

求解具有间断系数的 SH 波方程的分步差分方法*

何 柏 荣

(南 开 大 学)

冯 德 益 聂 永 安

(天 津 市 地 震 局)

THE FRACTIONAL STEP DIFFERENCE METHODS FOR SOLVING THE SH WAVE EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

He Bai-rong

(Nankai University)

Feng De-yi Nie Yong-an

(Seismological Bureau of Tianjin)

Abstract

In this paper, three fractional step difference methods are given to solve the SH wave equation with discontinuous coefficients. The stability analysis for one scheme is discussed. To examine the efficiency of these methods, two computational examples are illustrated.

一、引 言

论文[1]、[2]采用有限元和边界元方法讨论了数值求解二维变系数的 SH 波方程问题。本文考虑用分步差分方法求解具有间断系数的二维 SH 波方程问题。在物理上，它是一个比前者更为复杂的介质中 SH 波的传播问题。对于在垂向和横向都不均匀或者分段连续的弹性介质中，描述 SH 波传播的偏微分方程问题可以写成

$$\rho(x, z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x, z) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu(x, z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \delta(x - x^*, z - z^*)g(t), \quad (1)$$

* 1992 年 11 月 10 日收到。

$$-D < x \setminus \{x_r\} < D, \quad 0 < z \setminus \{z_i\} < H, \quad 0 < t \leq T$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad u(x, H, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(-D, z, t) = u(D, z, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, z, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, z, 0) = 0, \quad (4)$$

其中 u 为 SH 波的位移, ρ, μ 分别为介质的密度和拉梅系数, $\delta(x - x^*, z - z^*)$ 为二维 delta 函数, $g(t)$ 为震源的时间函数。我们假定 D 和 H 取得足够大, 以致在时间 $0 < t \leq T$ 内由震源激发的地震波还没来得及到达左、右和下边界。在有限个纵向间断线 $\{x_r\}$ 和横向间断线 $\{z_i\}$ 上, 其连接条件分别为

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_r-0}^I = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_r+0}^{II}, \quad u \Big|_{x=x_r-0}^I = u \Big|_{x=x_r+0}^{II} \quad (5)$$

和

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=z_i-0}^I = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=z_i+0}^{II}, \quad u \Big|_{z=z_i-0}^I = u \Big|_{z=z_i+0}^{II}. \quad (6)$$

又假定

$$c_0 \leq \mu(x, z) \leq c_1 \quad (7)$$

这里 I、II 分别表示两种性质不同的介质, c_0, c_1 为正常数。在二中我们将建立方程(1)–(6)的三个分步差分格式, 在三中对格式(I)进行稳定性分析。最后在四中我们列出对两种不同的物理模型用格式(I)计算得到的数值结果。

二、一致分步差分格式

首先我们将研究区域进行剖分。记时间步长为 τ , x 方向和 z 方向的空间步长分别为 h_1 和 h_2 , 网格 $\bar{\omega}_{h_1}, \bar{\omega}_{h_2}, l_\tau$ 分别为

$$\bar{\omega}_{h_1} = \{x_i = ih_1, i = 0, 1, \dots, I\},$$

$$\bar{\omega}_{h_2} = \{z_j = jh_2, j = 0, 1, \dots, J\},$$

$$l_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{T}{\tau} \right\rfloor\}.$$

假定介质的纵向、横向间断线恰好落在网格上。记 $\Delta_1, \bar{\Delta}_1$ 分别表示 x 方向的向前、向后差商算子, $\Delta_2, \bar{\Delta}_2$ 分别表示 z 方向的向前、向后差商算子。定义网格函数 $[u]_{ij}^n = u(x_i, z_j, t_n)$, 它对时间的向前、向后和中心差商分别表示为 u_i, \bar{u}_i 和 u_i^0 。为了简化格式, 便于讨论, 我们引入下列记号:

$$\mu_{kl} = \mu \left(x + \frac{k h_1}{2}, z + \frac{l h_2}{2} \right), \quad k, l = -1, 1,$$

$$\mu_{0l} = \frac{1}{2} (\mu_{-1l} + \mu_{1l}), \quad l = -1, 1,$$

$$\mu_{k0} = \frac{1}{2} (\mu_{k-1} + \mu_{k1}), \quad k = -1, 1,$$

$$\mu_{00} = \frac{1}{4} (\mu_{-1-1} + \mu_{-11} + \mu_{1-1} + \mu_{11}).$$

系数 ρ 也可同样地定义。我们再引入下列的差分算子:

