极点配置问题的一个稳定方法*

蔡大用　储德林
(清华大学)

A STABLE METHOD FOR POLE ASSIGNMENT

Cai Da-yong　Chu De-lin
(*Tsinghua University*)

Abstract

In this paper, the problem of pole assignment using multi-input state feedback is considered and a stable algorithm is given. First, the original problem is turned into some independent lower-dimensional problems of pole assignment using single-input state feedback. Then the algorithm presented in [6] can be used directly to solve the lower-dimensional problems. Finally, the algorithm is illustrated by a numerical example.

§1. 引　言

极点配置问题是控制理论中的一个重要问题. 提法如下:

问题 (P): 给定矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $\Lambda=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ $\langle A,B\rangle$ 可控, Λ 在复共轭下封闭,求 $F\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 使得

$$\sigma(A-BF)=\Lambda,$$

其中 $\sigma(\cdot)$ 表示$(\cdot)$的谱.

对于问题 (P),已得到大量研究,参见[1—7],但正如[1,2]指出从数值计算的观点来看,问题 (P) 远远没有得到满意的解决. 已有的算法(如[3])通过计算A的特征值和特征向量,[4]借助于多项式矩阵运算,[5]利用矩阵广义逆求解问题 (P). 其它文献或基于(B,A) 的约当规范型或基于A的特征多项式. 由于矩阵的约当规范型不能通过稳定的变换得到(见[1,8]), 同样也缺少有效的计算高维矩阵特征多项式的方法. 因而大部分已有的算法是数值不稳定的. 此外, 相当一部分已有的在理论上认为有效的算法如[9] Varge 提出的 Schur 分解法严重地依赖于矩阵A或配置矩阵的性态. 关于这方面的分析,详见文[6]. 总之研究有效的求解问题 (P) 的稳定算法是非常有意义的.

本文提出了求解问题 (P) 的一个稳定算法. 全文共分四节. 第二节预备知识, 第三

* 1988 年 10 月 18 日收到.

节稳定算法，第四节给出数例。

§2. 预备知识

Miminis[6]（也见 Miminis[11] 和 Paige[7]）就单输入 Pascal-like 规范系统给出了一个稳定的极点配置算法。本节的目的在于讨论多输入系统的广义 Pascal-like 规范型。结果表明这一目的可通过熟知的正交变换来实现。

首先我们给出可控的定义和几个引理。

定义. 设 $A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times m}$，若对任意的 $\lambda\in C$ 均有 $\mathrm{rank}(\lambda I-A\ \ B)=n$，则称 (A,B) 可控。

引理 1[4]. 对任何共轭封闭的集合 $\Lambda=\langle\lambda_1,\cdots,\lambda_n\rangle$ 问题 (P) 有解，当且仅当 (A,B) 可控。

引理 2[10]. 设

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$$

$$A_{11}\in R^{n_1\times n_1},\ A_{22}\in R^{n_2\times n_2},\ B_1\in R^{n_1\times m},\ B_2\in R^{n_2\times m},$$

若 (A,B) 可控，则 $(A_{22},\ B_2)$ 可控。

引理 3[7]. 设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n-1} & a_{2n}\\ & a_{32} & a_{33}\cdots a_{3n-1} & a_{3n}\\ & & \ddots\quad\ddots & \vdots\\ & & & \\ & & a_{nn-1} & a_{nn}\end{bmatrix},\qquad b=\begin{bmatrix}b_{11}\\ 0\end{bmatrix},\ b_{11}\in R,$$

当且仅当 $b_{11}\neq 0$，$a_{ii-1}\neq 0$，$i=2,\cdots,n$ 时，则 (A,b) 可控。

引理 3 中 (A,b) 即为单输入系统的 Pascal-like 规范型。

记 $B=(\tilde b_1,B_{12})$，$\tilde b_1\in R^n$。若 $\tilde b_1\neq 0$，则存在一周知的正交变换(如平面旋转)，使得

$$P_1^{(1)}\tilde b_1=\begin{bmatrix}b_{11}\\ 0\end{bmatrix},\ b_{11}\in R,\ b_{11}\neq 0,$$

