区域  $(0, 1) \times (0, \infty)$  以空间步长  $\Delta x$  和时间步长  $\Delta t$  为间隔划分为网格,目的是计算节点  $(x_i, t_j)$  上问题 (1)–(3) 的解  $u$  的近似值  $u_{i,j}$ , 其中  $x_i = i\Delta x, i = 0, 1, \dots, m, \Delta x = \frac{1}{m}; t_j = j\Delta t, j = 1, 2, \dots$ 。为简单计也把  $(x_i, t_j)$  记为  $(i, j)$ 。

Saul'yev 给出的非对称格式为

$$(1+r)u_{i,j+1} - ru_{i-1,j+1} = (1-r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}, \quad (4)$$

其中  $r = \Delta t / \Delta x^2$ 。如果第  $j$  时间层的近似解已知,则利用 (4) 通过自左至右的递推计算求得第  $j+1$  层的近似解(参阅图 1.1)。类似地,有

$$(1+r)u_{i+1,j+1} - ru_{i+2,j+1} = (1-r)u_{i+1,j} + ru_{i,j}, \quad (5)$$

在由第  $j$  层计算第  $j+1$  层时可利用 (5) 通过自右至左进行递推计算(参阅图 1.2)。

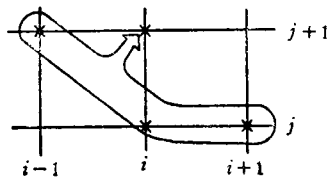


图1.1

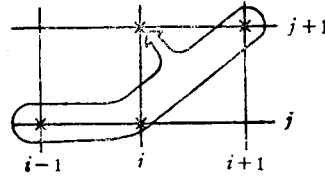


图1.2

Evans 和 Abdullah 指出,将 (5) 和 (4) 分别对  $(i, j+1)$  和  $(i+1, j+1)$  两点使用而使其联立(见图 2),可以得到一个新的差分格式,写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1+r & -r \\ -r & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j+1} \\ u_{i+1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r & 0 \\ 0 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ u_{i+1,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & u_{i-1,j} \\ r & u_{i+2,j} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

解上述  $2 \times 2$  线性代数方程组得到显式公式

$$\begin{bmatrix} u_{i,j+1} \\ u_{i+1,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 1+r & r \\ r & 1+r \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1-r & 0 \\ 0 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ u_{i+1,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & u_{i-1,j} \\ r & u_{i+2,j} \end{bmatrix} \right\}, \quad (7)$$

其中  $|A| = 1 + 2r$ 。

格式 (7) 便是分组显式。利用第  $j$  层的四个点上的函数值可以同时计算第  $j+1$  层上两点的函数值。于是第  $j+1$  层的所有近似解均可通过分组显式计算,只是在最靠近边界的一点可能要用到 (4) 或 (5) 来单独计算。一般,假设在计算第  $j+1$  层上两点  $(i, j+1)$  和  $(i+1, j+1)$  上的函数值时,用到了四点  $(i-1, j), (i, j), (i+1, j), (i+2, j)$  上的值,那么如果在计算  $j+2$  层时要求用  $(i, j+1), (i+1, j+1), (i+2, j+1), (i+3, j+1)$  四点计算  $(i+1, j+2), (i+2, j+2)$  两点,格式 (7) 被交替使用。此类交错地使用 (7) 的成组显式计算方法即是交替分组显式 (AGE) 方法。

下面说明我们的交替分段显-隐式方法。

为描述方便,设  $m-1 = lk, l, k$  均为正整数,  $l \geq 3, k$  为奇数,  $k \geq 3$ 。现将某  $j+1$  层的  $m-1$  个内点分为  $k$  段,每段包括  $l$  个点。利用 Saul'yev 非对称格式建立分



$$G_1 = \begin{bmatrix} Q_l & & & & \\ & G_l^{(1)} & & & \\ & & Q_l & & \\ & & & G_l^{(2)} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & Q_l \\ & & & & & & G_l^{(\frac{k-1}{2})} \\ & & & & & & & Q_l \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} G_{l+1}^{(1)} & & & & & & & & \\ & Q_{l-2} & & & & & & & \\ & & G_{l+2}^{(2)} & & & & & & \\ & & & Q_{l-2} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & G_{l+2}^{(\frac{k-1}{2})} & & & \\ & & & & & & Q_{l-2} & & \\ & & & & & & & & G_{l+1}^{(\frac{k+1}{2})} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

