计算角形块结构问题主规划初始解的一个方法*

魏紫銮
(中国科学院计算中心)

A METHOD TO COMPUTE AN INITIAL FEASIBLE SOLUTION OF THE MASTER PROGRAM PROBLEM FOR BLOCK ANGULAR STRUCTURE

Wei Zi-luan
(*Computing Center, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper we present a method to compute an initial feasible solution of the master program problem for block angular structure, It can be applied to the general case with "≤", "≥" and "=" in the main Constraints. The principal ideas of the algorithm are firstly to select a basic feasible solution in each subproblem, Then substituting each of them into the main constraints, secondly to introduce non-negative deviation variables into the main violation constraints, and Finally to minimize the sum of all deviation variables. If the optimality condition of this minimization problem is satisfied, and the sum of all deviation variables is equal to zero, then an initial basic feasible solution of the master program problem is obtained; if other wise then the original problem is not feasible.

一、引　言

对于角形块结构线性规划问题，在应用 Dantzig-Wolfe 分解方法进行计算时，先要确定问题的主规划的一个初始基本可行解．有关这一问题，在[2]中已经有了粗略的讨论．

本文提出解决这一问题的算法，它适用于原来问题的主约束具有"≤"，"≥"和"="的一般情况．这一算法的基本思想是先在每一子约束中选取一个基本可行解，并把它们代入主约束的方程组中，对不满足主约束的方程，引入相应的非负偏差变量，并继续极小化所有偏差变量的和．如果这一极小化问题已经满足最优性条件且偏差变量之和为零，我们就得到了主规划问题的一个初始基本可行解；当偏差变量之和大于零时，主规划问题不存在可行解．因而原来问题也就没有可行解存在．对于主规划的解是退化的情况，将另外讨论．

* 1979 年 9 月 20 日收到．

本算法和分解算法的计算过程是完全相同的，只是它们极小化的目标函数不同．所以，它们在计算的程序结构方面完全是相同的．

二、问题的叙述

我们考虑有以下形式的线性规划问题 P.

P:

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_lx_l, \tag{2.1}$$

约束:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + \cdots + A_{l1}x_l \leqslant b_{01}, \\ A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{l2}x_l \geqslant b_{02}, \\ A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + \cdots + A_{l3}x_l = b_{03}, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} B_1x_1 & & & = b_1, \\ & B_2x_2 & & = b_2, \\ & & \cdots & \\ & & & B_lx_l = b_l, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_l \geqslant 0,$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, B_i$ 分别是 $q \times n_i$, $h \times n_i$, $(m-q-h) \times n_i$ 和 $m_i \times n_i$ 的矩阵; b_{01}, b_{02}, b_{03} 分别是给定的 $q, h, m-q-h$ 维的列向量，且 $b_{0i} \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$; b_i 和 c_i 分别是给定的 m_i 维，n_i 维的列向量; x_i 是 n_i 维的列向量，$i = 1, 2, \cdots, l$, 其中约束(2.2)称为问题 P 的主约束．

为了说明 Dantzig-Wolfe 分解算法的主要理论依据，我们引用以下的定理．

定理 2.1. 设 $Y = \{y: Ay = b, y \geqslant 0\}$ 是一非空的多面体集合，则它的极点的集合是非空且有限的，令其为 $y_1, y_2, \cdots, y_k$. 如果 Y 是无界的，则它的极方向的集合是非空且有限的，令其为 $d_1, d_2, \cdots, d_t$. 则 $y \in Y$ 当且仅当 y 可以表示为 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 的凸组合加上 $d_1, d_2, \cdots, d_t$ 的非负线性组合，即

$$\begin{aligned} & y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j d_j, \\ & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \\ & \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k; \\ & \mu_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \cdots, t. \end{aligned}$$

有关本定理的证明，可参阅[2].

设 $S_i = \{x_i: B_ix_i = b_i, x_i \geqslant 0\}$ 是非空的凸多面体集合，$i = 1, 2, \cdots, l$ (如任一 S_i 是空集，则问题 P 没有可行解)，由定理 2.1，令 x_{ij}, d_{ij} 分别表示 S_i 的极点和极方向，则对任意的 $x_i \in S_i (i = 1, 2, \cdots, l)$, 它可以表示为如下的形式:

$$x_i = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{t_i} \mu_{ij} d_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, l \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{ij} = 1,\ \lambda_{ij} \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, k_i;\ \mu_{ij} \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, t_i.$$

如果把关系式(2.4)代入问题 P 的(2.1)、(2.2)式，我们就得到以下形式的问题 P'.