$$\Lambda_1[u]_{ij} = \begin{cases} \Delta_1(\mu_{-10}\bar{\Delta}_1[u]_{ij}), & (x_i, z_j) \text{ 在介质内部,} \\ \Delta_1(\mu_{-11}\bar{\Delta}_1[u]_{ij}), & (x_i, z_j) \text{ 在自由面上,} \end{cases}$$

$$\Lambda_2[u]_{ij} = \begin{cases} \Delta_2(\mu_{0-1}\bar{\Delta}_2[u]_{ij}), & (x_i, z_j) \text{ 在介质内部,} \\ \frac{2}{h_2} \mu_{01}\Delta_2[u]_{ij}, & (x_i, z_j) \text{ 在自由面上.} \end{cases}$$

再记

$$P = \begin{cases} \rho_{00}, & (x_i, z_j) \text{ 在介质内部,} \\ \rho_{01}, & (x_i, z_j) \text{ 在自由面上.} \end{cases}$$

利用积分插值法对方程(1)的空间变量进行离散,其半离散格式为

$$P \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_{ij} = \Lambda_1[u]_{ij} + \Lambda_2[u]_{ij} + g(t) \Big|_{i^*, j^*} + O(h_1^2 + h_2^2), \quad \left(i^* = \frac{x^*}{h_1}, j^* = \frac{z^*}{h_2} \right) \quad (8)$$

在纵向间断线 $\{x_r\}$ 和横向间断线 $\{z_s\}$ 上, 网格点上的半离散格式与(8)一致, 但是它们的截断误差阶分别为 $O(h_1 + h_2^2)$ 和 $O(h_1^2 + h_2)$ [3]. 我们写出下列三种不同形式的分步差分格式:

$$(I) \begin{cases} P[\ddot{u}(t) - 2u(t) + u(t - \tau)]/\tau^2 = \Lambda_1[\theta\ddot{u}(t) + (1 - 2\theta)u(t) + \theta u(t - \tau)] \\ \quad + \Lambda_2[(1 - 2\theta)u(t) + 2\theta u(t - \tau)] + g(t) \Big|_{i^*, j^*}, \end{cases} \quad (9)$$

$$P[u(t + \tau) - \ddot{u}(t)]/\tau^2 = \theta\Lambda_2[u(t + \tau) - u(t - \tau)], \quad (10)$$

$$(II) \begin{cases} P[\ddot{u}(t) - 2u(t) + u(t - \tau)]/\tau^2 = \Lambda_1[\theta\ddot{u}(t) + (1 - 2\theta)u(t) + \theta u(t - \tau)] \\ \quad + \Lambda_2 u(t) + g(t) \Big|_{i^*, j^*}, \end{cases} \quad (11)$$

$$P[u(t + \tau) - 2u(t) + u(t - \tau)]/\tau^2 = \Lambda_1[\theta\ddot{u}(t) + (1 - 2\theta)u(t) + \theta u(t - \tau)] \\ + \Lambda_2[\theta u(t + \tau) + (1 - 2\theta)u(t) + \theta u(t - \tau)] + g(t) \Big|_{i^*, j^*}, \quad (12)$$

$$(III) \begin{cases} \left(E - \frac{\tau^2}{2} P^{-1} \Lambda_1 \right) \ddot{u}(t) = 2u(t) + g(t) \Big|_{i^*, j^*}, \end{cases} \quad (13)$$

$$\left(E - \frac{\tau^2}{2} P^{-1} \Lambda_2 \right) [u(t + \tau) + u(t - \tau)] = \ddot{u}(t), \quad (14)$$

其中 E 为单位算子, $\ddot{u}(t)$ 为过渡值, θ 称权因子。利用分步差分格式 (I)、(II)、(III) 求解偏微分方程问题则要比利用(1)的一般差分格式优越得多, 前者每一步形成的代数方程组的系数矩阵是三角的, 用追赶法求解是很简便的。

三、格式的稳定性分析

定义网格函数空间 H_h 上的内积

$$(u, v) = h_1 h_2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} u_{ij} v_{ij},$$

$$(u, v^{(1)}) = h_1 h_2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J-1} u_{ij} v_{ij},$$

$$(u, v^{(2)}) = h_1 h_2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^J u_{ij} v_{ij},$$

其对应的范数分别为

$$\|u\|^2 = (u, u), \|u^{(1)}\|^2 = (u, u^{(1)}), \|u^{(2)}\|^2 = (u, u^{(2)}), \quad \forall u, v \in H_h.$$

