

关于随机选取法及其对 不定常激波的计算*

黄敦 黄禄平 柳玉芝(北京大学)

ON RANDOM CHOICE METHOD AND THE COMPUTATION OF UNSTEADY SHOCK WAVE

Huang Dun Huang Lu-ping Liu Yu-zhi

(Department of Mathematics, Peking University)

Abstract

A. J. Chorin and G. A. Sod developed in these years the so called random choice method or Glimm-Chorin method^[1-7]. There are only a few papers on this method. Further test or analysis of the method is desirable. The first author of this paper obtained a set of analytical solution with high accuracy for a problem involving unsteady shock wave^[8]. In this paper this analytical solution is used to test the quality of random choice method. The great influence of spatial step length is observed. The running time per time step depends on the iteration when solving the Riemann problem. Utilizing the monotonic and convex properties of an important function^[11] the number of iterations is no more than 4 or 5, thus running time is reduced. This is important when we generalize this method to two dimensional unsteady case. Some interesting phenomena are summarized on the basis of many test runs.

§1. 引言

1976年 Chorin 把 Glimm 在 [4] 中构造非线性双曲型方程组解的方法做了一些改变,用于气体力学的欧勒方程组,并称之为随机选取法^[2,3](以下简称 RCM)。这个方法虽然与差分法一样地划网格,但与一般差分法有根本的不同。首先,它采用了随机数,其次,它没有格式粘性。Parlett 在 [1] 中认为,RCM 是一个很有希望的新方法,因为它可用于处理很多强间断的相互作用。在燃烧现象中,随机地产生不少强间断,这些强间断会相互作用,如用一般差分法,则会将接触间断严重抹平而引起较大的误差。RCM 为计算燃烧等问题开辟了前景^[3,7],但此法尚处于萌芽状态。[7]的引文表明,有关此法的文章仅有少数几篇,要想进一步了解及完善 RCM,有待大量的试算和理论分析。

人们常常用定常激波或具自模拟解的问题 [2,5] 等对计算间断解的数值方法进行质

* 1979年11月9日收到。

量考察,以期进一步了解方法,并作为计算其他实际问题时的借鉴. 试算问题如果没有特征长度,则难于考察空间步长的大小对计算结果的影响. 尤其难以了解激波附近数值解所得结果的好坏,波峰被抹掉多少. [8] 给出了一套高精度但公式简单的分析解,用以计算平面强爆炸波正面遇固壁以后的正反射问题. 这个问题有特征长度,我们就用它来试 RCM, 由此观察此方法的某些特点(详见 § 5).

[5] 提到 RCM 比一般差分法所占机时略大, 我们加快了计算, 详见 p.39—40. 若将 RCM 推广到二三维不定常情形, 则加快计算速度至为重要.

§2. 问题的提法

如图 1 所示, 设在时刻 $-t_1 (t_1 > 0)$ 且在 $x = R_0$ 的平面发生强爆炸, 就会有一个强激波 OA 向左传播. 所谓“强”爆炸是指忽略激波前的空气的内能(见 [10, 8]). 选取适当的坐标系, 使得 $t = 0$ 时, 激波到达固壁 $x = 0$ 处, 并发生反射. 反射激波为 OB 曲线, 向右传播. 欲求在不同时刻的流场分布, 就应在给出恰当的初值和边界条件时求解非线性欧勒方程组:

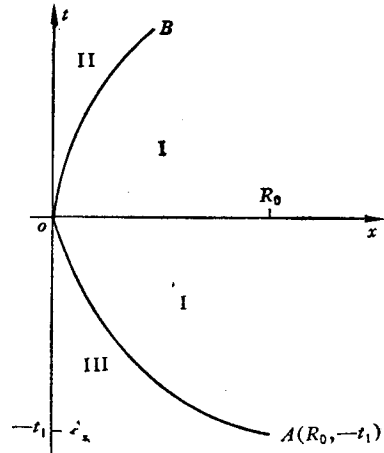


图 1

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left[\rho u \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + pu \right]}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 p 是压力, ρ 是密度, u 是速度, ε 是单位体积的内能, 且状态方程用

$$\varepsilon = \frac{p + \gamma p_0}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{c_0^2}{\gamma - 1}, \quad (2)$$

其中 $p_0 = \frac{1}{\gamma} \rho_0 c_0^2$. 当 $c_0 = p_0 = 0$, $\gamma = 1.4$ 时即为常比热完全气体的状态方程. (2) 可用于空气以外的某些介质.

