运输问题不用初始解的表格法*

陈忠实
(北京化工学院)

A TABLE METHOD FOR TRANSPORTATION PROBLEMS WITHOUT INITIAL SOLUTION

Chen Zhong-shi
(*Beijing Chemical Engineering Institute*)

Abstract

In this paper we describe a dual simplex method for transportation problems based on a familiar table. This method does not need the initial solution and can be easily realized on the computer.

§1. 引　言

运输问题是线性规划的一种特殊类型，已被广泛应用. 由于约束方程组系数矩阵具有特殊的结构，出现了多种简便算法. 这些方法都需要一个初始基本容许解. 初始解的好坏对于计算量，有时甚至对最优解的某些特性都有影响. [2] 综述了产生初始解的一些方法. 本文用对偶单纯形法处理平衡运输问题，并给出对偶单纯形解运输问题的表格法. 这种表格仅在熟知的位势表上附加各个约束方程的行列成份信息，就可无需初始解，直接求出最优解. 此法十分便于大型运输问题在计算机上实现分块运算.

§2. 用对偶单纯形法解平衡运输问题

所谓运输问题系指求 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，使

$$\min\ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,2,\cdots,m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

* 1985 年 12 月 21 日收到.

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{4}$$

平衡运输问题应有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5}$$

用 -1 分别乘 (2) 和 (3) 式，只取前 $m+n-1$ 个作为约束方程．为叙述方便，将变化后的运输问题改写成

$$\begin{cases}\min Z = c^T x, \\ x \in R = \{x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\},\end{cases} \tag{6}$$

其中，A 为 $(m+n-1) \times (m+n)$ 矩阵，c，x 均为 $(m \times n) \times 1$ 的列向量，c 中各元非负，b 为 $(m+n-1) \times 1$ 的列向量，各元均为负值．

下边用 p_i 记对偶单纯形表中第 i 行的进入基的列向量序号，记潜价

$$z_j^k = \sum_{i=1}^{m+n-1} c_i a_{ij}^k,\ j = 1, 2, \cdots, mn.$$

[1] 中有如下定理：运输问题的约束方程组的系数矩阵是全单模的，即系数矩阵只能由 0，-1 和 1 这三个数字组成．任何运输问题都有最优解．

把对偶单纯形法应用到运输问题上来可叙述如下：

1° 列出 (6) 的初始单纯形表，$k = 0$，$p_i = 0$，$i = 1, 2, \cdots, m+n-1$．送初始判别数 $c_j - z_j^0$，$j = 1, 2, \cdots, mn$．

2° 求出 $b_r = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m+n-1} \{b_i\}$

若 $b_r \geqslant 0$，得出最优解，停止运算；

若 $b_r < 0$，做 3°．

3° $s = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant mn} \{c_j - z_j^k \mid a_{rj} = -1\}$．

4° $a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k + a_{rj}^k a_{is}^k$，$i \neq r$　$a_{rj}^{k+1} = -a_{rj}^k$，$j = 1, 2, \cdots, mn$，$c_j - z_j^{k+1} = (c_j - z_j^k) + a_{rj}^k (c_s - z_s^k)$，$b_i^{k+1} = b_i^k + b_r^k a_{is}$，$i \neq r$，$b_r^{k+1} = -b_r^k$．

5° $p_r = s$，若 $p_i = 0$，$b_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, m+n-1$，则 $b_i^{k+1} = -b_i^{k+1}$，$a_{ij}^{k+1} = -a_{ij}^{k+1}$，$j = 1, 2, \cdots, mn$．

6° $k = k+1$，转 2°．

等式约束 $Ax = b$ 与 $\begin{cases}Ax \geqslant b \\ Ax \leqslant b\end{cases}$ 或 $\begin{cases}Ax \geqslant b \\ -Ax \geqslant -b\end{cases}$ 等价．为用对偶单纯形，采用

$$\begin{cases}Ax \geqslant b \\ -Ax \geqslant -b\end{cases}$$

形式与含主元素行符号相反的对应行，迭代后除人工变量之外的全部系数及常数项均为零；还没选出过主元素的行，其常数如在迭代前后由负变正，则与该行符号相反的对应行的常数便由正变负．运输问题都有最优解，对偶单纯形可以从非可行解开始迭代，所以不用引入人工变量．在约束方程组只取 $-Ax = -b$ 时，可以节省存贮空间．为了计及省去的另一半常数项出现负值的行，故有 5° 中后半部分．

用对偶单纯形法解运输问题不需要初始解，但是约束方程系数矩阵太费存贮空间，不

便于实际使用.

§3. 运输问题对偶单纯形表格

设单位运价表中一个格子的坐标为 (i, j)，则称 $S=(i-1)n+j$ 为此格在该表中的顺序号. 将产销平衡表和单位运价表合并，仍采用 (1)—(5) 式描述法，舍去 (3) 式中最后一个约束方程，产销量乘以 -1 后填入各自格内.

在产量右侧增一列，在销量下增一行，每格初值均置 0，§2 中 3° 确定的列 s 就是本节开头的顺序号 s 取代初值 0. 然后四边分别向外侧再增一行或一列. 左上的行和列存放决定每个约束方程系数的单位运价表的行序号信息 (下边常简称为行号)，右下的行和列存放决定每个约束方程系数的单位运价表的列序号(下边常简称为列号). 因系数矩阵是全单模的，故每个约束方程的行序号和列序号或其中一个是空的(以 0 表之)或两者符号相反，否则交叉点处同号，系数矩阵出现非 -1、0 和 1 的数字.