引理 1. 对于任意两个网格函数 $\{u_{ij}\}$ 和 $\{v_{ij}\}$, $j = 0, 1, \dots, J$, 有

$$\sum_{j=1}^{J-1} u_{ij} \Delta_2 v_{ij} h_2 = - \sum_{j=1}^J v_{ij} \Delta_2 u_{ij} h_2 - u_{i0} v_{i1} + u_{iJ} v_{iJ}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{J-1} u_{ij} \Delta_2 (\mu_{0-1} \bar{\Delta}_2 w_{ij}) h_2 &= - \sum_{j=1}^J \mu_{0-1} \bar{\Delta}_2 w_{ij} \bar{\Delta}_2 u_{ij} h_2 + u_{iJ} (\mu_{0-1})_J \bar{\Delta}_2 w_{iJ} \\ &\quad - u_{i0} (\mu_{01})_{i0} \Delta_2 w_{i0}. \end{aligned} \quad (16)$$

证明. 在(15)式中令 $v_{ij} = \mu_{0-1} \bar{\Delta}_2 w_{ij}$, 整理后即得(16)式.

引理 2. 对于给定在均匀网格 $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2}$ 上的任意网格函数 u_{ij} , 成立不等式 [4](第 300 页)

$$\|u_{ij}\|_c^2 \leq \varepsilon_1 \sum_{j=1}^J |\bar{\Delta}_2 u_{ij}|^2 h_2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{H} \right) \sum_{j=1}^J |u_{ij}|^2 h_2, \quad (17)$$

$$\|u_{ij}\|_c^2 \leq \varepsilon_1 \sum_{i=1}^I |\bar{\Delta}_1 u_{ij}|^2 h_1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{2D} \right) \sum_{i=1}^I |u_{ij}|^2 h_1, \quad (18)$$

其中 ε_1 是任意的正常数, $H = Jh_2$, $2D = Ih_1$, $\|u_{ij}\|_c = \max_i |u_{ij}|$, $\|u_{ij}\|_c = \max_j |u_{ij}|$.

注 1. 本文中的 M 均为不依赖于 h_1, h_2, τ 和网格函数的正常数.

在分步差分格式 (I)、(II)、(III) 中消去过渡函数 $\tilde{u}(\tau)$, 则得到它们的等价形式. 差分格式 (I)、(II)、(III) 的等价形式可分别写成

$$\begin{aligned} P u_{i\tau} &= (\Lambda_1 + \Lambda_2) [\theta u(\tau + \tau) + (1 - 2\theta)u(\tau) + \theta u(\tau - \tau)] \\ &\quad - 2\tau^3 \theta^2 P^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2 u_i^0 + g(\tau)|_{i^*j^*}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} P u_{i\tau} &= (\Lambda_1 + \Lambda_2) [\theta u(\tau + \tau) + (1 - 2\theta)u(\tau) + \theta u(\tau - \tau)] \\ &\quad - \tau^4 \theta^2 P^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2 u_{i\tau} + g(\tau)|_{i^*j^*}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} P u_{i\tau} &= \frac{1}{2} (\Lambda_1 + \Lambda_2) [u(\tau + \tau) + u(\tau - \tau)] \\ &\quad - \frac{\tau^2}{4} P^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2 [u(\tau + \tau) + u(\tau - \tau)] + g(\tau)|_{i^*j^*}. \end{aligned} \quad (21)$$

注意到研究区域的规则性(矩形)和边界条件的齐次性. 要研究分步格式 (I)、(II)、(III) 的适定性, 只需研究它们的等价形式的相容性、稳定性和收敛性^[5,6]. 从(19)---(21)式看出, 如果微分方程问题的真解充分光滑, 则它们对(1)的逼近阶都是 $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$, 因而格式对微分方程的逼近是相容的. 但是, 在我们讨论的问题中, u 对 t 的光滑性能够保证, 而对 x 和 z 方向的光滑性却较低. 在一般情形下, (20)的精度高于(19), 而(19)的精度又高于(21).