其中

$$G_{l+1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & & & -1 & 1 & \end{bmatrix}_{(l+1) \times (l+1)},$$

$$G_l^{(1)} = G_l^{(2)} = \dots = G_l^{(\frac{k-1}{2})} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & & & -1 & 1 & \end{bmatrix}_{l' \times l'},$$

$$G_{l+1}^{(\frac{k+1}{2})} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & & & -1 & 2 & \end{bmatrix}_{(l+1) \times (l+1)},$$

而  $Q_{l'}$  为  $l' \times l'$  零阵,  $l' = l$  或  $l - 2$ .

根据 Kellogg 引理可证明,上述交替分段显-隐式方法是绝对稳定的.

**引理 (Kellogg)<sup>[8]</sup>.** 如果  $\rho > 0$ , 并且矩阵  $C$  为非负实阵即  $C + C^H$  非负(或正)定, 则  $(\rho I - C)(\rho I + C)^{-1}$  有界, 且

$$\|(\rho I - C)(\rho I + C)^{-1}\|_2 \leq 1.$$

事实上, 由 (9) 得

$$u_{i+2} = T u_i + b, \quad i = 0, 2, 4, \dots,$$

其中

$$T = (I + rG_2)^{-1}(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}(I - rG_2),$$

而

$$b = (I + rG_2)^{-1}[(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}b_1 + b_2].$$

利用 Kellogg 引理, 有

$$\begin{aligned} \|T^n\|_2 &\leq \| (I + rG_2)^{-1} \|_2 \cdot \| (I + rG_1)^{-1}(I - rG_1) \|_2 \cdots \\ &\quad \cdot \| (I + rG_2)^{-1}(I - rG_2) \|_2 \cdot \| (I + rG_1)^{-1}(I - rG_1) \|_2 \\ &\quad \cdot \| (I - rG_2) \|_2 \leq \| (I - rG_2) \|_2 \leq 1 + 4r. \end{aligned}$$

于是, 对于任何正整数  $n$  有

$$\|T^n\|_2 \leq C, \quad C = 1 + 4r.$$

可见, 交替分段显-隐式方法是绝对稳定的.

下面讨论当  $l = 3$  时交替分段显-隐式方法的截断误差. 为叙述方便而又使结论不失一般性, 取段数  $k = 5$ , 这样  $m - 1 = lk = 15$  (参阅图 4).

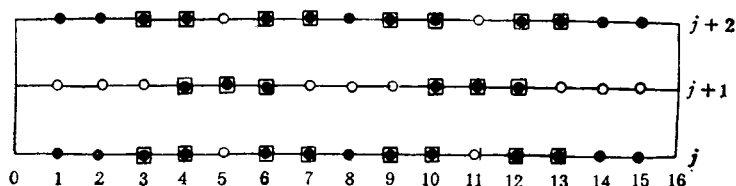


图 4

由 (9) 的第一式, 我们有

$$\begin{aligned} u_{4,i+1} &= \frac{1}{(1+r)(1+3r)} \{ r(1+3r+r^2)u_{3,i} + (1-r)(1 \\ &\quad + 3r+r^2)u_{1,i} + r(1+r)u_{5,i} + r^2(1-r)u_{6,i} + r^3u_{7,i} \}, \\ u_{5,i+1} &= \frac{1}{(1+r)(1+3r)} \{ r^2(1+r)u_{1,i} + r(1-r^2)u_{3,i} + (1 \\ &\quad + r)^2u_{5,i} + r(1-r^2)u_{6,i} + r^2(1+r)u_{7,i} \}, \\ u_{6,i+1} &= \frac{1}{(1+r)(1+3r)} \{ r^3u_{3,i} + r^2(1-r)u_{1,i} + r(1+r)u_{5,i} \\ &\quad + (1-r)(1+3r+r^2)u_{6,i} + r(1+3r+r^2)u_{7,i} \}. \end{aligned} \quad (12)$$

