

求解非线性悬梁方程行波解的变分算法 — Mountain Pass 算法^{*1)}

陈越

(浙江大学数学系)

A VARIATIONAL NUMERICAL METHOD FOR FINDING THE TRAVELING WAVES OF NONLINEAR SUSPENSION BEAM EQUATIONS — THE MOUNTAIN PASS ALGORITHM

Chen Yue

(Dept. of Math., Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

On solving differential equations, the classical numerical algorithms require us to have some knowledge of the solutions before we find them. For examples, to solve an ordinary differential equation of order 4, the classical Runge-Kutta method requires the initial data of the solution together with its first, second, and third derivatives; the generalized Newton's method depends severely on the initial guess; etc. This paper presents a variational algorithm, based on the Mountain Pass theory, for solving the traveling wave solutions of nonlinear suspension beam equations. Some results of the numerical experiments are shown to indicate that this algorithm does overcome some of the shortcomings of the classical methods.

§ 1. 引言

经典的求解微分方程初—边值问题的算法,无不要求我们事先对解的某些性质有所了解.例如利用 Runge-Kutta 法解四阶常微分方程,我们至少需要知道解及其 1—3 阶导数的初值;又如广义牛顿法则对于初始点的选取有较高的要求,等等.如果事先对所求之解没有足够的了解,就给求解一般(特别是非线性)问题带来困难.

1973年由 Ambrosetti 和 Rabinowitz 提出的 Mountain Pass 理论(一译“爬山理论”,又译“山径理论”)现已发展成为讨论非线性泛函临界值问题的一个重要方法之一.

* 1998年5月15日收到.

1) 国家教育委员会留学回国人员资助费支持项目,浙江大学曹光彪高科技发展基金资助.

其几何直观意义^[5]是: 由盆地中心出发, 欲翻山到盆地外面, 必有一条最省力的路径; 即从四周山峰的最低处翻越, 经过的顶点高度为一临界值. 对应的临界点(通常是鞍点)即是该泛函对应微分方程的一个弱解, 故此原理也是研究非线性微分方程弱解存在性的一个有力工具. 下面引用 Brezis 和 Nirenberg^[6] 给出的 Mountain Pass 引理:

定理 (Standard Mountain Pass Lemma). 设 E 是一个实 Banach 空间, 泛函 $I \in C^1(E, R)$, 且 B_ρ 为 E 中以 ρ 为半径的球. 设

(I1) 对于某一 $\omega \in E$, 存在常数 $\rho, \alpha > 0$ 使得

$$I|_{\omega+\partial B_\rho} \geq I(\omega) + \alpha.$$

(I2) 存在 $e \in E \setminus \bar{B}_\rho$ 使得 $I(e) \leq I(\omega)$, 则在 E 中存在序列 $\{u_n\}$, 满足当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$I(u_n) \rightarrow s \text{ 且 } \|I'(u_n)\| \rightarrow 0,$$

这里 $s = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u)$, 其中 $\Gamma = \{g \in C([0,1], E) | g(0) = \omega, g(1) = e\}$.

所谓悬梁振动方程, 是指形如

$$u_{tt} + u_{xxxx} + f(u) = 0 \quad (1.1)$$

的方程, 其中 $u(t, x)$ 代表悬梁受力后的位移, $f(u)$ 为悬梁的回复力函数, 满足条件 $f(0) = 0$. 这里考虑 $f(u)$ 为非线性函数的情况.

在研究方程的行波解时, 我们通常设 $u(t, x) = z(x - ct)$, 其中 c 为某一给定波行速度, 则原偏微分方程 (1.1) 变为以下常微分方程:

$$Z^{(4)} + c^2 z'' + f(z) = 0. \quad (1.2)$$

我们需要找出在 $\pm\infty$ 处各阶导数均趋于 0 的解 $z(x)$.

在 $H^2(R)$ 中考虑泛函

$$I(z) = \int_R \left(\frac{|z''|^2}{2} - \frac{c^2 |z'|^2}{2} + F(z) \right) dx, \quad (1.3)$$

其中 $F(z) = \int_0^z f(u) du$, 范数 $\|z\| = \left(\int_R (|u''|^2 - c^2 |u'|^2 + |u|^2) dx \right)^{1/2}$. 本文作者在 [1] 中分别验证了 I 满足 Mountain Pass 定理的两项基本假设 (I1), (I2), 且所定义之范数当 $c^2 < 2$ 时与 H^2 空间的范数等价. 一般情况下, 要得到极值的存在性结论, 还要求泛函 I 满足一定列紧性条件, 如 Palais-Smale 条件^[7]. 对于 (1.3) 给出的 $I(z)$, 作者利用集中列紧性原理也从理论上得到了 Mountain Pass 定理的结论, 即非平凡临界点的存在性 (这里局部极小 $\omega = 0$ 为平凡临界点).

