

# 交错网格的 FCT 方法\*

王心正 张新元

(西北核技术研究所)

## A FCT METHOD FOR STAGGERED MESH

Wang Xinzhen Zhang Xinyuan

(Northwest Institute of Nuclear Technology)

### Abstract

In this paper, an improved finite difference on a staggered mesh for shock hydrodynamics with diffusion controlled via flux corrected transport (SMFCT) is described. The SMFCT method is designed in Lagrangian coordinates and arbitrary mesh can be used by applying a high order remapping step. A second-order numerical convection algorithm for calculating the mass, momentum and total energy fluxes between the Eulerian cells is presented. The methods are examined numerically with six one-dimensional Riemann problems. The results show that they are successful.

### 一、引言

在流体力学计算中使用人工粘性方法处理激波,其精度和激波分辨率都较低,如果粘性系数不够大,波后还出现严重的振荡现象.70年代以来,先后出现了许多高精度、高分辨率的方法,其中 Boris 和 Book<sup>[1-3]</sup>发展的 FCT 方法已得到广泛的应用.后来,[7]以更简单、更一般的形式描述了 FCT 方法,从而扩大了 FCT 方法的应用范围.直接将[1-7]的 FCT 方法应用到 Lagrangian 流体力学方程仍有困难,[13]首先对使用交错网格的 Lagrangian 有限差分方程引入了 FCT 方法,称为 RMFCT 方法,对一些问题能给出较满意的结果.但我们试算发现,用 RMFCT 计算有非物理解存在的问题,计算得到的是非物理解,不能得到物理解.

我们改进了 RMFCT 方法中的低阶通量,并使用守恒形式的 Lagrangian 方程,给出了改进的交错网格 FCT 方法,称为 SMFCT 方法.对有非物理解存在的问题,用 SMFCT 方法计算得到的是物理解.试算表明,SMFCT 方法具有良好的精度和激波分辨率,波

\* 1995年7月28日收到.

后无振荡。

对 Eulerian 方程的求解,是按质量、动量和能量守恒的原则将 Lagrangian 步的计算结果在原来 Eulerian 网格上进行质量、动量和能量的重新分配得到。本文给出一个二阶精度的数值对流算法。

## 二、改进的交错网格 FCT (SMFCT) 方法

与[13]不同,我们使用守恒形式的 Lagrangian 方程组

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{f}_m = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} V \\ u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -u \\ P \\ Pu \end{pmatrix}, \quad E = e + \frac{1}{2} u^2,$$

$V=1/\rho$  是比容,  $\rho, u, P, e, E$  分别是流体的密度, 速度, 压力, 比内能和比总能,  $m$  是质量坐标。

用 SMFCT 方法求解 (1) 的步骤如下:

1. 计算低阶通量  $F^L$  的各分量

$$F_{j+1/2}^{LV} = -u_{j+1/2}^n - (c_{j+1/2}/2 + g_{j+1/2}^{(V)})(V_{j+1}^n - V_j^n), \quad (2)$$

$$F_j^{Lu} = P_j^n - (c_j/2 + g_j^{(u)})(u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n), \quad (3)$$

$$F_{j+1/2}^{LE} = P_{j+1/2}^n u_{j+1/2}^n - (c_{j+1/2}/2 + g_{j+1/2}^{(V)})(E_{j+1}^n - E_j^n), \quad (4)$$

这里, 函数  $\varphi_j^n = \varphi(n\Delta t, m_j)$ ,  $m_j$  为网格中心的质量坐标, 用  $m_{j+1/2}$  表示  $j$  网格的右边界,

$$\Delta m_j = m_{j+1/2} - m_{j-1/2}, \quad \Delta m_{j+1/2} = \frac{1}{2} (\Delta m_j + \Delta m_{j+1}), \quad c \text{ 为 Lagrangian 声速,}$$

$$P_{j+1/2} = (\Delta m_j P_{j+1} + \Delta m_{j+1} P_j) / (\Delta m_j + \Delta m_{j+1}). \quad (5)$$