图 1 中 III 为静止区. I 区有自模拟解^[10], 即实质上没有特征长度, 解只随 x 与 t 的组合而变. II 区则不然, 这个区中既无自模拟解, 又不是均熵流, 而且气体质点除 $x = 0$ 处外都有流速, 并且压力、密度随时间变化甚烈, 尤其当 t 略大于 0 时更是如此. 此外, 激波前后 $\frac{\partial u}{\partial x} \approx 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial x} \approx 0$, $\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$. 因此, 用这个问题来检验 RCM 的质量要比 [2, 5] 中所选用的例子严峻一些.

在作具体试算时, 我们选 $\frac{1}{K} t_1 = 0.21718193 \times 10^{-4}$ 秒, $R_0 = 0.1K$ 米, 其中 K 是一个可以任意调节的无量纲常数, 爆炸后能量为 $E = 2.7349056 \times 10^6 \times K$ 焦耳/米², $\rho_1 = 1.29$ 公斤/米³. 这样入射波遇 $x = 0$ 处固壁时, 激波上峰值为一百大气压, 即 $1.012928 \times$

10^7 牛顿/米². $K = 1$ 大致相当于每平方米 0.7 公斤 TNT 的能量.

至于初始时刻 t_3 , 有时选为零, 有时选 $\frac{t_3}{t_1} \ll 1$ 并按 [8] 的分析解算出此时刻的分布作为初值.

§3. 方法概述

RCM 如通常的差分法, 也是用两族平行直线 $x = j\Delta x, t_n = n\Delta t$ 将 $x-t$ 平面上的求解区域划成网格, 其中 Δx 为空间步长, Δt 为时间步长, 见图 2. 假设第 n 层格点上的值 f_j^n 已知, 将它看作整个区间 $(j - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ 上的函数值, 这样函数 f 就成了阶梯函数, 在点 $(j + \frac{1}{2}, n)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) 构成一系列黎曼问题. 每个黎曼问题都可以有准确的公式求解. 设 ξ_n 是 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上均匀分布的随机数列, 取 $\Delta t/2$ 足够小, 使得由不同的黎曼问题产生的波不会互相作用. 取 $f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = f((j + \frac{1}{2} + \xi_n)\Delta x, (n + \frac{1}{2})\Delta t)$ 作为 $n + \frac{1}{2}$ 层上 $j + \frac{1}{2}$ 点的值, 即整个区间 $(j, j + 1)$ 的值, 这样在 $n + \frac{1}{2}$ 层上又构成一系列黎曼问题. 在点 $(j, n + \frac{1}{2})$ 上作间断分解, 令 $f_j^{n+1} = f((j + \xi_{n+\frac{1}{2}})\Delta x, (n + 1)\Delta t)$, 就得到第 $n + 1$ 层上整数格点的值^[2,3]. 发生间断分解的点, 在图 2 中用黑点表示.

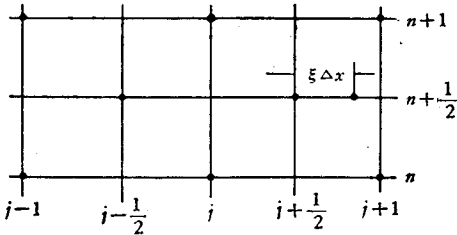


图 2

可见, 用 RCM 解方程组 (1) 与 (2) 时, 每层都要作大量的黎曼问题的间断分解, 记 P^*, u^* 为间断分解后产生的接触间断上的压力和质点速度, 在求 P^* 时需解一个非线性代数方程并进行迭代. 然后从 P^* 极易算出 u^* . 显然, 求 P^* 时迭代的快慢直接影响 RCM 的效率. 与 [5] 不同, 我们用了 [11] 新建议的迭代方案, 现叙述如下: 将间断分解左边的值记为 p_1, ρ_1, u_1 ; 右边的值记为 p_2, ρ_2, u_2 , 则有如下关系式:

$$u_1 - u_2 = f(P^*, p_1, \rho_1) + f(P^*, p_2, \rho_2) \equiv F(P^*),$$

$$f(P^*, p_l, \rho_l) = \begin{cases} \frac{P^* - p_l}{\rho_l c_l} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \Pi_l + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}} & \text{当 } P^* \geq p_l \text{ 时} \\ \frac{2}{\gamma - 1} c_l (\Pi_l^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1) & \text{当 } P^* < p_l \text{ 时} \end{cases}$$