P':

$$\min z' = \sum_{i=1}^{l} \left[\sum_{j=1}^{k_i} (c_i x_{ij}) \lambda_{ij} + \sum_{j=1}^{t_i} (c_i d_{ij}) \mu_{ij} \right], \tag{2.5}$$

约束：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{l} \left[\sum_{j=1}^{k_i} (A_{i1} x_{ij}) \lambda_{ij} + \sum_{j=1}^{t_i} (A_{i1} d_{ij}) \mu_{ij} \right] \leqslant b_{01}, \\ \sum_{i=1}^{l} \left[\sum_{j=1}^{k_i} (A_{i2} x_{ij}) \lambda_{ij} + \sum_{j=1}^{t_i} (A_{i2} d_{ij}) \mu_{ij} \right] \geqslant b_{02}, \\ \sum_{i=1}^{l} \left[\sum_{j=1}^{k_i} (A_{i3} x_{ij}) \lambda_{ij} + \sum_{j=1}^{t_i} (A_{i3} d_{ij}) \mu_{ij} \right] = b_{03}, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, l; \tag{2.7}$$

$$\lambda_{ij} \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, k_i \quad i = 1, 2, \cdots, l;$$

$$\mu_{ij} \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, t_i \quad i = 1, 2, \cdots, l.$$

这一问题一般称为主规划，它与原来的问题 P 完全是等价的. 对此有以下定理.

定理 2.2. 设 λ_{ij}^*, μ_{ij}^* 是(2.5)—(2.7)的解，则向量

$$x_i = \sum_{j=1}^{k_i^*} \lambda_{ij}^* x_{ij} + \sum_{j=1}^{t_i^*} \mu_{ij}^* d_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, l$$

是(2.1)—(2.3)的解.

本定理的证明可参阅[3].

要直接计算主规划问题 P' 的解，也是很困难的. 因为在实际计算中，我们不可能把每个集合 S_i 的所有极点和极方向都找出来，而是先在每个 S_i 中找出一个(或若干个)极点或极方向，使它们满足条件(2.6)—(2.7)，然后应用迭代的方法，使条件(2.5)也得到满足. 所以，要求得主规划问题 P' 的最优解，首先需要确定它的一个初始基本可行解，使它满足(2.6)—(2.7).

三、算法的数学描述

为了得到主规划问题 P' 的一个初始基本可行解，我们对(2.6)式引入非负的偏差变量 $r_i (i = 1, 2, \cdots, m)$，并且令

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ A_{i3} \end{bmatrix},\ i = 1, 2, \cdots, l;\ b = \begin{bmatrix} b_{01} \\ b_{02} \\ b_{03} \end{bmatrix}.$$

设 x_{ij} 是 S_i 的一个可行解，$i = 1, 2 \cdots, l$，则对每一个 x_{ij}，可以生成它相应的列向量 P_{ij} (见[4])，即

$$P_{ij} = A_i x_{ij}. \tag{3.1}$$

如果 x_{ij} 是 S_i 的一个极方向 d_{ij}，则有

$$\bar{P}_{ij} = A_i d_{ij}. \tag{3.2}$$

令 $\delta_1(r)$ 表示阶梯函数,定义如下:

$$\delta_1(r) = \begin{cases} 1, & \text{当 } r > 0, \\ 0, & \text{当 } r = 0, \\ -1, & \text{当 } r < 0. \end{cases}$$

当 $r > 0$ 时，$\delta_0(r)$ 定义为 $\delta_0(r) = 1$；当 $r \leqslant 0$ 时，$\delta_0(r) = 0$.

现在我们来考虑以下的线性规划问题 Q.