$g^{(V)}$  和  $g^{(u)}$  为附加的扩散系数, 按[13],

$$g_j^{(u)} = \max(g_{j-1}, g_j, g_{j+1}), \quad (6)$$

$$g_{j+1/2}^{(V)} = \min(g_j^{(u)}, g_{j+1}^{(u)}), \quad (7)$$

$$g_j = \frac{3}{4} f_j \rho_j^n [2c_j + \max(0, u_{j-1/2}^n - u_{j+1/2}^n)], \quad (8)$$

$$f_i = \begin{cases} |P_{j+1}^n - 2P_j^n + P_{j-1}^n| / (P_{j+1}^n + 2P_j^n + P_{j-1}^n), & u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n < 0, \\ 0, & u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

2. 用低阶格式求 (1) 的扩散解

$$V_j^{id} = V_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_j} (F_{j+1/2}^{LV} - F_{j-1/2}^{LV}), \quad (10)$$

$$u_{j-1/2}^{td} = u_{j-1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_{j-1/2}} (F_j^{Lu} - F_{j-1}^{Lu}), \quad (11)$$

$$E_j^{td} = E_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_j} (F_{j+1/2}^{LE} - F_{j-1/2}^{LE}). \quad (12)$$

### 3. 计算高阶通量 $F^H$ 的各分量

使用高阶格式计算 (1) 的解

$$\tilde{V}_j^{n+1} = V_j^{n-1} - \frac{2\Delta t}{\Delta m_j} (\bar{F}_{j+1/2}^{HV} - \bar{F}_{j-1/2}^{HV}), \quad (13)$$

$$\tilde{u}_{j-1/2}^{n+1} = u_{j-1/2}^{n-1} - \frac{2\Delta t}{\Delta m_{j-1/2}} (\bar{F}_j^{Hu} - \bar{F}_{j-1}^{Hu}), \quad (14)$$

$$\tilde{E}_j^{n+1} = E_j^{n-1} - \frac{2\Delta t}{\Delta m_j} (\bar{F}_{j+1/2}^{HE} - \bar{F}_{j-1/2}^{HE}), \quad (15)$$

其中,

$$\bar{F}_{j+1/2}^{HV} = -\bar{u}_{j+1/2}^n - g_{j+1/2}^{(V)} (V_{j+1}^n - V_j^n), \quad (16)$$

$$\bar{F}_j^{Hu} = \bar{P}_j^n - g_j^{(u)} (u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n), \quad (17)$$

$$\bar{F}_{j+1/2}^{HE} = \bar{P}_{j+1/2}^n \bar{u}_{j+1/2}^n - g_{j+1/2}^{(V)} (E_{j+1}^n - E_j^n). \quad (18)$$

$\bar{u}$  和  $\bar{P}$  按 [13] 给出的插值公式计算

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j-1/2} = u_{j-1/2} & - \frac{1}{\delta_{j-2} + 2\delta_{j-1} + 2\delta_j + \delta_{j+1}} \left\{ \delta_{j-1} \delta_j \left( \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\delta_{j-1} + 2\delta_j + \delta_{j+1}} - \frac{u_{j-1/2} - u_{j-3/2}}{\delta_{j-2} + 2\delta_{j-1} + \delta_j} \right) \right. \\ & + (\delta_j - \delta_{j-1}) \left[ \frac{2\delta_{j-1} + \delta_{j-2}}{\delta_{j-1} + 2\delta_j + \delta_{j+1}} (u_{j+1/2} - u_{j-1/2}) \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\delta_j + \delta_{j+1}}{\delta_{j-2} + 2\delta_{j-1} + \delta_j} (u_{j-1/2} - u_{j-3/2}) \right] \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\bar{P}_j = P_j - \frac{\delta_j^2}{4(\delta_{j-1} + \delta_j + \delta_{j+1})} \left( \frac{P_{j+1} - P_j}{\delta_j + \delta_{j+1}} - \frac{P_j - P_{j-1}}{\delta_{j-1} + \delta_j} \right), \quad (20)$$