表 1 运输问题对偶单纯形表格

行	0	0	……	0	0			
-1	c_{11}	c_{12}	……	c_{1n-1}	c_{1n}	$-a_1$	0	0
-2	c_{21}	c_{22}		c_{2n-1}	c_{2n}	$-a_2$	0	0
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$-m+1$	c_{m-11}	c_{m-12}		c_{m-1n-1}	c_{m-1n}	$-a_{m-1}$	0	0
$-m$	c_{m1}	c_{m2}	……	c_{mn-1}	c_{mn}	$-a_m$	0	0
	$-b_1$	$-b_2$	……	$-b_{n-1}$	—			
	0	0	……	0	—		P	
	-1	-2	……	$-n+1$	$-n$			列

每个约束方程中系数非零的变量 x_{ij}，其 i 就是与此方程相对应的单位运价表中行(或列)中的一个行号，且系数 1 和 -1 取决于这个行号的正号和负号；其 j 是列号中的一个，系数 1 和 -1 也取决于这个列号的正和负.

例 1. 根据下表写出对应的系数矩阵.

行	0	0	0	0	—			
-1	14	15	6	13	14	-7	0	0
-2	16	9	22	13	16	-18	0	0
-3	8	5	11	4	5	-6	0	0
-4	12	4	18	9	10	-15	0	0
	-4	-11	-12	-8	—			
	0	0	0	0	—		P	
	-1	-2	-3	-4	—			列

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & b \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & & -7 \\
 & & & & & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & & & & & & & & & & & -18 \\
 & & & & & & & & & & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & & & & & & -6 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -15 \\
-1 & & & & & -1 & & & & & -1 & & & & & -1 & & & & & -4 \\
 & -1 & & & & & -1 & & & & & -1 & & & & & -1 & & & & -11 \\
 & & -1 & & & & & -1 & & & & & -1 & & & & & -1 & & & -12 \\
 & & & -1 & & & & & -1 & & & & & -1 & & & & & -1 & & -8
\end{array}
$$

§4. 直接求最优解的表格算法

1° $k=0$.

2° 检查产量和销量，若都是非负，则得最优解，停止计算；若还有一个负值，则进行如下计算。

3° 在负的产量或销量中找最小值，定下当前行或列。

4° 从当前行或列的行号和列号中，循负的行号或列号指定的行或列中(不含与正的列号或行号指定的列或行的交叉点)找出最小检验数，定下主元素。设 (i, j) 是该格的行列坐标，顺序号 $s=(i-1)n+j$ 填入当前行或列的 p 格内。 负行号或负列号所指定的行或列都减去最小检验数，正列号或正行号所指定的列或行都加上最小检验数。

5° 非当前行和列中，凡是行号中含 i 或列号中含 j 的，不论符号正负，都要迭代，正号迭代式中取加，负号迭代式中取减。设⊙是取为＋或－中的一个，则

行号集合⊙当前行或列的行号集合→行号集合，

列号集合⊙当前行或列的列号集合→列号集合，

产销量⊙当前行或列的产销量→产销量.

如果此行或此列中的产销量迭代前后由负变正，且其顺序号为 0，则行号、列号及产销量再变一次号.

6° 当前行或当前列的产销量、行号和列号变号.

7° $k=k+1$，转 2°.

例 2. 将例 1 中的表迭代至 $k=6$ 时，写出其对应的系数矩阵。

$k=6$

	0	0	−3	+2+4	—			
−1−3	14	21	φ	15	14	−1	0	3
+2	1	φ	1	φ	1	10	7	−4
+3	3	6	φ	1	0	6	13	0
−2	2	φ	2	1	φ	1	17	+2+4
	−4	8	6	14	—			
	0	9	3	20	—			
	−1	+4	+3	−2−4	—			

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	b
−1	−1		−1	−1			1			−1	−1		−1	−1			1			−1
			−1		1	1	1		1				−1					−1		10
										1	1	1	1	1						6
	1		1		−1		−1		−1		1		1			1		1		1
−1					−1					−1					−1					−4
			1					1					1					1		8
	1						1			−1	−1		−1	−1			1			6
	−1		−1		1		1		1		−1		−1		1		1		1	14

§5. 结 束 语

每次取最小单位运价，满足一个当前产销量的约束方程，迭代次数一般不会超过约束方程数，上机实践亦说明如此。

指派问题，即 (2)，(3) 式中分别为 $a_i = 1$ 及 $b_j = 1$，同样可用本文方法求解。

因每步都知道各方程非零系数所涉及的行和列，且知是 $+1$ 还是 -1，特别适合大型问题分块运算。

参 考 文 献

[1] 管梅谷，郑汉鼎，线性规划，山东科学技术出版社，1983.

[2] 赵风治，运输问题的初始解，数值计算与计算机应用，3: 2(1982).

[3] 运筹学试用教材编写组，运筹学，清华大学出版社，1982.

[4] 陈忠实，集中调度货运汽车的数学方法及其微机软件包的研制，清华大学研究生论文，1983.