其中 $\Pi_l = \frac{P^* + p_0}{p_l + p_0}, c_l = \sqrt{\frac{\gamma p_l + p_0}{\rho_l}}, l = 1, 2$. 对函数 f 的性质进行考察可以证实

$\frac{df}{dP^*} > 0, \frac{d^2f}{d^2P^*} < 0$, 即函数 $F(P^*)$ 是 P^* 的单调凸函数. 用牛顿迭代法求 P^* , 收敛速度很快, 而且可以用 $u_1 - u_2$ 的值来判断黎曼问题间断分解出现的波是属于五种情形 (见 [11]) 中的哪一种. 有些情形可避免迭代, 算得更快, 具体地说:

1) 当

$$u_1 - u_2 > U_{yg}$$

$$\equiv \begin{cases} \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{\rho_1 \left[\frac{\gamma+1}{2} (p_2 + p_0) + \frac{\gamma-1}{2} (p_1 + p_0) \right]}}, & \text{当 } p_2 > p_1 \text{ 时;} \\ \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\rho_2 \left[\frac{\gamma+1}{2} (p_1 + p_0) + \frac{\gamma-1}{2} (p_2 + p_0) \right]}}, & \text{当 } p_1 > p_2 \text{ 时,} \end{cases}$$

这时两个波都是激波,需用牛顿迭代法求 P^* .

2) 当

$$U_{paz} < u_1 - u_2 < U_{yg}$$

时,则或是 i) $p_1 < P^* < p_2$, 左边是激波,右边是稀疏波;或是 ii) $p_1 > P^* > p_2$, 右边是激波,左边是稀疏波. 这也要用牛顿迭代法求 P^* . 这里有

$$U_{paz} \equiv \begin{cases} F(p_1), & \text{当 } p_1 < p_2 \text{ 时,} \\ F(p_2), & \text{当 } p_1 > p_2 \text{ 时.} \end{cases}$$

3) 当

$$U_{Bak} < u_1 - u_2 < U_{paz}$$

时,两边都是稀疏波,这里 $U_{Bak} = F(-p_0)$. 这种情形不用迭代,可用分析解直接求 P^* :

$$P^* = p_0 + (\bar{p} + p_0) \left(\frac{u_1 - u_2 - U_{Bak}}{U_{paz} - U_{Bak}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}},$$

其中 $\bar{P} = \min(p_1, p_2)$.

4) 当 $u_1 - u_2 < U_{Bak}$ 时,出现真空,这是罕见的情形.

为使求 P^* 的计算顺利进行,作牛顿迭代所用的初值均选 p_1, p_2 中较小者.

本文所用的随机数列 ξ_n 是这样产生的: 令 θ_n 是用混合同余法产生的在 $(0, 1)$ 区间上均匀分布的随机数列,取

$$M_{n+1} = (3 + M_n) \bmod m_1,$$

$$\xi_n = \frac{\theta_n + M_n - 1}{m_1 - 2}.$$

若选 $m_1=7, M_0=0$, 就把 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 分成 7 格,则随机数 ξ_n 依次落在第 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 4, ... 格里,其特点是交替地取正值和负值. 试算结果表明,随机数的取法对数值结果影响甚大^[2, 3, 5],但对于将上述随机数选取法用于气体力学方程组的效果,到目前为止,还没有完整严格的数值分析.

§4. 数值结果

我们用不同的空间步长 $\Delta x/R_0$ 和初始时刻 t_3 进行了数值计算,并将 RCM 的结果与 [8] 中给出的精度较高的分析解作了比较,此外也和用戈杜诺夫格式算出的结果作了比较. 我们选的空间步长大小相差达 128 倍,目的在于考察空间步长对计算质量的影响.