注意到我们对方程 (1.2) 边界条件的了解仅限于在无穷远处函数及各阶导数为 0, 而这样的条件用于一些经典算法 (如 Runge-Kutta 算法), 我们则只能得到一个平凡解 $z(x) \equiv 0$.

§ 2. 算法基本步骤

在利用 Mountain Pass 原理进行数值计算时, 我们考虑有限区间 $[-L, L]$, 其中 L 取充分大以保证解 $z(\pm L) \approx 0$. 将区间 M 等分, 节点间距 $h = \frac{2L}{M}$, 则 $x_i = -L + ih$ ($i = 0, 1, \dots, M$). 我们的基本思路是首先找到 I 的一个局部极小点 $\omega(x)$ 作为路径的一端, 存为 $z(0, i)$, 即 $z(0, i) = \omega(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, M$). 再找到另一个比 ω 更“低”的点 $e(x)$ 满足 $I(e) \leq I(\omega)$, 将之作为路径的另一端, 存在 $z(N, i)$, 即 $z(N, i) = e(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, M$), 这里 $(N + 1)$ 为路径上分布的节点数.

从一条简单的初始路径 Γ_0 (例如连接 ω 和 e 的简单直线) 出发, 计算并找出该路径中使得 $I(z)$ 取最大值的节点函数 $z(j_{\max}, i)$ ($i = 0, 1, \dots, M$): 我们将此点沿“最速下降方向”下推, 并相应调整周围节点的分布, 得到一条改进路径 Γ_1 . 不断重复上述步骤直至峰点不能被进一步向下推进. 这个过程中产生的一系列峰点所对应的节点函数即是 Mountain Pass 原理中的 $\{u_n\}$. 理论方面论证的结果表明, 这样的函数列必收敛到一个非平凡的极限函数, 也就是相应的微分方程的非平凡弱解. 因此当峰点不能被进一步向下推进时, 我们可以认为最低峰点对应的节点函数 $z(j_{\max}, i)$ ($i = 0, 1, \dots, M$) 即为我们所求的方程 (1.2) 的数值解.

2.1 初始点的选取

对于满足一定条件的 $f(z)$, [1] 中证明了以下两个结论:

(1) $\omega = 0$ 是 I 的一个局部极小点, 则在进行数值计算时, 路径的一个端点函数可取为 $z(0, i) = 0, i = 0, 1, \dots, M$.

(2) 任取 $v \in H_0^2$, 且 $v \leq 0$, 我们总可以取 $\lambda_0 > 0$ 充分小, 使得 $u_0(x) = v(\lambda_0 x)$ 满足 $\int_R (|u_0''|^2 - c^2|u_0'|^2) dx < 0$. 进一步有 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{I(Au_0)}{A} = -\infty$, 即可取 $A_0 > 0$ 充分大, 使得 $I(A_0 u_0) < I(\omega) = 0$. 根据这一结论, 我们可任取 $v \in H^2[-1, 1], v \leq 0$, 通过简单计算即容易得到满足条件的 λ_0 和 A_0 . 将区间端点调整为 $L' = \max\left\{L, \frac{1}{\lambda_0}\right\}$, 并调整相应的 h . 令 $z(N, i) = A_0 v(\lambda_0, x_i), i = 0, 1, \dots, M$, 为路径的另一端点函数.

2.2 初始路径的建立

通常初始路径 Γ_0 就取为连接两端点 ω 和 e 的直线, 且令各节点函数在路径上均匀分布:

$$z(j, i) = z(0, i) + \frac{j}{N}(z(N, i) - z(0, i)) \quad i = 0, 1, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (2.1)$$

为方便起见, 以下将 $z(j, i), i = 0, 1, \dots, M$ 记作 Z_j .

但一般情况下, e 点的初选往往距 ω 点甚远, 至使路径过长, 节点分布稀疏, 从而对计算结果产生不利影响. 在这里我们可将 e 点的位置作一改进, 即沿 Γ_0 计算各节点函数的泛函值 $I(Z_j)$ ($j \geq 1$). 一旦发现 $I(Z_{j_0}) \leq I(Z_0)$, 即令 Z_{j_0} 取代 Z_N , 并重新由 (2.1) 式确定缩短后的 Γ_0 .