现在仅考虑格式(I)的稳定性, 至于格式(II)、(III)的稳定性也可作类似的讨论. 我们写出格式(I)的等价形式(19)的误差函数 $w(x, z, \tau)$ 方程

$$Pw_{i\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2)[\theta w(i + \tau) + (1 - 2\theta)w(i) + \theta w(i - \tau)] - 2\tau^3\theta^2 P^{-1}\Lambda_1\Lambda_2 w_i^0 + \phi(i), \quad (22)$$

其中 $\phi(i)$ 为格式 (I) 逼近式(1)、(2)、(3)、(5)、(6)的截断误差。在所有内点上其阶为 $\phi = O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$, 而在纵、横间断线和自由面上其阶为 $\phi = O(\tau^2 + h_1 + h_2^2)$ 或 $\phi = O(\tau^2 + h_1^2 + h_2)$ 。为了便于讨论, 取 $h = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$, $\tau = O(h)$, 则可将 ϕ 的误差阶统一地写成

$$\phi = \begin{cases} O(\tau^2 + h^2), & \text{所有内点上,} \\ O(\tau + h), & \text{纵、横间断线或自由面上.} \end{cases}$$

我们再将截断误差 ϕ 分成两部分 $\phi = \phi_1 + \phi_2$, 其中

$$\phi_1 = \begin{cases} O(\tau^2 + h^2), & \text{所有内点上,} \\ O(\tau + h), & \text{纵向间断线 } \{x_r\} \text{ 上,} \end{cases} \quad (23)$$

$$\phi_2 = \begin{cases} O(\tau^2 + h^2), & \text{所有内点上,} \\ O(\tau + h), & \text{横向间断线 } \{z_r\} \text{ 或自由面上.} \end{cases} \quad (24)$$

我们知道, $\phi_{i\tau}, \phi_{2i}$ 相应地与 ϕ_1, ϕ_2 有相同的阶。

在(22)式两端同时加 $w^0 = \theta w(i + \tau) + (1 - 2\theta)w(i) + \theta w(i - \tau)$, 则得

$$Pw_{i\tau} - (\Lambda_1 + \Lambda_2 - E)w^0 = -2\tau^3\theta^2 P^{-1}\Lambda_1\Lambda_2 w_i^0 + w^0 + \phi_1 + \phi_2. \quad (25)$$

容易验证, $-\Lambda_1, -\Lambda_2$ 在空间 H_k 上的内积意义下是自共轭、正定、有界算子。利用引理 1, 以及注意到边界条件, 则有

$$-((\Lambda_1 + \Lambda_2 - E)u, u) \geq M_0(\|\Delta_1 u^{(1)}\|^2 + \|\Delta_2 u^{(2)}\|^2 + \|u\|^2), \quad (26)$$

其中 $M_0 = \min\{1, c_0\}$ 。

(25)式两端同时和 $2\tau w_i^0$ 作内积, 得

$$\begin{aligned} & \tau \left[(Pw_{i\tau}, w_i) + \tau^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) ((\Lambda_1 + \Lambda_2 - E)w_i, w_i) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4} ((\Lambda_1 + \Lambda_2 - E)(w(i) + w(i + \tau)), w(i) + w(i + \tau)) \right]_{i\tau} \\ & = -4\tau^4\theta^2 (P^{-1}\Lambda_1\Lambda_2 w_i^0, w_i^0) + 2\tau(\phi_1 + \phi_2, w_i^0) + 2\tau(w^0, w_i^0). \end{aligned} \quad (27)$$

容易验证

$$(P^{-1}\Lambda_1\Lambda_2 w_i^0, w_i^0) \geq 0 \quad (28)$$

和

$$\begin{aligned} (\phi_k, w_i^0) & = \frac{1}{2} (\phi_k, w(i + \tau) + w(i))_{i\tau} - \frac{1}{2} (\phi_{ki}, w(i) \\ & \quad + w(i - \tau)), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (29)$$

令

$$\begin{aligned} J(i + \tau) & = (Pw_{i\tau}, w_i) + \tau^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) ((\Lambda_1 + \Lambda_2 - E)w_i, w_i) \\ & \quad - \frac{1}{4} ((\Lambda_1 + \Lambda_2 - E)(w(i) + w(i + \tau)), w(i) + w(i + \tau)), \end{aligned} \quad (30)$$

则当 $\theta \geq \frac{1}{4}$ 时,

$$J(t+\tau) \geq M_1(\|w_t\|^2 + \|w(t) + w(t+\tau)\|_t^2), \quad (31)$$

其中 $\|w\|_t^2 = \|w\|^2 + \|\Delta_1 w^{(1)}\|^2 + \|\Delta_2 w^{(2)}\|^2$. 于是, 将(29)、(30)代入(27), 并注意到(28), 得

$$\begin{aligned} & \tau[J(t+\tau) - (\phi_1 + \phi_2, w(t) + w(t+\tau))]_t \\ & \leq -\tau(\phi_{1t} + \phi_{2t}, w(t) + w(t-\tau)) + 2\tau(w^0, w^0). \end{aligned} \quad (32)$$