对于  $i = 10, 11, 12$  可得出同样的表达式. 于是, (9) 的截断误差可分以下三种情况讨论:

(i) 根据 (9) 的第二式和 (12) 式, 对  $j = 0, 2, 4, \dots$  有

$$\begin{aligned} u_{5,j+2} &= r u_{4,j+1} + (1-2r)u_{5,j+1} + r u_{6,j+1} \\ &= \frac{1}{(1+r)(1+3r)} \{ 2r^2(1+r)u_{3,i} + 2r(1-r^2)u_{1,i} \\ &\quad + (1-r^2)u_{5,i} + 2r(1-r^2)u_{6,i} + 2r^2(1+r)u_{7,i} \}. \end{aligned} \quad (13)$$

将 (13) 中  $u_{5,j+2}$  和  $u_{1,i}$  ( $i = 3, 4, 5, 6, 7$ ) 诸量在  $(5, j+1)$  点作泰勒展开, 得到

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \Big|_{(5,j+1)} &= -\Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(5,j+1)} \\ &+ \frac{1+6r+15r^2}{12(1+r)(1+3r)} \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(5,j+1)} + O(\Delta t^2 + \Delta x^4), \end{aligned}$$

所以, (13) 式的截断误差为  $O(\Delta t + \Delta x^2)$ . 对于  $u_{11,j+2}$  有和 (13) 式相同结构的表达式, 故其截断误差也相同.

(ii) 根据 (9) 的第二式和 (12) 式, 对  $j = 0, 2, 4, \dots$  我们有

$$\begin{aligned} -ru_{3,j+2} + (1+r)u_{4,j+2} &= (1-r)u_{4,j+1} + ru_{5,j+1} \\ &= \frac{1}{(1+r)(1+3r)} \{ r(1+2r-r^2)u_{3,j} + (1-r)(1+2r-r^2)u_{4,j} \\ &\quad + 2r(1+r)u_{5,j} + 2r^2(1-r)u_{6,j} + 2r^3u_{7,j} \} \end{aligned} \quad (14)$$

及

$$\begin{aligned} -ru_{7,j+2} + (1+r)u_{6,j+2} &= (1-r)u_{6,j+1} + ru_{5,j+1} \\ &= \frac{1}{(1+r)(1+3r)} \{ 2r^3u_{3,j} + 2r^2(1-r)u_{4,j} + 2r(1+r)u_{5,j} \\ &\quad + (1-r)(1+2r-r^2)u_{6,j} + r(1+2r-r^2)u_{7,j} \}. \end{aligned} \quad (15)$$

对于 (14) 和 (15) 两式中诸量  $u_{i,j+2} (i=3,4)$ ,  $u_{i,j} (i=3,4,5,6,7)$  和  $u_{i,j+2} (i=6,7)$ ,  $u_{i,j} (i=3,4,5,6,7)$  分别于  $(4, j+1)$  和  $(6, j+1)$  两点作泰勒展开, 得到

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \Big|_{(4,j+1)} &= \frac{r}{1+r} \Delta x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{(4,j+1)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{(4,j+1)} \\ &- \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{(4,j+1)} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_{(4,j+1)} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_{(4,j+1)} \\ &- \frac{1}{6} \frac{\Delta t^3}{\Delta x} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \Big|_{(4,j+1)} - \frac{21r^2+10r+1}{6(1+r)(1+3r)} \Delta x \Delta t \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \Big|_{(4,j+1)} \\ &+ \frac{33r^2+10r+1}{12(1+r)(1+3r)} \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(4,j+1)} + O(\Delta t^\alpha \Delta x^{\beta-2}) \end{aligned} \quad (16)$$