2.3 峰点的计算

首先沿路径 Γ 计算各节点函数的泛函值 $I(Z_j)$, 取其最大值为峰点值 $I(Z_{j_{\max}})$. 当然, 这样的结果是比较粗糙的, 我们进一步改善结果如下:

(1) 当 $1 \leq j_{\max} \leq N-1$ 时, 我们先考虑连接 $Z_{j_{\max}}$ 与 $Z_{j_{\max}+1}$ 的直线, 希望在连线上找到一个更好的峰点. 即求 $\alpha \in [0, 1)$ 使得 $I(Z_{j_{\max}} + \alpha Z)$ 为连线上最大值, 其中 $Z = Z_{j_{\max}+1} - Z_{j_{\max}}$. 具体做法为:

$$(s1) \text{ 令 } v_0 = Z_{j_{\max}+1}, \text{ 计算 } v_{i+1} = \frac{1}{2}(Z_{j_{\max}} + v_i);$$

(s2) 若 $I(v_{i+1}) > I(Z_{j_{\max}})$, 则过三点 $Z_{j_{\max}}$, v_{i+1} , 及 $\frac{1}{2}(Z_{j_{\max}} + v_{i+1})$ 可确定一条二次曲线, 通过求解二次曲线闭区间内的最大值点即可优化 $Z_{j_{\max}}$ 的位置^[8]. 否则, 若 $\|v_{i+1} - Z_{j_{\max}}\| < \varepsilon$, 则 $\alpha = 0$, 不改变 $Z_{j_{\max}}$.

然后再用类似方法在 $Z_{j_{\max}}$ 与 $Z_{j_{\max}-1}$ 之间优化 $Z_{j_{\max}}$ 的位置.

(2) 当路径的改变造成节点间距过大时, 有可能出现 $j_{\max} = 0$ 的情况, 这时计算中断而得到 $z(x) = \omega(x) \equiv 0$ 是方程 (1.2) 的解, 但并非我们要求的非平凡解. 一个改进的方法是在此增加一个判断: 若 $I(Z_{j_{\max}}) = 0$, 则找 $1 \leq i_0 \leq N$ 使得 $\|Z_{i_0}\| = \min_{1 \leq i \leq N} \|Z_i\|$, 并令 $Z_N = Z_{i_0}$, 即将当前路径上离 Z_0 最近的点记为路径的另一端点, 将此路径重新初始化, 同时设定适当的最速下降步长 (详见 2.4 节), 例如可取 $\text{desmax} = \|Z_N\|$. 这里 Mountain Pass 原理保证我们可以在有限步之内得到有非零峰点的路径, 则算法可以继续.

(3) 由 Mountain Pass 原理可知, 解可能存在于峰点附近, 故找到峰点之后, 我们将路径中一定数目的节点聚集到峰点周围. 设调整节点数为 nadjust , 例如在本文算例中取 $\text{nadjust}=15$, 则确定 $Z_{j_{\max}}$ 之后, 即令 $Z_{j_{\max}+15}$ 取代 $Z_{j_{\max}+1}$, 并在连接 $Z_{j_{\max}}$ 与 $Z_{j_{\max}+1}$ 的直线上均匀分布 $Z_{j_{\max}+1}, \dots, Z_{j_{\max}+14}$. 对于 $Z_{j_{\max}-1}$ 同理处之¹⁾.

2.4 寻找鞍点

此步骤基本想法是将 $Z_{j_{\max}}$ 沿最速下降方向推进 (原路径也随之改变), 以期求得最低峰点——鞍点, 即对应微分方程 (1.2) 的一个弱解. z 点最速下降方向 v 的计算, 等价于一个约束极值问题, 即求 $I'(z)v$ 的极小值, 满足 $\|v\| = 1$. 这里通过引入 Lagrange 乘子, 将其转化为无约束问题: 考虑泛函

$$J(v) = \int_{-L}^L \{[z''v'' - c^2z'v' + f(z)v] + \lambda[|v''|^2 - c^2|v'|^2 + |v|^2]\} dx,$$

1) 当 j_{\max} 与 0 或 N 之间相隔点数少于 nadjust 时, 不执行此步骤.

§ 3. 数值实验结果

对于一般的非线性 $f(z)$ 方程 (1.2) 的解析解通常无法写出. 为了考究算法精度, 这里选用 $f(z) = (z+1)^+ - 1$ 作为实验函数, 其中 $u^+ = \max\{u, 0\}$. 在 [10] 中, McKenna 与 Walter 给出了对应的解析解, 使我们可以参照进行一系列的比较实验. 下面仅举一例:

取 $c = 1.40, L = 100, h = 0.10, M = 2000, N = 400, \text{nadjust} = 15$, 精确解及数值解分别如图 1(a), (b) 所示. 由于篇幅所限, 这里不将 2000 个节点处的函数值比较表列出.