现在估计(32)式的右端, 首先有

$$\begin{aligned} |(\phi_1, u)| &= h_1 h_2 \left| \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{J-1} \phi_{1ij} u_{ij} \right| \leq h_1 \sum_{i=1}^{l-1} \left(\max_j |u_{ij}| \sum_{j=1}^{J-1} h_2 |\phi_{1ij}| \right) \\ &\leq \varepsilon_2 h_1 \sum_{i=1}^{l-1} \max_j |u_{ij}|^2 + \frac{h_1}{4\varepsilon_2} \sum_{i=1}^{l-1} \left(\sum_{j=1}^{J-1} h_2 |\phi_{1ij}| \right)^2. \end{aligned} \quad (33)$$

同理

$$|(\phi_2, u)| \leq \varepsilon_2 h_2 \sum_{i=1}^{J-1} \max_j |u_{ij}|^2 + \frac{h_2}{4\varepsilon_2} \sum_{i=1}^{J-1} \left(\sum_{j=1}^{l-1} h_1 |\phi_{2ij}| \right)^2. \quad (34)$$

利用引理 2, 经过推导和运算, 得到(32)式右端的第一项估计

$$\begin{aligned} -\tau(\phi_{1t} + \phi_{2t}, w(t) + w(t-\tau)) &\leq \tau \varepsilon_2 h_1 \sum_{i=1}^{l-1} \max_j |w_{ij}^n + w_{ij}^{n-1}|^2 \\ &+ \frac{\tau h_1}{4\varepsilon_2} \sum_{i=1}^{l-1} \left(\sum_{j=1}^{J-1} h_2 |\phi_{1ij}^n| \right)^2 + \tau \varepsilon_2 h_2 \sum_{i=1}^{J-1} \max_j |w_{ij}^n + w_{ij}^{n-1}|^2 \\ &+ \frac{\tau h_2}{4\varepsilon_2} \sum_{i=1}^{J-1} \left(\sum_{j=1}^{l-1} h_1 |\phi_{2ij}^n| \right)^2 \leq \tau \varepsilon_2 M_2 J(t) \\ &+ \frac{\tau}{4\varepsilon_2} \left[h_1 \sum_{i=1}^{l-1} \left(\sum_{j=1}^{J-1} h_2 |\phi_{1ij}^n| \right)^2 + h_2 \sum_{i=1}^{J-1} \left(\sum_{j=1}^{l-1} h_1 |\phi_{2ij}^n| \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

(32)式右端的第二项有估计

$$2\tau(w^0, w^0) \leq \tau(\|w^0\|^2 + \|w^0\|^2) \leq \tau M_3(J(t+\tau) + J(t)). \quad (36)$$

记 $I_1(t) = h_1 \sum_{i=1}^{l-1} \left(\sum_{j=1}^{J-1} h_2 |\phi_{1ij}^n| \right)^2$, $I_2(t) = h_2 \sum_{i=1}^{J-1} \left(\sum_{j=1}^{l-1} h_1 |\phi_{2ij}^n| \right)^2$. 将(35)、(36)式代入(32)式, 得到

$$\begin{aligned} J(t+\tau) - (\phi_1(t) + \phi_2(t), w(t+\tau) + w(t)) &\leq J(t) - (\phi_1(t-\tau) \\ &+ \phi_2(t-\tau), w(t) + w(t-\tau)) + \tau M_3(J(t+\tau) \\ &+ J(t)) + \tau \varepsilon_2 M_2 J(t) + \frac{\tau}{4\varepsilon_2} [I_1(t) + I_2(t)]. \end{aligned}$$

整理上式, 有

$$\begin{aligned} J(t+\tau) - \frac{1}{1-\tau M_3} (\phi_1(t) + \phi_2(t), w(t+\tau) + w(t)) &\leq J(t) \\ - \frac{1}{1-\tau M_3} (\phi_1(t-\tau) + \phi_2(t-\tau), w(t) + w(t-\tau)) \\ + \frac{\tau(M_3 + \varepsilon_2 M_2)}{1-\tau M_3} J(t) + \frac{\tau}{4(1-\tau M_3)\varepsilon_2} [I_1(t) + I_2(t)]. \end{aligned} \quad (37)$$