这里  $\delta_j = \Delta m_j$ ,  $\bar{P}_{j+1/2}$  由 (5) 计算. 比内能

$$e_j = E_j - \frac{1}{4} (u_{j+1/2}^2 + u_{j-1/2}^2). \quad (21)$$

由状态方程

$$P = P(V, e) \quad (22)$$

求出  $\tilde{P}_j^{n+1}$ , 则高阶通量  $F^H$  的各分量是

$$F_{j+1/2}^{HV} = -\bar{u}_{j+1/2}^s - g_{j+1/2}^{(V)} (V_{j+1}^s - V_j^s), \quad (23)$$

$$F_j^{Hu} = \bar{P}_j^s - g_j^{(u)} (u_{j+1/2}^s - u_{j-1/2}^s), \quad (24)$$

$$F_{j+1/2}^{HE} = \bar{P}_{j+1/2}^s \bar{u}_{j+1/2}^s - g_{j+1/2}^{(V)} (E_{j+1}^s - E_j^s), \quad (25)$$

其中函数  $\varphi^s = \frac{1}{2} (\varphi^n + \tilde{\varphi}^{n+1})$ ,  $\bar{u}_{j+1/2}^s$ ,  $\bar{P}_j^s$ ,  $\bar{P}_{j+1/2}^s$  分别由 (19)、(20)、(5) 计算。

4. 按 [7, 9] 的方法定义反扩散通量并计算修正的输运通量各分量。
5. 利用修正的输运通量和扩散解求出  $(n+1)\Delta t$  时的解

$$V_j^{n+1} = V_j^{td} - \frac{\Delta t}{\Delta m_j} (A_{j+1/2}^{cV} - A_{j-1/2}^{cV}), \quad (26)$$

$$u_{j-1/2}^{n+1} = u_{j-1/2}^{td} - \frac{\Delta t}{\Delta m_{j-1/2}} (A_j^{cu} - A_{j-1}^{cu}), \quad (27)$$

$$E_j^{n+1} = E_j^{td} - \frac{\Delta t}{\Delta m_j} (A_{j+1/2}^{cE} - A_{j-1/2}^{cE}), \quad (28)$$

再由 (21) 求出比内能  $e_j^{n+1}$ , 由 (22) 求出  $P_j^{n+1}$ , 则一个  $\Delta t$  的 SMFCT 算法完成, 其中,  $A_{j+1/2}^{cV}$ ,  $A_j^{cu}$ ,  $A_{j+1/2}^{cE}$  为修正的输运通量的三个分量。

时间步长  $\Delta t$  可按下式选取 [13]:

$$c \frac{\Delta t}{\Delta m} \leq 0.4,$$

这里  $c$  为 Lagrangian 声速。

### 三、数值对流算法

考虑非守恒形式 Eulerian 方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (Pu)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (29)$$

求解 (29) 可分两步进行: 第一步, 不考虑对流项的影响, 用 SMFCT 方法求解 (1); 第二步计算对流项的影响, 即按质量、动量和能量守恒的原则将第一步的计算结果 (用  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{E}$  表示) 在原来的 Eulerian 网格上进行质量、动量和能量重新分配。

考虑交错网格情况, 下面我们给出一个二阶精度数值对流算法:

#### 1. 质量、总能量的重新分配

用  $l$  表示在一个  $\Delta t$  内穿过 Eulerian 网格边界  $x_{j+1/2}$  流入相邻网格内的流体厚度, 则

$$l = \frac{\bar{u}_{j+1/2} \Delta t}{1 + (\bar{u}_x)_{j+1/2} \Delta t} \quad (30)$$