$P_1^{(1)}$ 为正交变换。令

$$P_1^{(1)}A(P_1^{(1)})^T=\begin{bmatrix}a_{11} & B^{(1)}\\ a^{(1)} & \tilde A_{22}^{(1)}\end{bmatrix},\ a_{11}\in R.$$

若 $a^{(1)}\neq 0$，则存在一周知的正交变换 $\tilde P_1^{(2)}$（如平面旋转），使得

$$\tilde P_1^{(2)}a^{(1)}=\begin{bmatrix}a_{21}\\ 0\end{bmatrix},\quad a_{21}\in R,\ a_{21}\neq 0.$$

令

$$P_1^{(2)}=\begin{bmatrix}1 & \\ & \tilde{P}_1^{(2)}\end{bmatrix},$$

则

$$P_1^{(2)}P_1^{(1)}\tilde{b}_1=P_1^{(1)}\tilde{b}_1,\quad P_1^{(2)}P_1^{(1)}A(P_1^{(1)})^T(P_1^{(2)})^T=\begin{bmatrix}a_{11} & \\ a_{21} & A_{12}^{(1)} \\ 0 & \tilde{A}_{22}^{(1)}\end{bmatrix}.$$

若 $\tilde{A}_{22}^{(1)}$ 第一列向量不为零，则我们施以上述变换，使其第一列向量除第一个元素不为零外，其余元素全为零。总之，由以上分析我们可知存在周知的正交变换 P_1，使得

$$P_1\tilde{b}_1=\begin{bmatrix}b_{11}\\ 0\end{bmatrix},\quad P_1AP_1^T=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}^{(1)}\end{bmatrix},$$

其中 $b_{11}\neq 0$，$A_{11}\in \mathbf{R}^{n_1\times n_1}$，且为上 Hessenberg 矩阵，对角线下的次对角元全不为零。

记

$$P_1B=\begin{bmatrix}b_1 & *\\ 0 & B_2^{(1)}\end{bmatrix},$$

$b_1\in \mathbf{R}^{n_1}$，仅第一个元素不为零。

根据引理 2，$(A_{22}^{(1)},(0,B_2^{(1)}))$ 可控，从而 $(A_{22}^{(1)},\ B_2^{(1)})$ 可控且 $B_2^{(1)}\neq 0$。若 $B_2^{(1)}$ 第一列为零，则左乘一置换矩阵作列交换使其第一列不为零。由此可知以上过程对 $(A_{22}^{(1)},B_2^{(1)})$ 可以进行下去，这样结合引理 3，我们得到如下定理：

定理 1. 设 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$，$B\in \mathbf{R}^{n\times m}$，$(A,B)$ 可控，则存在熟知的正交变换 P 和置换矩阵 Q，$P\in \mathbf{R}^{n\times n}$，$Q\in \mathbf{R}^{m\times m}$ 及正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_N$，$\sum_{i=1}^{N}n_i=n$ 满足

$$\tilde{A}=PAP^T=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\cdots A_{1N}\\ & A_{22}\cdots A_{2N}\\ & \ddots \\ & & A_{NN}\end{bmatrix},\quad \tilde{B}=PBQ=\begin{bmatrix}b_1 & b_{12}\cdots b_{1N}\cdots b_{1m}\\ & b_2\cdots b_{2N}\cdots b_{2m}\\ & \ddots\quad \vdots \qquad \vdots\\ & b_N\cdots b_{Nm}\end{bmatrix},\tag{1}$$

其中 $A_{ij}\in \mathbf{R}^{n_i\times n_j}$，$b_i\in \mathbf{R}^{n_i}$，$i=1,\cdots,N$ 且具有性质：

i) A_{ii} 为上 Hessenberg 矩阵，$i=1,\cdots,N$。

ii) b_i 除第一个元素不为零外，其余元素全为零，$i=1,\cdots,N$。

iii) (A_{ii},b_i) 可控。

我们称 $(\tilde{A},\tilde{B})$ 为广义 Pascal-like 规范型。

不难发现，在定理 1 中 (A_{ii},b_i) 为单输入 Pascal-like 可控规范型。

下面我们讨论问题 (P) 中 F 的表达式。

根据(1)的特点，取

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix}f_1^T & & & 0\\ & f_2^T & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f_N^T\end{bmatrix}\in \mathbf{R}^{m\times n},\quad f_i\in \mathbf{R}^{n_i},$$