设 $t = n\tau$, 递推上式, 则归纳得到下列的式子:

$$\begin{aligned} J(t_{n+1}) &= \frac{1}{1 - \tau M_3} (\phi_1(t_n) + \phi_2(t_n), w(t_{n+1}) + w(t_n)) \\ &\leq J(t_1) - \frac{1}{1 - \tau M_3} (\phi_1(0) + \phi_2(0), w(t_1) + w(0)) \\ &\quad + \frac{\tau(M_4 + \varepsilon_2 M_2)}{1 - \tau M_3} \sum_{n'=1}^n J(t_{n'}) + \frac{\tau}{4(1 - \tau M_3)\varepsilon_2} \sum_{n'=1}^n [I_1(t_{n'}) \\ &\quad + I_2(t_{n'})]. \end{aligned} \quad (38)$$

类似于(35)式的推导, 可有下列不等式

$$|(\phi_1(t) + \phi_2(t), w(t + \tau) + w(t))| \leq \varepsilon_3 M_5 J(t + \tau) + \frac{1}{4\varepsilon_3} [I_3(t) + I_4(t)], \quad (39)$$

其中 $I_3(t) = h_1 \sum_{i=1}^{I-1} \left(\sum_{j=1}^{J-1} h_2 |\phi_{ij}^n| \right)^2$, $I_4(t) = h_2 \sum_{i=1}^{J-1} \left(\sum_{j=1}^{I-1} h_1 |\phi_{ij}^n| \right)^2$. 由(23)、(24)式看出, $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$. 于是, 将(39)式代入(38)式, 得到

$$\begin{aligned} J(t_{n+1}) &\leq J(t_1) + \frac{\varepsilon_3 M_5}{1 - \tau M_3} J(t_{n+1}) + \frac{\tau(M_4 + \varepsilon_2 M_2)}{1 - \tau M_3} \sum_{n'=1}^n J(t_{n'}) \\ &\quad + \frac{\tau}{4(1 - \tau M_3)\varepsilon_2} \sum_{n'=1}^n [I_1(t_{n'}) + I_2(t_{n'})] \\ &\quad + \frac{1}{4(1 - \tau M_3)\varepsilon_3} [I_3(t_n) + I_4(t_n)]. \end{aligned}$$

取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$, $\varepsilon_3 = \frac{1 - \tau M_3}{4M_5}$, 则上式可以写成

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} J(t_{n+1}) &\leq J(t_1) + \frac{\tau M_5}{1 - \tau M_3} \sum_{n'=1}^n J(t_{n'}) + \frac{\tau}{1 - \tau M_3} \sum_{n'=1}^n [I_1(t_{n'}) + I_2(t_{n'})] \\ &\quad + \frac{M_5}{(1 - \tau M_3)^2} [I_3(t_n) + I_4(t_n)]. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} J(t_{n+1}) &\leq M_7 \left\{ J(t_1) + \tau \sum_{n'=1}^n J(t_{n'}) + \tau \sum_{n'=1}^n [I_1(t_{n'}) + I_2(t_{n'})] \right. \\ &\quad \left. + I_3(t_n) + I_4(t_n) \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

定理 1. 当 $\theta \geq \frac{1}{4}$ 时, 分步差分格式(I)在范数 $\sqrt{J(t)}$ 的意义下是无条件稳定的.

四、数值算例

我们用格式(I)计算了图1(a)、(b)所示的两个物理模型. 图中的 s 为线震源, 它在与 y 轴平行的方向上无限延伸, 由它激发出的地震波是柱对称的. 震源函数采用了时间宽度为 0.2 秒的正弦函数

$$g(t) = \begin{cases} c \sin 10\pi t, & 0 \leq t \leq 0.2, \\ 0, & t < 0, t > 0.2, \end{cases}$$

其中 c 为常数。

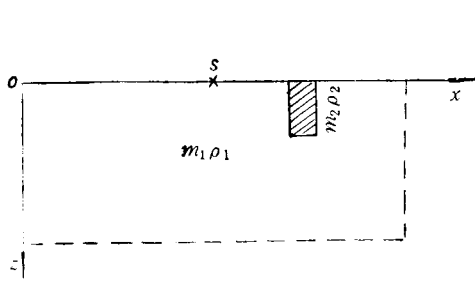


图 1(a)

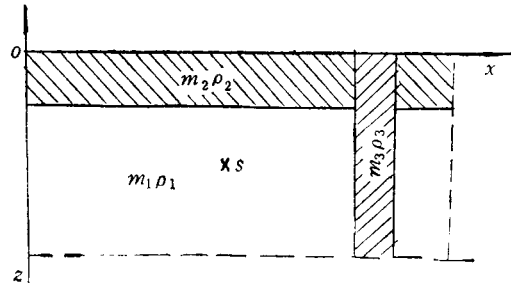


图 1(b)