其中,

$$\bar{u}_{j+1/2} = \frac{1}{2} (u_{j+1/2}^n + \tilde{u}_{j+1/2}),$$

$$(\bar{u}_x)_{j+1/2} = \begin{cases} \text{sign}(x_1) \cdot \min(|x_1|, |x_3|), & \bar{u}_{j+1/2} > 0, \\ \text{sign}(x_1) \cdot \min(|x_1|, |x_2|), & \bar{u}_{j+1/2} \leq 0, \end{cases} \quad (31)$$

$$x_1 = (\bar{u}_{j+3/2} - \bar{u}_{j-1/2}) / (\Delta x_j + \Delta x_{j+1}),$$

$$x_2 = (\bar{u}_{j+3/2} - \bar{u}_{j+1/2}) / \Delta x_{j+1}, \quad (32)$$

$$x_3 = (\bar{u}_{j+1/2} - \bar{u}_{j-1/2}) / \Delta x_j.$$

穿过网格边界  $x_{j+1/2}$  运输的质量是

$$\Delta M_{j+1/2} = \begin{cases} \left[ \rho_j^n + \frac{1}{2} (\Delta x_j - l) (\rho_x)_j^n \right] \cdot l, & l > 0, \\ \left[ \rho_{j+1}^n - \frac{1}{2} (\Delta x_{j+1} + l) (\rho_x)_{j+1}^n \right] \cdot l, & l \leq 0, \end{cases} \quad (33)$$

其中, 如果  $|P_{j+1}^n - P_j^n| / P_j^n \geq \varepsilon_0$ , 则

$$(\rho_x)_j^n = \begin{cases} \text{sign}(x_1) \cdot \min(|x_1|, |x_2|, |x_3|), & x_2 \cdot x_3 \geq 0, \\ 0, & x_2 \cdot x_3 < 0, \end{cases} \quad (34)$$

否则

$$(\rho_x)_j^n = \text{sign}(x_1) \cdot \min(|x_1|, |x_2|), \quad (35)$$

$$x_1 = (\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) / (\Delta x_{j+1/2} + \Delta x_{j-1/2}), \quad (36)$$

$$x_2 = (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) / \Delta x_{j+1/2},$$

$$x_3 = (\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) / \Delta x_{j-1/2},$$

$\varepsilon_0$  为小于 1 的常数. 可用类似的办法计算  $(\rho_x)_{j+1}^n$ .

穿过网格边界  $x_{j+1/2}$  运输的总能量是

$$\Delta (ME)_{j+1/2} = \begin{cases} \Delta M_{j+1/2} \left[ \tilde{E}_j + \frac{1}{2} (\Delta x_j - l) (\tilde{E}_x)_j \right], & l > 0, \\ \Delta M_{j+1/2} \left[ \tilde{E}_{j+1} - \frac{1}{2} (\Delta x_{j+1} + l) (\tilde{E}_x)_{j+1} \right], & l \leq 0, \end{cases} \quad (37)$$

其中,  $(\tilde{E}_x)_j$  的计算与  $(\rho_x)_j^n$  的计算相类似.

用  $M_j$  表示第  $j$  网格的质量, 通过质量、总能量的重新分配得到

$$M_j^{n+1} = M_j^n + \Delta M_{j-1/2} - \Delta M_{j+1/2}, \quad (38)$$

$$\rho_j^{n+1} = M_j^{n+1} / \Delta x_j, \quad (39)$$

$$E_j^{n+1} = [\tilde{E}_j M_j^n + \Delta (ME)_{j-1/2} - \Delta (ME)_{j+1/2}] / M_j^{n+1}. \quad (40)$$

## 2. 动量的重新分配

视  $x_j$  为网格边界, 用  $|l_1|$  表示一个  $\Delta t$  内穿过  $x_j$  的流体的厚度, 则

$$l_1 = \frac{\frac{1}{2} (\bar{u}_{j+1/2} + \bar{u}_{j-1/2}) \Delta t}{1 + \frac{\bar{u}_{j+1/2} - \bar{u}_{j-1/2}}{\Delta x_j} \Delta t}. \quad (41)$$

穿过  $x_j$  运输的质量是

$$\Delta M_j = \begin{cases} \left[ \rho_j^n - \frac{l_1}{2} (\rho_x^-)_j^n \right] \cdot l_1, & l_1 > 0, \\ \left[ \rho_j^n - \frac{l_1}{2} (\rho_x^+)_j^n \right] \cdot l_1, & l_1 \leq 0, \end{cases} \quad (42)$$

其中,

$$(\rho_x^-)_j^n = \text{sign}(x_1) \cdot \min(|x_1|, |x_3|), \quad (43)$$

$$(\rho_x^+)_j^n = \text{sign}(x_1) \cdot \min(|x_1|, |x_2|), \quad (44)$$

这里  $x_1 \sim x_3$  用 (36) 计算.