则 $\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{F}$ 具有形式

$$\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{F}=\begin{bmatrix} A_{11}-b_1f_1^T & A_{12}^* & \cdots & A_{1N}^* \\ & A_{22}-b_2f_2^T & \cdots & A_{2N}^* \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{NN}-b_Nf_N^T \end{bmatrix}.$$

考虑到 (A_{ii}, b_i) 可控，因此问题 (P) 转化为将 Λ 分成 N 个共轭封闭子集 $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_N$，$\Lambda_i$ 元素个数为 n_i。

问题 (P_i)。求 $f_i\in\mathbf{R}^{n_i}$ 使 $\sigma(A_{ii}-b_if_i^T)=\Lambda_i$，这样原问题的解 F 为

$$F=Q\tilde{F}P.$$

[7、6]利用 (A, B) 的块上 Hessenberg 规范型给出了两个求解问题 (P) 的稳定算法。在本文中问题 (P_i) 是相互独立的，因此可以并行求解. 这一特点是块上 Hessenberg 规范型所不具有的。此外，化 (A,B) 为广义 Pascal-like 规范型的计算量同化 (A,B) 为块上 Hessenberg 规范型运算量相当。因此，本文的算法（见 §3）比基于块上 Hesseberg 规范型所产生的求解问题 (P) 即求解极点配置问题的算法优越。

§3. 稳定算法

首先给出化 (A,B) 为广义 Pascal-like 规范型的数值算法。

算法(一)

步 1. 记 $B=(\tilde{b}_1\tilde{B}_{12})$，计算平面旋转变换 P_1 使得

$$P_1\tilde{b}_1=\begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix},\ b_{11}\in\mathbf{R}.$$

记

$$P_1AP_1^T=\begin{bmatrix} a_{11} & B^{(1)} \\ a_1^{(1)} & \tilde{A}_{22}^{(1)} \end{bmatrix},\ a_{11}\in\mathbf{R},$$

若 $a_1^{(1)}=0$，转步 4，否则转步 2.

步 2. 计算平面旋转变换 $\tilde{P}_1^{(1)}$ 使得

$$\tilde{P}_1^{(1)}a_1^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{21} \\ 0 \end{bmatrix},\ a_{21}\neq 0,\ a_{21}\in\mathbf{R}.$$

令

$$P_1^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 & \\ & \tilde{P}_1^{(1)} \end{bmatrix},\ P_1^{(1)}P_1\Rightarrow P_1.$$

步 3. 假若已计算得平面旋转变换乘积 P_1 使得

$$P_1AP_1^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & & a_{ii-1} & a_{ii} & \\ & & 0 & a_1^{(i)} & A_{22}^{(1)} \end{bmatrix},\quad P_1\tilde{b}_1=\begin{bmatrix} b_{11} \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix},$$

$b_{11} \neq 0$，$b_{11} \in \mathbf{R}$，$a_{jj-1} \neq 0$，$a_{jj-1} \in \mathbf{R}$，$j = 2, \cdots, i$. 若 $a_1^{(i)} = 0$,转步 4. 否则对 $a_1^{(i)}$ 实行步 2 直到计算平面旋转变换乘积 P_1,使得

$$P_1 A P_1^T = \begin{bmatrix} A_{11} & * \\ 0 & A_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad P_1 B = \begin{bmatrix} b_1 & * \\ 0 & B_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n_1},$$

$A_{11} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$，$A_{11}$ 为对角线下次对角元全不为零的上 Hessenberg 矩阵.

若 $B_2^{(1)}$ 第一列向量为零,则计算置换阵 $Q = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \tilde{Q} \end{bmatrix}$ 使得 $B_2^{(1)}\tilde{Q}$ 第一列不为零.