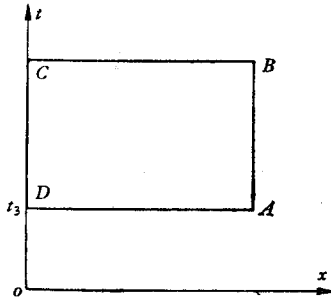


图 3

RCM 的结果与 [8] 的分析解结果比较, 有下列五个方面:

- (1) $x = 0$ 处压力随时间变化值, 见图 5, 7.
- (2) $x = 0$ 处密度随时间变化值, 见图 7.
- (3) 反射激波位置随时间的变化 $R_3(t)$, 见图 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.
- (4) 某些特定时刻反射波与固壁间的压力、密度、速度分布, 见图 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.
- (5) 入射波的量与 Седов [10] 的自模拟解比较.

我们改变了 Chorin 在 [3] 中提出的处理边界条件的办法, 在边界上不用随机数而是单纯用镜面反射条件:

$$P_{-\frac{1}{2}\Delta x} = P_{\frac{1}{2}\Delta x}, \quad \rho_{-\frac{1}{2}\Delta x} = \rho_{\frac{1}{2}\Delta x}, \quad u_{-\frac{1}{2}\Delta x} = -u_{\frac{1}{2}\Delta x},$$

这样就保证了 $u|_{x=0} = 0$ 即固壁条件的满足.

在计算中我们还用了整体的质量、动量、能量检查, 即在 $x-t$ 平面上, 对任一时刻 t , 对计算区域作迴路积分, 迴路为图 3 中的 $ABCD$, AD 是初始时刻 t_3 . 我们算的是相对误差 $(\int_{DA} - \int_{ABCD}) / \int_{DA}$. 计算结果表明, 对上述相对误差来说, 戈杜诺夫格式的相对误差值既小且变化更小, 而 RCM 的相对误差值有时小有时大. 限于篇幅下面只给出在空间步长 $\frac{\Delta x}{R_0} = \frac{1}{4000}$ 的情形下, 少数几个时刻的质量、动量、能量检查的相对误差. [14] 中多列了一些数据.

表 1. 随机选取法质量、动量、能量检查
($\Delta x/R_0 = 1/4000$)

时刻 $\frac{t}{K} \times 10^5$	质量检查 相对误差	动量检查 相对误差	能量检查 相对误差
0.0006391	-0.0077	0.010	-0.015
0.001278	0.0016	0.007	-0.004
0.02761	-0.023	0.018	-0.037
0.1126	0.15	-0.059	0.18

表 2. 戈杜诺夫格式质量、动量、能量检查
($\Delta x/R_0 = 1/4000$)

时刻 $\frac{t}{K} \times 10^5$	质量检查 相对误差	动量检查 相对误差	能量检查 相对误差
0.0006393	-0.017	0.0098	-0.023
0.01378	-0.016	0.0098	-0.023
0.02665	-0.014	0.0096	-0.023
0.1156	0.015	0.0082	-0.022

各种步长的上述五种比较, 见后面图 4—15.

§5. 结 论

经过几种方案的试算, 对 RCM 的特点, 我们有以下几点看法:

(1) 关于解的摆动. 从后面的图可以看到一个共同的特点, 即如果用虚线或细直线将所得数据点连接起来, 就得一串折线. 空间步长小的时候 (见图 4, 7, 8, 9, 15), 折线相当接近于光滑的准确解, 但也在准确解附近摆动, 时高时低; 空间步长大的时候, 则摇摆很厉害 (见图 6, 10—13). 而戈杜诺夫格式的结果与比较准确的分析解的偏离是单调的, 愈偏