和

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \Big|_{(6,j+1)} &= -\frac{r}{1+r} \Delta x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{(6,j+1)} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{(6,j+1)} \\ &- \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{(6,j+1)} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_{(6,j+1)} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_{(6,j+1)} \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\Delta t^3}{\Delta x} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \Big|_{(6,j+1)} + \frac{21r^2+10r+1}{6(1+r)(1+3r)} \Delta x \Delta t \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \Big|_{(6,j+1)} \\ &+ \frac{33r^2+10r+1}{12(1+r)(1+3r)} \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(6,j+1)} + O(\Delta t^\alpha \Delta x^{\beta-2}), \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\alpha + \beta = 5$ .

我们注意到 (16) 和 (17) 中的若干项的系数只差一个符号, 可以在相应的项之间抵消部分误差, 从而增加了逼近精度. 事实上, 有

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{(6,j+1)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{(4,j+1)} = 2 \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{(4+\theta_1, j+1)}, \quad (18)$$



时,则由(9)式给出的方法可以看成是通常显-隐式方法的分段化。在奇时间层取古典显式和 Evans Abdullah 分组显式计算,而在偶时间层为分段隐式。此时,(9)的截断误差亦为  $O(\Delta t + \Delta x^2)$  和  $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ 。事实上,由(9)和(7)式我们有

$$-r u_{k(l+2)-2,j+2} + (1+r) u_{k(l+2)-1,j+2} = \frac{r}{1+2r} u_{k(l+2)-2,j} + \frac{1-r}{1+2r} u_{k(l+2)-1,j} + \frac{2r(1-r)}{1+2r} u_{k(l+2),j} + \frac{2r^2}{1+2r} u_{k(l+2)+1,j}, \quad (24)$$

$$-r u_{k(l+2)+1,j+2} + (1+r) u_{k(l+2),j+2} = \frac{2r^2}{1+2r} u_{k(l+2)-2,j} + \frac{2r(1-r)}{1+2r} u_{k(l+2)-1,j} + \frac{1-r}{1+2r} u_{k(l+2),j} + \frac{r}{1+2r} u_{k(l+2)+1,j}. \quad (25)$$

其中  $h = 1, 2, \dots, \frac{k-1}{2}$ ,  $j = 0, 2, 4, \dots$ 。与(16)、(17)式截断误差的讨论相似,可得(24)、(25)的截断误差也为  $O(\Delta t + \Delta x^2)$ 。由(22)、(23)式所确定的(9)式所含其余方程式同(21),故截断误差为  $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ 。

我们看到,交替分段显-隐式方法可有比 AGE 方法更好的精确度,因为后者的截断误差中含有系数为  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  的误差项<sup>[2]</sup>。

下面通过算例比较两种方法的计算精度。

在问题(1)~(3)中取

$$f(x) = 4x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (26)$$

表1  $r = 1.0$ ,  $\Delta x = 0.05$ ,  $\Delta t = 0.0025$ ,  $t = 0.5$  ( $j = 200$ )

