有理矩阵的拟 Jordan 分解*1)

张知难 谭 敏
(新疆大学数学与系统科学学院 乌鲁木齐 830046)

摘 要

本文给出矩阵拟 Jordan 分解的一般原理以及求有理矩阵的不变因子和初等因子结构的一种源程序. 矩阵的拟 Jordan 分解包括求该矩阵的初等因子结构及相应的变换矩阵.

关键词: 拟 Jordan 分解, 不变因子, 初等因子结构, Lanczos 方法

THE QUASI JORDAN DECOMPOSITION OF A RATIONAL MATRIX

Zhang Zhinan Tan Min
(*Xinjiang University College of Mathematics & System Sciences Urumqi* 830046)

Abstract

The principle fundamentals of the quasi Jordan decomposition of a matrix and a program of obtaining the invariant factors and the elemantary divisor structure of a rational matrix are given in this paper. The quasi Jordan decomposition of a matrix consists of obtaining the elementary divisor structure of this matrix as well as corresponding fransformation matrix.

Key words: quasi Jordan decomposition, invariant factor, elementary divisor structure, lanczos process

§1.

矩阵 A 的 Jordan 标准形是由 A 的特征值及从属于相应特征值的 Jordan 块组成的. 由于特征值一般情况下是复数, 因此矩阵的 Jordan 标准形是矩阵在复数域上的一种标准形. 计算矩阵 Jordan 标准形的关键是计算该矩阵的 Jordan 块结构 [1]. 我们已经证明, 矩阵的 Jordan 块结构一般不可能通过数值计算实现 [8], 另一方面, 数域 F 上矩阵的 Jordan 块结构可以通过数域 F 上的纯有理运算实现 [5]. 因此从理论上说, 任一数域上矩阵的 Jordan 块结构都可以通过符号计算实现. 然而目前符号计算除了对有理数的四则运算产生一定的实效之外, 对于实数的四则运算还远未达到实用的程度, 因此我们不得不把解决问题的范围局限在有理数域上, 尽管解决问题的原理对于任何数域 F 上的矩阵都是一样的.

1. 有理矩阵的拟 Jordan 分解

* 2002 年 5 月 14 日收到.
1) 中国科学院计算数学所国家重点实验室资助项目.

称系数为有理数的多项式为有理多项式，元素全为有理数的矩阵为有理矩阵.

设 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_r(\lambda)$ 为有理矩阵 A 的全部非零次不变因子 (因而它们都是有理多项式). 不失一般性设

$$f_r(\lambda)|f_{r-1}(\lambda)|\cdots|f_2(\lambda)|f_1(\lambda). \tag{1}$$

如下多项式分解

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= [h_1(\lambda)]^{m_{11}}[h_2(\lambda)]^{m_{12}}\cdots[h_k(\lambda)]^{m_{1k}}, \\ f_2(\lambda) &= [h_1(\lambda)]^{m_{21}}[h_2(\lambda)]^{m_{22}}\cdots[h_k(\lambda)]^{m_{2k}}, \\ &\cdots\cdots \\ f_r(\lambda) &= [h_1(\lambda)]^{m_{r1}}[h_2(\lambda)]^{m_{r2}}\cdots[h_k(\lambda)]^{m_{rk}}, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $h_1(\lambda), h_2(\lambda), \cdots, h_k(\lambda)$ 均为有理多项式，并且满足

$$GCD\Big(\frac{d}{d(\lambda)}h_i(\lambda), h_i(\lambda)\Big) = 1,\quad GCD(h_i(\lambda), h_j(\lambda)) = 1,\quad i \neq j, i,\ j = 1, 2, \cdots, k.$$

非负整数 $m_{1j} \geq m_{2j} \geq \cdots \geq m_{rj}, j = 1, \cdots, k$ 称为 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_r(\lambda)$ 在无平方分解基 $h_1(\lambda), \cdots, h_r(\lambda)$ 下的无平方分解.