Q:

$$\min z'(r) = \sum_{i=1}^{q} \delta_0(\tilde{b}_i) r_i + \sum_{i=q+1}^{q+h} \delta_0(-\tilde{b}_i) r_i + \sum_{i=q+h+1}^{m} |\delta_1(-\tilde{b}_i)| r_i, \tag{3.3}$$

约束:

$$\sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{k_i} P_{ij} \lambda_{ij} + \sum_{j=1}^{t_i} \bar{P}_{ij} \mu_{ij} \right) - \sum_{i=1}^{m} \delta_1(\tilde{b}_i) r_i = b, \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \cdots, l,\ \lambda_{ij} \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, k_i,\ i = 1, 2, \cdots, l; \\ \mu_{ij} \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, t_i,\ i = 1, 2, \cdots, l;\ r_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, m, \end{cases} \tag{3.5}$$

其中 $\tilde{b}^T = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \cdots, \tilde{b}_m)$，且

$$\tilde{b} = \bar{b} - b. \tag{3.6}$$

由以下公式计算 $\bar{b}$，

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{k_i} P_{ij} \lambda_{ij} + \sum_{j=1}^{t_i} \bar{P}_{ij} \mu_{ij} \right). \tag{3.7}$$

为求得问题 Q 的最优解,首先需要确定它的一个初始基本可行解. 为此,我们在每个 S_i 中选取一个可行解 x_{i1}，根据(3.1)式和(3.7)式分别计算 $P_{i1}(i = 1, 2, \cdots, l)$ 和 $\bar{b}$，同时由(3.6)式计算 $\tilde{b}$ 的值. 显然,我们可以得到问题 Q 的一初始基本可行解 $\begin{bmatrix} \lambda \\ r \end{bmatrix}$，它所对应的基矩阵 B 有以下的形式:

$$B = \begin{bmatrix} P & -I_m \\ I_l & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

其中 $P = [P_{11}, P_{21}, \cdots, P_{l1}]$，$I_l$ 是 l 阶的单位矩阵，I_m 可以写为如下形式:

$$I_m = \begin{bmatrix} \delta_1(\tilde{b}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_1(\tilde{b}_m) \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

以 $\bar{c}^T(\tilde{b})$ 表示(3.3)的价格系数向量,其中

$$\bar{c}^T(\tilde{b}) = (\delta_0(\tilde{b}_1), \cdots, \delta_0(\tilde{b}_q), \delta_0(-\tilde{b}_{q+1}), \cdots, \\ \delta_0(-\tilde{b}_{q+h}), |\delta_1(-\tilde{b}_{q+h+1})|, \cdots, |\delta_1(-\tilde{b}_m)|).$$

由此我们不难计算初始基本可行解及相应的单纯形乘子,即

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & -I_m \\ I_l & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_l \\ -I_m & I_m P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -I_m b + I_m P 1 \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\Pi_B = (\Pi_0, \Pi_1) = (0, \cdots, 0, \bar{c}^T(\tilde{b})) \begin{bmatrix} 0 & I_l \\ -I_m & I_m P \end{bmatrix} = (-\bar{c}(\tilde{b}) I_m, \bar{c}^T(\tilde{b}) I_m P).$$

由此可见

$$\Pi_0 = -\bar{c}^T(\tilde{b}) I_m, \tag{3.11}$$

$$\Pi_1 = \bar{c}^T(\tilde{b}) I_m P = -\Pi_0 P, \tag{3.12}$$

其中 Π_0, Π_1 分别是前 m 个约束和后 P 个约束所对应的单纯形乘子.

在问题 Q 中,使 $z'(r)$ 达到极小值的最优性条件可以由以下给出:

(1) 对 S_i 的每一个极点 x_{ij}(或极方向),它所对应的缩减价格必须满足:

$$0 \geqslant z_{ij} - \hat{c}_{ij} = (\Pi_0 \Pi_1) \begin{bmatrix} A_i x_{ij} \\ e_i \end{bmatrix} - \bar{c}_i x_{ij} = (\Pi_0, \Pi_1) \begin{bmatrix} A_i x_{ij} \\ e_i \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

其中 $\bar{c}_i = 0$. 条件(3.13)还可以写成等价形式:

$$\max_{j \in S_i} \{\Pi_0 A_i x_{ij} + \Pi_1^i\} \leqslant 0, \; i = 1, 2, \cdots, l. \tag{3.14}$$

为确定(3.14)条件是否满足,首先需要计算以下每个子问题的解:

$$\begin{aligned} &\max z_i = \Pi_0 A_i x_i, \\ &B_i x_i = b_i, \; x_i \geqslant 0, \; i = 1, 2, \cdots, l. \end{aligned} \tag{3.15}$$