步 4. 假设已求得平面旋转更换乘积 P 及正整数 $n_1, \cdots, n_{N-1}, n_N$ 满足

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} \cdots A_{1N-1}^{(N-1)} & A_{1N}^{(N-1)} \\ \ddots & \\ A_{N-1N-1}^{(N-1)} & A_{N-1N}^{(N-1)} \\ & A_{NN}^{(N-1)} \end{bmatrix}, \quad PB = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & \ddots & * & \\ & & b_{N-1} & \\ & & & b_N^{(N-1)} \quad \tilde{B} \end{bmatrix} Q^T,$$

$A_{ii} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$，$b_i \in \mathbf{R}^{n_i} (i = 1, \cdots, N-1)$，$A_{NN}^{(N-1)} \in \mathbf{R}^{n_N \times n_N}$，$b_N^{(N-1)} \in \mathbf{R}^{n_N}$，$A_{ii}$，$b_i$ $(i = 1, \cdots, N-1)$ 具有定理 1 的性质 i)，ii)，iii). 若 $A_{NN}^{(N-1)}$ 且 $b_N^{(N-1)}$ 具有定理 1 的性质i),ii),iii)，则置 $A_{NN}^{(N-1)} \Rightarrow A_{NN}$，$b_N^{(N-1)} \Rightarrow b_N$，计算过程终止. 否则对矩阵 $(A_{NN}^{(N-1)}, B_N^{(N-1)})$ 重复步 1 至步 3. 计算得平面旋转变转乘积 P_N 和置换阵 Q_N 让

$$\begin{bmatrix} I & \\ & P_N \end{bmatrix} P \Rightarrow P, \; Q \begin{bmatrix} I & \\ & Q_N \end{bmatrix} \Rightarrow Q, \; N + 1 \Rightarrow N,$$

其中 $B_N^{(N-1)} = [b_N^{(N-1)} \tilde{B}]$，转步 4.

算法 1 利用一平面旋转变量实现,因而是数值稳定的.

完成算法(一)后,我们就可以直接利用[6]提供的算法. 为了文章的完整性，我们给出[6]的算法.

算法(二)[6]. 给定

$$(\tilde{b}_1, \tilde{A}_1) = \left[\begin{array}{c|ccccc} B_1 & a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n-1} & a_{1n} \\ & a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & a_{32} \cdots a_{3n-1} & a_{3n} \\ & & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{array}\right], \quad \begin{array}{l} B_1 \neq 0 \\ a_{ii-1} \neq 0, \\ (i = 2, \cdots, n), \end{array}$$

$$\Lambda = \langle \lambda_1, \cdots, \lambda_n \rangle,$$

求 $f \in \mathbf{R}^n$，$\sigma(\tilde{A}_1 - \tilde{b}_1 f^T) = \Lambda$.

步 1. 对于 $j = 1$ 到 $n - 1$，计算一系列平面旋转变换 $Q_j = P_{j,1} \cdots P_{j,n-j}$ 使得 $(\tilde{A}_j - \lambda_j I) Q_j = R_j$，$R_j$ 为上三角阵.

令 $\rho_j = e_1^T R_j e_1$，$\phi_j = \rho_j / \beta_j$，

$$\begin{bmatrix} x \\ \beta_{j+1} \\ x \end{bmatrix} = P_{j,n-j} \cdot \begin{bmatrix} \beta_j \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\begin{array}{c|c} x & x \cdots x \\ \hline x & \\ 0 & \tilde{A}_{j+1} \end{array}\right] = Q_j^T R_j + \lambda_j I,$$

其中 x 为某确定数或向量.

步 2. 置 $f_n^T = (\tilde{A}_n - \lambda_n)/B_n$，对于 $j = n - 1$ 到 1,计算

$$\tilde{f}_i^T=(\phi_i,\tilde{f}_{i+1}^T)Q_i^T.$$

步 3. $\tilde{f}=\tilde{f}_1$ 为所求,计算结束.

有了算法(一)和算法(二),我们就能给出求解问题 (P) 的算法.

算法(三).

步 1. 利用算法(一)计算得正交阵 P 和 Q,使得 $(\tilde{B},\tilde{A})=(PBQ,\ PAP^T)$ 为广义 Pascal-like 规范型.

步 2. 划分 Λ 为 N 个共轭封闭的子集 $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_N$, Λ_i 元素个数为 n_i, 其中 $n_1,\cdots,n_N$, A_{ii},b_i 的含义见定理 1 或算法(一).