块对角阵

$$F = diag\{F_{11}, \cdots, F_{1k}; F_{21}, \cdots, F_{2k}; \cdots; F_{r1}, \cdots, F_{rk}\} \tag{3}$$

称为矩阵 A 的拟 Jordan 标准形，这里 F_{ij} 为 (2) 中 $[h_i(\lambda)]^{m_{ij}}$ 的友矩阵，并称它为从属于 $[h_{ij}(\lambda)]^{m_{ij}}$ 的拟 Jordan 块.

2．算法说明源程序分为如下 a), b), c) 三大块

a) 求矩阵的不变因子

我们利用 Lanczos 方法求矩阵的不变因子 [6]. Lanczos 子程序如下：

设有理矩阵 A 为 n 阶的，对于任给定的 n 维非零有理向量 b_1, c_1，对于 $j = 2, 3, \cdots$ 作 $(b_0 = c_0 = 0)$

$$\alpha_{j-1} = c_{j-1}^{\top}Ab_{j-1}/c_{j-1}^{\top}b_{j-1},$$

$$b_j = Ab_{j-1} - \alpha_{j-1}b_{j-1} - \beta_{j-1}b_{j-2},$$

$$c_j = A^{\top}c_{j-1} - \alpha_{j-1}c_{j-1} - \beta'_{j-1}c_{j-2},$$

$$\beta_j = c_{j-1}^{\top}Ab_j/c_{j-1}^{\top}b_{j-1},\quad \beta'_j = b_{j-1}^{\top}A^{\top}c_j/b_{j-1}^{\top}c_{j-1}.$$

设 $b_i^{\top}c_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, j-1$. 当 $b_j = c_j = 0$ 时，该子程序结束；当 b_j 与 c_j 不同时为零，但 $b_j^{\top}c_j = 0$ 时，重新选取初始向量 $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0$, 并重新执行上述运算.

Lanczos 全过程如下：

1) 随机选取非零有理向量 $b_1, c_1 \in R^n$, 并完成 $L_0(b_1, c_1)$

$$b_1, \cdots, b_k \to B,\quad c_1, \cdots, c_k \to C,\quad k \to m.$$

2) 建立 $L_0(b_1, c_1)$ 的相应 Lanczos 子块 L_0，计算 $f_0(\lambda) = det(\lambda I - L_0)$，并输出 $L_0, f_0(\lambda)$.

对 $i = 1, 2, \cdots$ 作

3) 若 $m = n$, 转作 9), 若 $m < n$, 转作 4).

4) 建立 $B^{\perp}, C^{\perp}$.

5) 随机选取非零向量 $b_1^{(i)} \in C^{\perp}, c_1^{(i)} \in B^{\perp}$ 并对 $b_1^{(i)}, c_1^{(i)}$ 完成 $L_i(b_1^{(i)}, c_1^{(i)})$,

$$\{b_1^{(i)}, \cdots, b_{k_i}^{(i)}\} \oplus B \to B.$$

$$\{c_1^{(i)}, \cdots, c_{k_i}^{(i)}\} \oplus C \to C.$$

$$k_i + m \to m$$

6) 建立 $L_i(b_1^{(i)}, c_1^{(i)})$ 的相应 Lanczos 子块 L_i, 计算 $f_i(\lambda) = det(\lambda I - L_i)$, 并输出 $L_i, f_i(\lambda)$.

7) 若 $m = n$, 转作 9), 若 $m < n, i+1 \to i$, 转作 8).

8) 若 $f_i(\lambda) | f_{i-1}(\lambda)$ 转作 4), 否则转作 1).

9) 停机.