设 x_i^* 是第 i 个子问题的最优解,则条件(3.14)可以写为

$$z_i(x_i^*) + \Pi_1^i \leqslant 0, \; i = 1, 2, \cdots, l. \tag{3.16}$$

如果 x_i^* 是第 i 个子问题的一个极方向,则条件(3.13)可以写为:

$$z_i(x_i^*) \leqslant 0. \tag{3.17}$$

(2) 对主规划问题 P' 的(2.6)式中的"$\leqslant$"约束,它所对应的松弛变量应当满足的最优性条件为

$$\bar{z}_i - \bar{c}_i = (\Pi_0 \Pi_1) \begin{bmatrix} e_i \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \Pi_0 e_i = \Pi_0^i \leqslant 0, \; i = 1, 2, \cdots, q. \tag{3.18}$$

(3) 对主规划问题 P' 的(2.6)式中的"$\geqslant$"约束,它所对应的剩余变量应当满足的最优性条件为

$$\bar{z}_i - \bar{c}_i = (\Pi_0, \Pi_1) \begin{bmatrix} -e_i \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\Pi_0 e_i = -\Pi_0^i \leqslant 0,$$

即

$$\Pi_0^i \geqslant 0, \; i = q+1, \cdots, q+h. \tag{3.19}$$

如果条件(1)—(3)都得到满足,则我们就得到问题 Q 的一个最优解. 当 $z'(r) = 0$ 时,Q 的最优解也就是主规划问题 P' 的一个初始基本可行解. 从而就可以计算问题 P' 的最优解.

当 $z'(r) > 0$ 时,主规划问题 P' 没有可行解. 于是,原来的问题 P 也没有可行解.

如果条件(1)—(3)中有任一不满足,则可以由 x_i^*(或 $\pm e_i$)生成相应的列向量,它与

Q的基本解一起构成新的问题 Q，同时重新计算问题Q的最优解，并检验是否满足最优性条件．这样经过有限次的迭代，必定可以确定主规划问题 P' 或是有一个初始基本可行解，或是没有可行解．

四、计算步骤和例子

由以上的讨论，我们可以把确定主规划问题 P' 的初始基本可行解的计算步骤摘要如下：

（1）在每一 S_i 中选取一基本可行解 x_{i1}，$i=1,2,\cdots,l$，如果有任一 S_i 中不存在基本可行解 x_{i1}，则原来问题没有可行解，计算结束．否则就由(3.1)，(3.6)，(3.7)分别计算 $P_{i1}(i=1,2,\cdots,l)$，$\bar{b}$ 和 $\tilde{b}$，并由 (3.9)—(3.12)确定问题Q的初始可行解和相应的单纯形乘子．

（2）求解以下的 l 个子问题：

$$\max z_i=\Pi_0A_ix_i$$

$$B_ix_i=b_i,\ x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,l. \tag{4.1}$$

设 x_i^* 是第 i 个子问题的最优解，$z_i^*=z_i(x_i^*)$ 是最优值．

（3）计算 $z_i^*+\Pi_1^i, i=1,2,\cdots,l$．令 $I=\{i:z_i^*+\Pi_1^i>0,\ i=1,2,\cdots,l\}$，若 I 是空集，则进行步骤(5)，否则进行步骤(4)．

（4）对 $i\in I$，由(3.1)或(3.2)形成相应的列向量 P_{ii}^*，把这些列向量与Q的基本变量相应的列组成新的问题 Q，继续计算问题Q的最优解，然后重新返回步骤(2)．

（5）确定集合 $I_1=\{i:\Pi_0^i>0, i=1,2,\cdots,q\}, I_2=\{i:\Pi_0^i<0, i=q+1,\cdots,q+h\}$，若 I_1，I_2 均为空集，则执行步骤(6)，否则对于 $i_1\in I_1$，$i_2\in I_2$ 分别生成以下的列向量：

$$\begin{bmatrix} e_{i_1} \\ 0 \end{bmatrix},\quad i_1\in I_1, \tag{4.2}$$

$$\begin{bmatrix} -e_{i_2} \\ 0 \end{bmatrix},\quad i_2\in I_2, \tag{4.3}$$

其中 e_{i_1}，e_{i_2} 分别是第 i_1，i_2 位是 1 的 m 维单位向量．它们所对应的价格系数均为零．同样，把这些向量与Q的基本变量相应的列组成新的问题 Q，继续计算问题Q的最优解，然后返回步骤(2)．