模型 1 为用直立的低速异常体嵌入均匀介质来模拟断层. s 位于地表, 离第 2 层的距离 1.2 公里处. 模型 2 则为用低速异常体嵌入分层介质来模拟断层. s 位于离地表深度 20 公里, 离第 3 层的距离 24 公里处. 我们分别考察它们在地表的地震响应, 模型 1、2 的各介质的部分几何、力学参数由表 1(a)、(b) 给出. 图 2、图 3 分别为模型 1 以震中为零公里, 沿 x 轴正方向和反方向的两排观测点上计算得到的理论地震图. 图 4、5、6 为模型 2

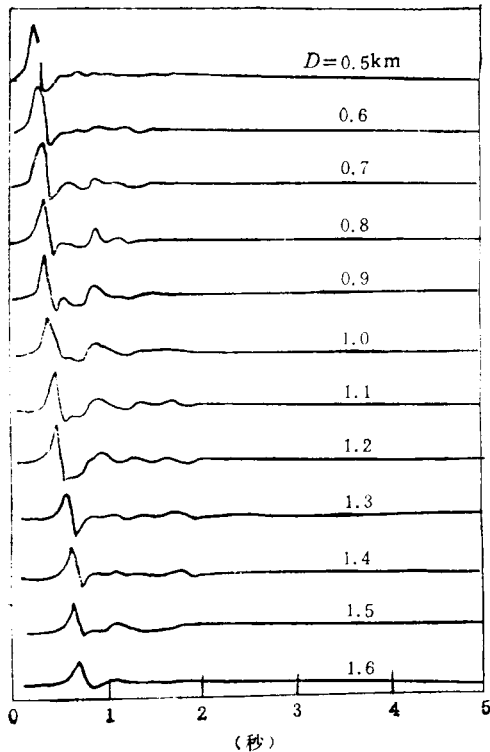


图 2

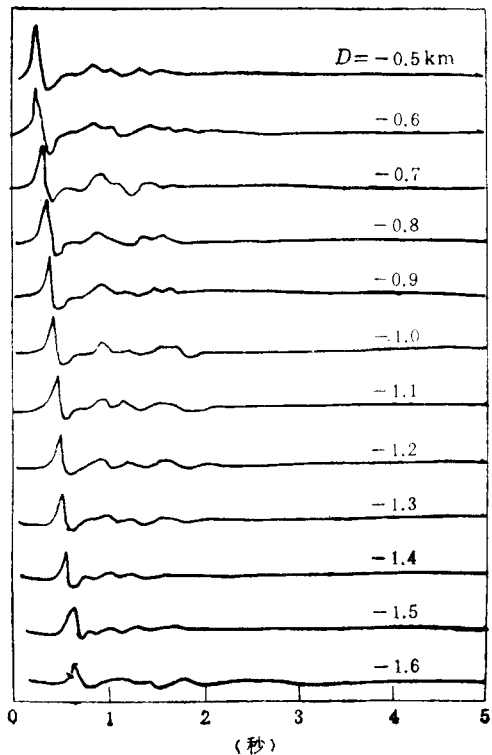


图 3

以震中为零公里, 沿地表在正方向的系列观测点上计算得到的理论地震图, 上述的地震图在物理上是可信的。

表 1(a) 模型 1 的几何、力学参数

层号	厚度(公里)	宽度(公里)	拉梅系数 μ (公斤/米·秒 ²)	密度 ρ (克/厘米 ³)
1	$+\infty$	$+\infty$	1.62×10^9	1.8
2	0.6	0.1	1.00×10^9	1.0

表 1(b) 模型 2 的几何、力学参数

层号	厚度(公里)	宽度(公里)	拉梅系数 μ (公斤/米·秒 ²)	密度 ρ (克/厘米 ³)
1	$+\infty$	$+\infty$	2.52×10^9	2.8
2	4	$+\infty$	8.40×10^8	2.1
3	$+\infty$	1	1.40×10^8	1.4