穿过  $x_j$  运输的动量是

$$\Delta(Mu)_j = \Delta M_j \left[ \frac{1}{2} (\tilde{u}_{j+1/2} + \tilde{u}_{j-1/2}) - \frac{l_1}{2} \frac{\tilde{u}_{j+1/2} - \tilde{u}_{j-1/2}}{\Delta x_j} \right]. \quad (45)$$

于是由动量的重新分配可求出

$$u_{j+1/2}^{n+1} = \left[ \frac{1}{2} (M_j^n + M_{j+1}^n) \tilde{u}_{j+1/2} + \Delta(Mu)_j - \Delta(Mu)_{j+1} \right] / \left[ \frac{1}{2} (M_j^{n+1} + M_{j+1}^{n+1}) \right]. \quad (46)$$

输运量计算公式 (33)、(37) 和 (45) 不需要插值计算网格边界上的函数值, 与 [15, 20, 21] 中的数值对流算法相比, 本文给出的算法计算结果更精确.

#### 四、计算结果

选用六个算例考核本文的方法, 用理想气体状态方程, 除例 1 取  $\gamma=2$ , 其它算例取  $\gamma=1.4$ . 初始间断的位置均为  $x_{j+1/2}=10$ .

算例 1.

$$P_- = 8; V_- = 1; u_- = 0,$$

$$P_+ = 0; V_+ = 3; u_+ = 0.$$

它的物理解为稀疏波-接触间断-激波, 激波速度为 3.2154.

算例 2. Sod 问题:

$$P_- = 1; \rho_- = 1; u_- = 0,$$

$$P_+ = 0.1; \rho_+ = 0.125; u_+ = 0.$$

算例 3. Lax 问题:

$$P_- = 3.528; \rho_- = 0.445; u_- = 0.698,$$

$$P_+ = 0.571; \rho_+ = 0.5; u_+ = 0.$$

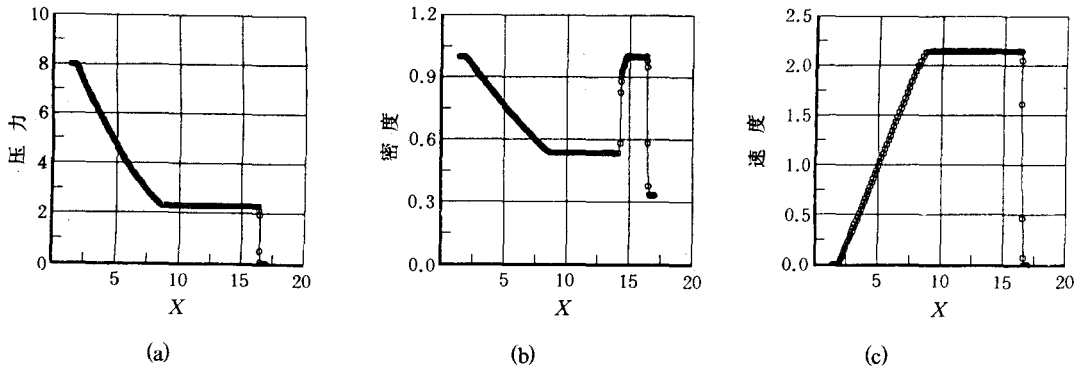


图1 例1 ( $t=2$ ) 压力 (a), 密度 (b) 和速度 (c) 的空间分布 (SEFCT)