$x_i$	真解 $U_{i,j}(10^{-2})$	近似解 $u_{i,j}(10^{-2})$		$ e_{i,j} (10^{-4})$		$\{E_{i,j}\}$	
		本文方法	AGE	本文方法	AGE	本文方法	AGE
0.05	0.1161	0.1157	0.1072	0.0459	0.8873	0.3949	7.641
0.10	0.2294	0.2285	0.2066	0.0916	2.279	0.3992	9.936
0.15	0.3370	0.3356	0.3059	0.1371	3.106	0.4068	9.218
0.20	0.4362	0.4345	0.3930	0.1821	4.330	0.4175	9.924
0.25	0.5248	0.5226	0.4747	0.2265	5.013	0.4316	9.552
0.30	0.6005	0.5956	0.5410	0.4876	5.947	0.8120	9.904
0.35	0.6613	0.6561	0.5972	0.5242	6.418	0.7926	9.704
0.40	0.7059	0.6997	0.6362	0.6202	6.969	0.8786	9.872
0.45	0.7331	0.7267	0.6613	0.6405	7.179	0.8737	9.793
0.50	0.7422	0.7357	0.6693	0.6513	7.292	0.8775	9.825
0.55	0.7331	0.7266	0.6609	0.6526	7.221	0.8901	9.850
0.60	0.7059	0.6995	0.6371	0.6440	6.885	0.9123	9.754
0.65	0.6613	0.6551	0.5959	0.5258	6.540	0.9462	9.889
0.70	0.6005	0.5956	0.5426	0.4881	5.789	0.8129	9.640
0.75	0.5248	0.5203	0.4728	0.4534	5.204	0.8638	9.916
0.80	0.4363	0.4346	0.3952	0.1677	4.112	0.3843	9.424
0.85	0.3370	0.3357	0.3035	0.1259	3.347	0.3737	9.932
0.90	0.2294	0.2285	0.2091	0.0841	2.022	0.3665	8.817
0.95	0.1161	0.1157	0.1046	0.0421	1.154	0.3629	9.941



及

$$g_0(t) = g_1(t) = 0, \quad t > 0, \quad (27)$$

则其准确解为<sup>[3]</sup>

$$U(x, t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^3} e^{-k^2 \pi^2 t} \sin(k\pi x). \quad (28)$$

在每个网格点上分别以  $|e_{i,j}|$  和  $|E_{i,j}|$  表示近似解的绝对误差和百分误差, 即

$$|e_{i,j}| = |u_{i,j} - U_{i,j}|, \quad (29)$$

$$|E_{i,j}| = \frac{|e_{i,j}|}{|U_{i,j}|} \times 100. \quad (30)$$

表 1 给出本文交替分段显-隐式方法与 AGE 方法计算结果的比较。本文方法的分段数  $k = 5$ 。

另外, 当  $\Delta x$  不变,  $r = 2.0$  ( $j = 100$ ) 时的计算结果表明, 本文方法给出近似解的百分误差不超过 6.8, 而 AGE 方法已不能给出满意结果。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] D. J. Evans, A. R. B. Abdullah, Group explicit methods for parabolic equations, *Int. J. Comput. Math.* 14 (1983), 73—105.
- [ 2 ] D. J. Evans, Alternating group explicit method for the diffusion equation, *Appl. Math. Modelling*, 9(1985), 201—206.
- [ 3 ] B. K. 萨乌里耶夫 (Saul'yev), 抛物型方程的网格积分法, 袁兆鼎译, 科学出版社, 1963.
- [ 4 ] D. J. Evans, M. S. Sahimi, The alternating group (AGE) iterative method for solving parabolic equations I: 2-dimensional problems, *Int. J. Comput. Math.* 24(1988), 311—341.
- [ 5 ] D. J. Evans, M. S. Sahimi, The alternating group (AGE) iterative method for solving parabolic equations II: 3-dimensional problems, *Int. J. Comput. Math.* 26(1989), 117—142.
- [ 6 ] D. J. Evans, M. S. Sahimi, Group explicit methods for hyperbolic equations, *Comput. Math. Applic.* 15 (1988), 659—697.
- [ 7 ] D. J. Evans, The AGE Galerkin method for solving two-point boundary value problems, *Comput. Math. Applic.* 16(1988), 1045—1055.
- [ 8 ] M. S. Sahimi, D. J. Evans, Group explicit methods for the numerical solution of the wave equation, *Comput. Math. Applic.* 15(1988), 699—709.
- [ 9 ] R. B. Kellogg, An alternating direction method for operator equations, *SIAM* 12, No. 4(1964).