步 3. 利用算法(二),计算 $f_i\in\mathbf{R}^{n_i}$ 使得

$$\sigma(A_{ii}-b_if_i^T)=\Lambda_i,\ i=1,\cdots,N.$$

步 4. 置

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix} f_1^T & & & 0\\ & f_2^T & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f_N^T\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{m\times n},\quad F=Q\tilde{F}P,$$

则 F 为所求,计算终止.

关于算法(三),不难看出,它具有特点:

1. 算法的第一步通过数值稳定的正交变换实现, 这保证了降阶过程的数值稳定性.

2. 算法的第二步也是数值稳定的,从而算法(三)是数值稳定的.

3. 算法首先将多输入反馈极点配置问题转化为 N 个相互独立的单输入极点配置问题,继而可并行求解. 这一点已有的算法是不具有的. 正如 §2 最后分析, 算法(三)比已有算法优越.

总之,算法(三)计算简单、数值稳定、是求解极点配置问题的十分有效的算法.

§4. 数　　例

例.

$$A=\begin{bmatrix} 1.5 & 1.0 & 0.0 & -1.5\\ -0.5 & 1.0 & 0.0 & -1.5\\ -0.5 & -1.5 & 2.0 & 1.0\\ 0.0 & -1.0 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0.5 & 1.0\\ 0.5 & 0.0\\ 0.5 & 0.0\\ 0.5 & -1.0\end{bmatrix},$$

$$\Lambda=\{-1.0,\ 0.0,\ 1.0,2.0\},$$

在宇宙 68000 机上利用算法(三)计算得

$$n_1=2,\ n_2=2,$$

$$P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5\\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix},\quad PB=\left[\begin{array}{c|c} 1.0 & 0.0\\ 0.0 & 1.0\\ \hline 0.0 & 1.0\\ 0.0 & 0.0\end{array}\right],$$

$$PAP^T=\left[\begin{array}{cc|cc}0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.5\\ 1.0 & 1.0 & -0.5 & 0.0\\ \hline 0.0 & 0.0 & 3.0 & -1.5\\ 0.0 & 0.0 & 1.5 & 1.0\end{array}\right].$$

分划Λ为 Λ_1,Λ_2，$\Lambda_1=\{-1.0,0.0\}$，$\Lambda_2=\{1.0, 2.0\}$，由算法(二)计算得

$$f_1^T=(2.0000001,\ 3.0000001),$$

$$f_2^T=(1.0000001,-1.5000002),$$

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix}2.0000001 & 3.0000001 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 1.0000001 & -1.5000002\end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix}2.5000001 & -0.5000000 & 2.5000001 & -0.5000000\\ -0.2500001 & 1.2500000 & 0.2500001 & -1.2500000\end{bmatrix}.$$

参 考 文 献

[1] C. C. Paige, Properties of Numerical Algorithm Related to Computing Controllability. IEEE Trans. Automat Contr., Vol. AC-26 130—138, 1981.

[2] P. Hr. Petkov, Computational Algorithm For Linear Control Systems: A Brief Survey. Int. J. Syst. Sci., 16: 4, (1985), 465—477.

[3] M. M. Fahmy, J. O. Reilly, On Eigenstructure Assignment in Linear Multirarable Systems. IEEE Trans. Aut. Control, AC-27, 1982, 690—693.

[4] W. A. Wolovich, Linear Multivariable Systems (New York: Spriger), 1975.

[5] V. O. Lorass-Nagy, M. R. Kenmon, R. Rabsen, Int. J. Systems Sci., Vol. 12(3), 1981, 383—392.

[6] Miminis, G. S., Numerical Algorithms For the pole Placement problem, Ph. D. dissertation, School of Comput science MCGILL University, Montreal, Canada. (1985).

[7] C. C. Paige, Private Communication.

[8] Wilkinson, J. H., The Algebraic Eigenvalue Problem (Oxford: Clarendon), 1965.

[9] A. Varge, IEEE. Trans. Automat. Contr., Vol 26, 517; 1981.

[10] E. J. Davison and S. H. Wang, New Results on The Controllability and Observability of General Composite Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-20, 123—128, 1975.

[11] Miminis, G. S(1988), Private Communication.