显然，如果主规划问题 P' 的(2.6)式中不包含“≤”或“≥”的约束，本步骤可以略去．

（6）确定 $z'(r)$ 的值，当 $z'(r)=0$ 时，就得到主规划问题 P' 的一个初始基本可行解．同时可以继续计算问题 P' 的最优解．当 $z'(r)>0$ 时，主规划问题 P' 没有可行解存在，原来问题也没有可行解，计算结束．

我们应用本算法在电子计算机上计算了以下的例子．

例．求解以下的线性规划问题．

$$\min z=4x_1-2x_2+x_3-x_4+y_1-2y_2-y_3+2y_4,$$

约束：

$$
\begin{aligned}
&3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 + 2y_5 \leqslant 10,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 2y_5 \leqslant 17,\\
&2x_1 - x_2 + x_3 = 4,\\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 12,\\
&y_1 + y_3 = 2,\\
&y_2 + y_4 = 2,\\
&y_1 + y_2 + y_5 = 3,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0, \quad y_1, y_2, \cdots, y_5 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

首先在X块，Y块中分别选取基本可行解 $x_1^T = (2, 0, 0, 10)$，$y_1^T = (1,2,1,0,0)$. 由(3.1)式计算它们所生成的列向量. 同时由(3.6)，(3.7)计算 $\tilde{b}$ 及 $\bar{b}$. 由此就可以确定问题Q的初始基本可行解的方程组：

$$
\begin{aligned}
&16\lambda_{11} + \lambda_{21} - r_1 = 10,\\
&12\lambda_{11} + 4\lambda_{21} + r_2 = 17,\\
&\lambda_{11} = 1,\\
&\lambda_{21} = 1,\\
&\lambda_{11}, \lambda_{21}, r_1, r_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

显然 r_2 是一松弛变量，r_1 是偏差变量. 由以上方程组可求得 $(\lambda^T, r^T) = (1, 1, 7, 1)$. 它所对应的单纯形乘子是

$$
\Pi_B = (\Pi_0, \Pi_1) = \bar{c}_B B^{-1} = (0, 0, 1, 0)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 1 & -12 & -4 \end{bmatrix},
$$

$$
\Pi_0 = (-1, 0), \quad \Pi_1 = (16, 1),
$$

且 $z'(r) = r_1 = 7$.

继续执行步骤(2)，由(4.1)分别计算X块，Y块的最优解，即有 $x_2^{*T} = (0, 6, 10, 0)$，$y_2^T = (2, 1, 0, 1, 0)$. 且 $z_1^* = 16$，$z_2^* = 4$.

由步骤(3)容易验证 $I = \{1, 2\}$.

执行步骤(4)，形成如下新的问题Q.

$$
\min z'(r) = r_1
$$

约束：

$$
\begin{aligned}
&16\lambda_{11} + \lambda_{21} - r_1 - 16\lambda_{12} - 4\lambda_{22} = 10,\\
&12\lambda_{11} + 4\lambda_{21} + r_2 + 16\lambda_{12} + 4\lambda_{22} = 17,\\
&\lambda_{11} + \lambda_{12} = 1,\\
&\lambda_{21} + \lambda_{22} = 1,\\
&\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, r_1, r_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

不难计算这一问题的最优解是 $(\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{12}, r_2) = (0.9375, 1, 0.0625, 0.75)$，它所对应的单纯形乘子是

$$
\Pi = (\Pi_0, \Pi_1) = (0, 0, 0, 0)B^{-1} = (0, 0, 0, 0),
$$

且 $z'(r)=0$.

返回步骤(2),继续进行迭代,显然有 $I=\phi$. $I_1=\phi$, 且 $z'(r)=0$. 所以,我们所得到的解就是主规划问题的一初始基本可行解.

席少霖同志对本文提出一些有益的意见,在此表示感谢.

参考文献

[1] G. B. Dantzig, P. Wolfe, *Operations Res.*, 8, Jan., Feb., oct. (1960).

[2] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, Linear programming and Network Flows, John Wiley & Sons, INC, (1977).

[3] Hans P. Künri, H. G. Tzschach, C. A. Zehnder, Numerical methods of mathematical optimization with Algol and Fortran programs, Academic press New York and London, (1968).

[4] Leon S. Lasdon, Optimization theory for large systems, The Macmillan Company, (1970).