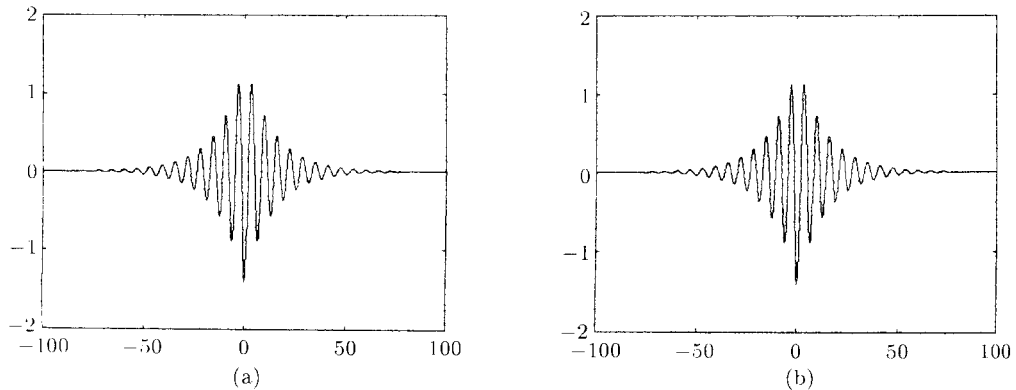


图 1 $-100 \leq x \leq 100, -2.0 \leq y \leq 2.0$

由于算法中涉及的参数很多, 每个参数值的变动都有可能影响最后结果. 表 1 给出了节点调整数 nadjust 对于精度的影响, 其中 $\text{error} = \max_{1 \leq i \leq 2000} |z(x_i) - Z^*(i)|$ 为最大偏差, 表明数值解的一致逼近程度.

表 1

nadjust	error
5	0.0378
10	0.0259
15	0.00312

解的存在不唯一性也给系统地进行误差分析带来了一定困难. 多次实验结果表明, 该算法一般至少能达到 2 阶精度.

§ 4. 算法特点及待解决的问题

与一些经典算法相比, 此算法具有明显的优点. 第一, 无须人为地构造初、边值条件; 第二, 初始端点 e 的选取在一定程度上是随意的, 且对结果不产生根本性影响 (事实上, 当解不唯一时, 对应于同一个 e , 我们只要改变最速下降步长 desmax , 即可

找到多个不同的解); 第三, 解的收敛是整体性的, 对 h 的大小没有限制; 第四, 在计算峰值后, 加设一个判断 (详见 2.3 节第 (2) 步), 解决了算法的中断问题. 总之, 我们有理由认为, 该算法是求解一类具有 Mountain Pass 特点的微分方程的有效算法.

然而由于算法涉及许多可调参数, 如路径总节点数 N , 峰点附近调整节点数 n_{adj} , 及最速下降步长上限 $desmax$ 等等, 使得系统地进行误差分析具有一定困难.

另外, 由泛函 $I(z)$ 的连续性, 我们设想在每次改进路径时, 通过某种简单变换 (例如线性变换) 将路径作整体推进的修改, 而不是目前这样点点推进, 可能减少计算量, 加快收敛速度. 这方面工作将在以后的论文中详述.

参 考 文 献

- [1] Y. Chen, P.J. McKenna, Traveling waves in a nonlinearly suspended beam: theoretical results and numerical observations, *Journal of Differential Equations*, **136**:2 (1997), 325–355.
- [2] Y. Chen, P.J. McKenna, Traveling waves in a nonlinearly suspended beam: some computational results and four open questions, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, (1997), 355, 2175–2184.
- [3] Y.S. Choi, P.J. McKenna, M. Romano, A mountain pass method for the numerical solution of semilinear wave equations, *Numer. Math.*, **64** (1993), 487–509.
- [4] Y.S. Choi, P.J. McKenna, A mountain pass method for the numerical solution of semilinear elliptic problems, In *Nonlinear Analysis, Theory, Methods, and Applications*, **20**:4 (1993), 417–437.
- [5] 雷晋干, 陈铭俊, 匡蛟勋, 沈祖和, 数值分析的泛函方法, 高等教育出版社, 1995.
- [6] H. Brezis, L. Nirenberg, Remarks on finding critical points, *Comm. Pure Appl. Math.*, **XLIV** (1991), 939–963.
- [7] P.H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, *CBMS Reg. Conf. Ser. Math.*, **65** (1986).
- [8] R.L. Burden and J.D. Faires, *Numerical Analysis*, PWS-Kent, Boston (1989).
- [9] V. Hutson, J.S. Pym, *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, Academic Press, London, 1980.
- [10] P.J. McKenna, W. Walter, Traveling Waves in a suspension bridge, *SIAM J. Appl. Math.*, **50** (1990), 703–715.