如果我们已经断定 $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \cdots, f_j(\lambda)$ 为不变因子, 且 $f_j(\lambda)$ 为有理数域上的不可约多项式时 (特别对于低次多项式容易判别这一事实), 可以强行中断程序运作, 并且得知排在 $f_j(\lambda)$ 之后的不变因子只能是 $f_j(\lambda)$ 的重复. 重复次数由 $f_0(\lambda), \cdots, f_j(\lambda), \cdots, f_j(\lambda)$ 的次数总和等于 n 时为准. 这一强行停机措施对于处理求出 $f_j(\lambda)$ 之后长时间得不到最终结果的情形是有用的.

b). 实现不变因子在一组公共无平方分解基下的无平方分解.

根据 (1), 设

$$f_1(\lambda)/f_2(\lambda) = v_1(\lambda), f_2(\lambda)/f_3(\lambda) = v_2(\lambda), \cdots, f_{r-1}(\lambda)/f_r(\lambda) = v_{r-1}(\lambda),$$

$$f_1(\lambda) = v_1(\lambda)v_2(\lambda)\cdots v_{r-1}(\lambda)v_r(\lambda), v_r(\lambda) = f_r(\lambda).$$

$$GCD(v_1(\lambda), v_j(\lambda)) = u_{1j}(\lambda), j = 2, 3, \cdots, r,$$

$$GCD(v_2(\lambda), v_j(\lambda)) = u_{2j}(\lambda), j = 3, \cdots, r,$$

$$\cdots\cdots$$

$$GCD(v_{r-1}(\lambda), v_j(\lambda)) = u_{r-1,j}(\lambda), j = r,$$

$$v_1(\lambda)/u_{12}(\lambda)/\cdots/u_{1r}(\lambda) \to v_1(\lambda),$$

$$v_2(\lambda)/u_{23}(\lambda)/\cdots/u_{2r}(\lambda) \to v_2(\lambda),$$

$$\cdots\cdots$$

$$v_{r-1}(\lambda)/u_{r-1r}(\lambda) \to v_{r-1}(\lambda).$$

继续这一步骤至 $u_{ij}(\lambda) = 1, i = 1, 2, \cdots, r-1, j = i+1$, 停止. 分别作出 $v_1(\lambda), v_2(\lambda), \cdots, v_r(\lambda)$ 的无平方分解基 [4]. 它们的全体即 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_r(\lambda)$ 的一组公共无平方分解基. 设它们是

$$h_1(\lambda), h_2(\lambda), \cdots, h_k(\lambda).$$

上述确定不变因子在一组公共无平方分解基下的无平方分解的方法克服了 [2] 中同类方法重复次数太多的缺点.

c) 形成变换矩阵 [6]

本过程为 a) 和 b) 两过程中有关信息的收集 (这里从略，详见 [7]).

本程序享有著作权 [7]. 使用本程序仅需述明本程序的出处.

作者感谢张林波教授，张绮霞教授，邓健新教授，李玉成教授在完成本程序过程中所给予的指导与帮助.

参 考 文 献

[1] Golub.G.H Van Loan. G.F., Matrix Computations, The Johns Hopkins Univ. Press (1983).

[2] Kaltofen.E, Krishnamoothy, M.F., Saunders, B.D., Parallel Algorithms for Matrix Normal Forms, Lin. Alg. & its Appl. 136 (1990), 189-208.

[3] Gantmacher. F.R., The Theory of Matrices Vol.1. Chelsea publishing Company. New York (1959).

[4] 沈凤贤，丁英仁，赵文晖编译， Mathematica 手册，海洋出版社 (1992).

[5] 张知难，通过纯有理运算确定矩阵的 Jordan 块结构，计算数学， 17:4 (1995), 381-390.

[6] 张知难，信学工，张建宁，通过符号计算准确实现矩阵的 Lanczos 过程，数值计算与计算机应用， 20:4 (1999), 293-301.

[7] 张知难，谭敏，矩阵的拟 Jordan 分解软件 V1.0[MJDS]，中华人民共和国版权局，登记号 2000SR0468.

[8] 张知难，实随机矩阵的 Jordan 标准形，高等学校计算数学学报， 23:4 (2001), 363-367.