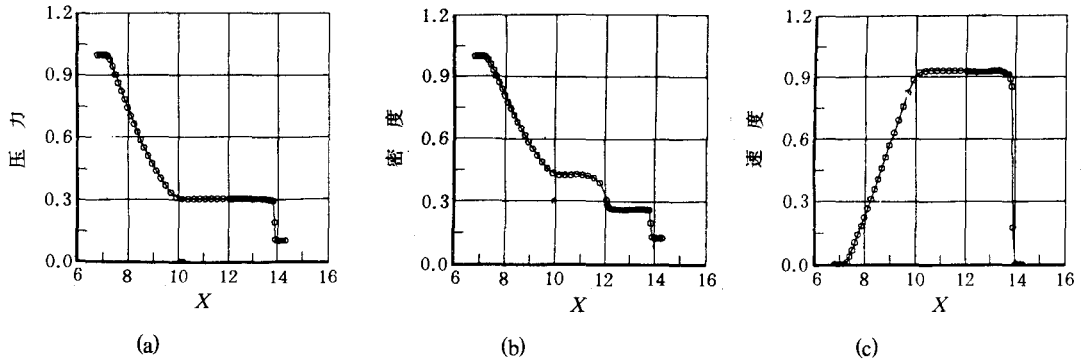


图2 例2 ( $t=2.2$ ) Sod 问题压力 (a)、密度 (b) 和速度 (c) 的空间分布 (SMFCT)

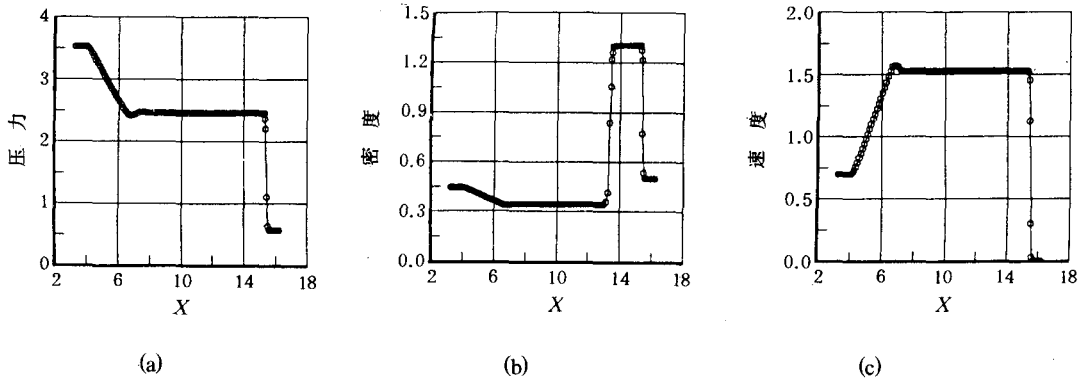


图3 例3 ( $t=2.2$ ) Lax 问题压力 (a)、密度 (b) 和速度 (c) 的空间分布 (SMFCT)

在整理本文过程中, 看到[23]给出四个更为严格考核算法的算例, 我们又用这些算例进行试验, 其中三个有激波存在的问题, SMFCT 方法都得到满意的结果. 用六个算例考核 SMFCT 结果表明, 该方法具有良好的精度和激波分辨率. 对有非物理解存在的