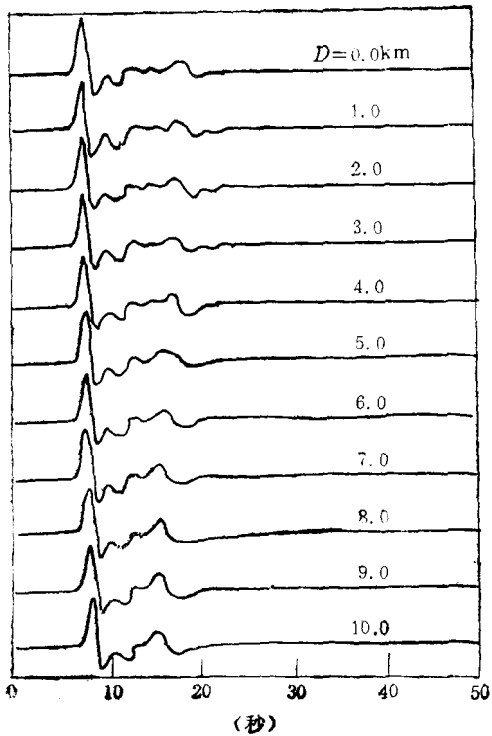


图 4

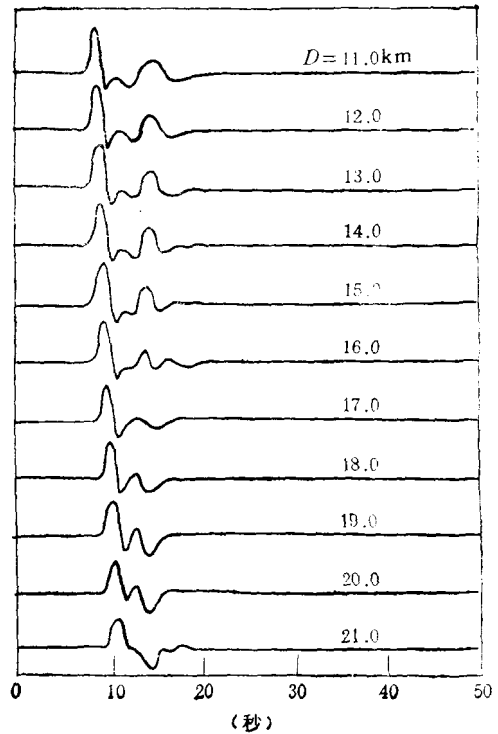


图 5

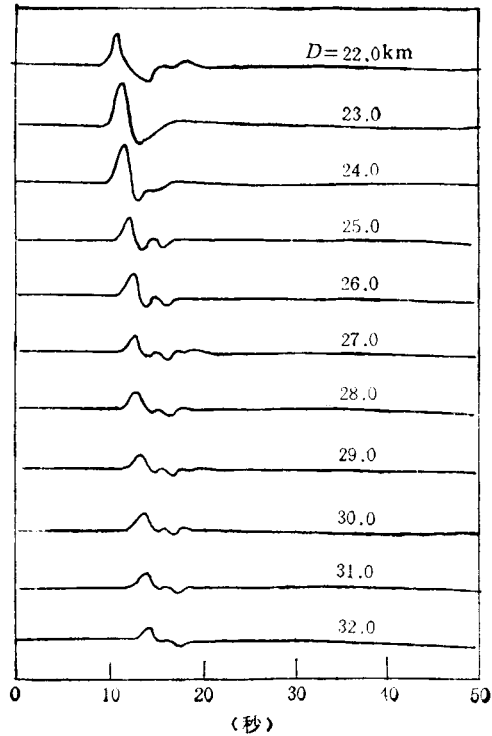


图 6

参 考 文 献

- [1] 刘晶波, 廖振鹏. 地震波散射问题的数值解, 地震工程与工程振动, 7: 2(1987)1—18.
- [2] 刘殿魁, 杜修力, 各向异性介质中 SH 波传播的边界元方法, 地震工程与工程振动, 7: 2(1987)19—24.
- [3] 何柏荣, 冯德益, 王振彪, 葛晓斌, 计算二维理论地震图的分步方法, 计算物理, 6: 3(1989)309—320.
- [4] A. A. 萨马尔斯基, B. B. 安德烈耶夫, 椭圆型方程差分方法, 科学出版社, 1984.
- [5] 汤怀民, 线性双曲型方程某些交替方向差分格式的稳定性与收敛性, 高等学校计算数学学报, 6: 3(1984)242—249.
- [6] G. I. Marchuk, Splitting and Alternating Direction Methods, Handbook of Numerical Analysis, General Editors: P. G. Ciarlet, J. L. Lions, Elsevier Science Publishers B. V., 1990, 197—460.
- [7] A. A. Самарский, Теория Разностных Схем. Москва «Наука», 1983.