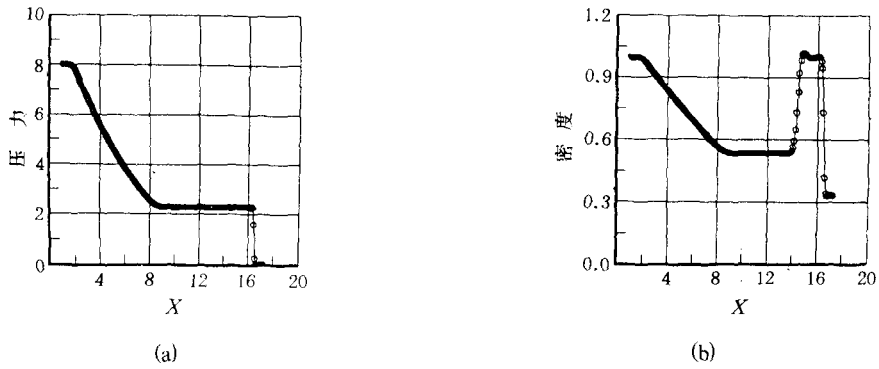


图4 例1 ( $t=2$ ) Eulerian 计算压力 (a)、密度 (b) 空间分布

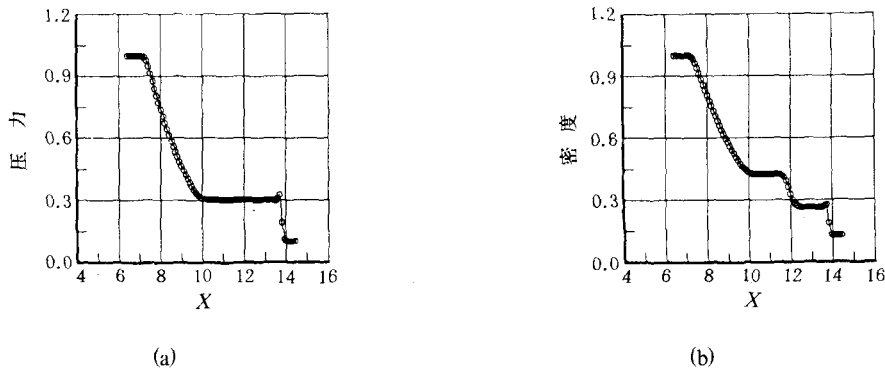


图5 例2 ( $t=2.2$ ) Sod 问题 Eulerian 计算压力 (a)、密度 (b) 空间分布

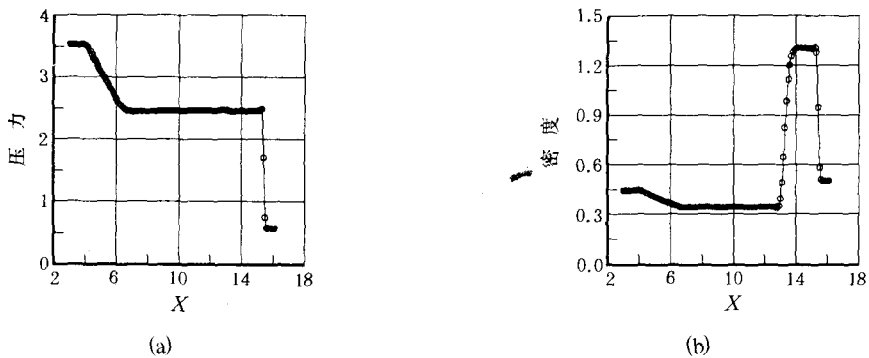


图6 例3 ( $t=2.2$ ) Lax 问题 Eulerian 计算压力 (a)、密度 (b) 空间分布

问题, 计算得到的是物理解, 而用 RMFCT 方法得到的是非物理解. 限于篇幅, 这里只给出部分计算结果. 图 1—3 是用 SMFCT 方法计算例 1—3 的结果, 图 7 是用 SMFCT 和 RMFCT 计算有非物理解存在的问题的结果.



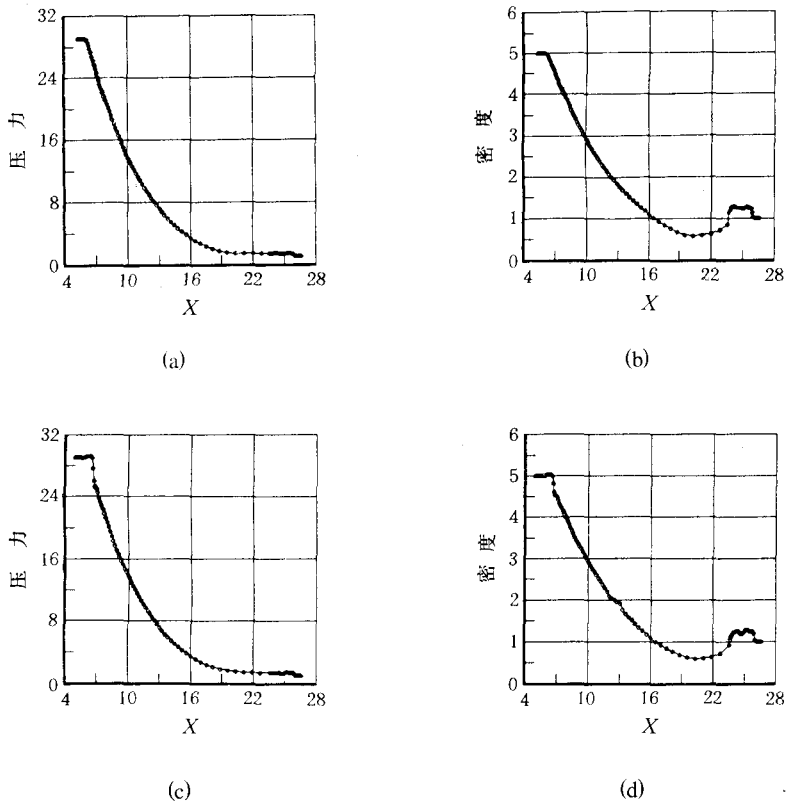


图7 [23]例1中 ( $t=2.2$ ) 压力和密度的空间分布: (a)、(b) SMFCT 计算 (c)、(d) RMFCT 计算

图4—6是用本文的数值对流算法和 SMFCT 对 Eulerian 方程计算例1—3的结果, 与图1—3比较, 可以看出两种方式的计算结果符合很好, 优于 [15, 20, 21] 中数值对流算法的结果。

### 参 考 文 献

- [1] J. P. Boris, D. L. Book, J. Comput. Phys. 11(1973), 38.
- [2] D. L. Book, J. P. Boris, K. Hain, J. Comput. Phys. 18(1975), 248.
- [3] J. P. Boris, D. L. Book, J. Comput. Phys. 20(1976), 397.
- [4] N. Grandjouan, J. Comput. Phys. 91(1990), 424.
- [5] D. Odstrcil, J. Comput. Phys. 108(1993), 218.
- [6] D. Odstrcil, J. Comput. Phys. 91(1990), 71.
- [7] S. T. Zalesak, J. Comput. Phys. 31(1979), 335.
- [8] S. T. Zalesak, J. Comput. Phys. 40(1981), 497.
- [9] E. E. Kunhardt, C. Wu, J. Comput. Phys. 68(1987), 127.
- [10] G. Patnaik, R. H. Gvirguis, J. P. Bors, E. S. Oran, J. Comput. Phys. 71(1987), 1.

- [11] J. Giannakouros, G. EM. Karniadakis, *J. Comput. Phys.* 115(1994), 65.
- [12] K. Salari, S. Steinberg, *J. Comput. Phys.* 111(1994), 24.
- [13] P. M. Velarde, *J. Comput. Phys.* 108(1993), 27.
- [14] C. R. Devore, *J. Comput. Phys.* 92(1991), 142.
- [15] W. H. Lee, D. Kwak, LA-10857(DE88 010469), 1988.
- [16] D. A. Jones, E. S. Oran, R. Guirguis, MRL-RR-2-90, 1990.
- [17] 毛根旺, 空气动力学学报, Vol. 10. No.3(1992).
- [18] 封建湖, 聂铁军, 数值计算与计算机应用, 14: 1(1993).
- [19] 李德元, 徐国荣等, 二维非定常流体力学数值方法, 科学出版社, 1987.
- [20] S. L. Thompson, SAND77-1339(1977).
- [21] J. M. Mcglau, SAND82-0051(1982).
- [22] PH. Colella, P. R. Woodward, *J. Comput. Phys.* 54(1984), 174.
- [23] 李松波, 王运涛, 数值计算与计算机应用, 16: 1(1995). 27.