愈大(详见[9]中诸图).数值结果的摆动使人们感到不习惯,乍一看似乎很不合常情.看来

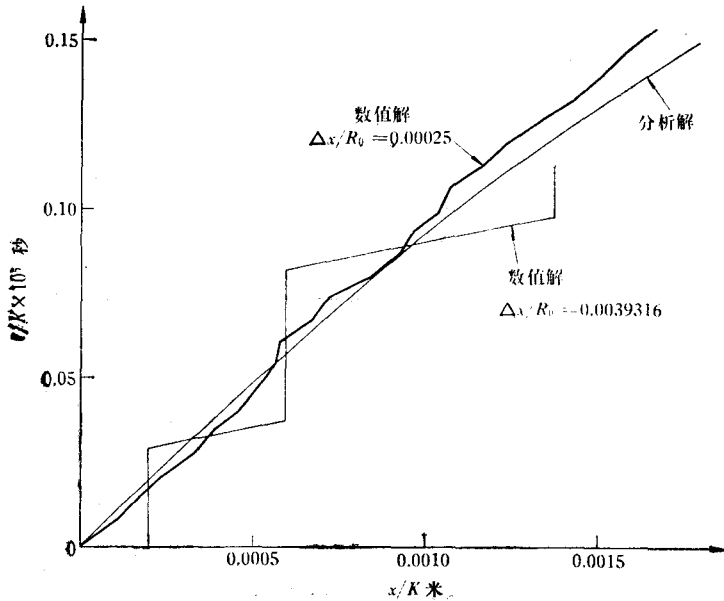


图 4 反射波位置

也有改进的可能,但是,值得注意的是,由于偏离不是单调的,而是在准确解左右来回摆动,因此有时就摆到与准确解较吻合的情形.我们试算的几个方案说明,在能量、质量、动量三种检查的相对误差全都比较小时,结果与准确值较接近.如果只保留三种检查误差都较小的数据,而舍去误差大的数据,那么就值得研究是否有希望采用较大的空间步长以节约机器容量及计算时间.

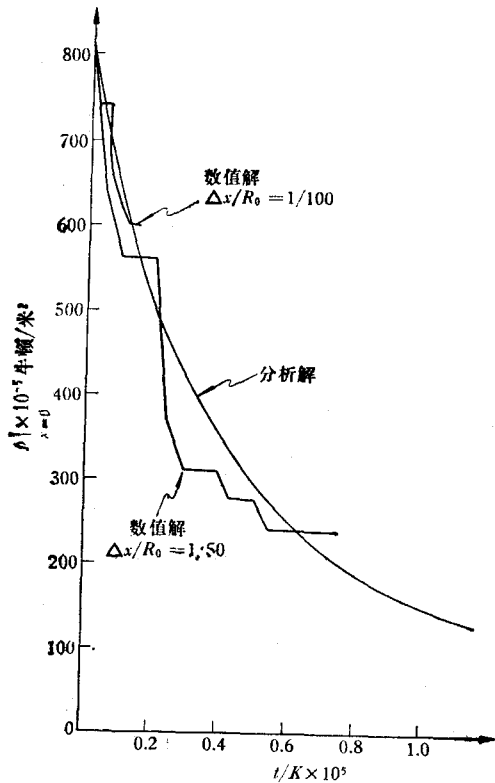


图 5 墙上压力随时间的衰减

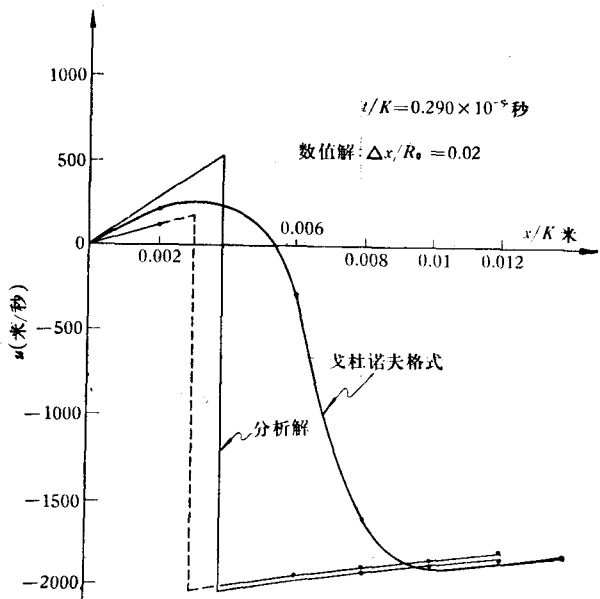


图 6 不同方法所得速度分布的比较

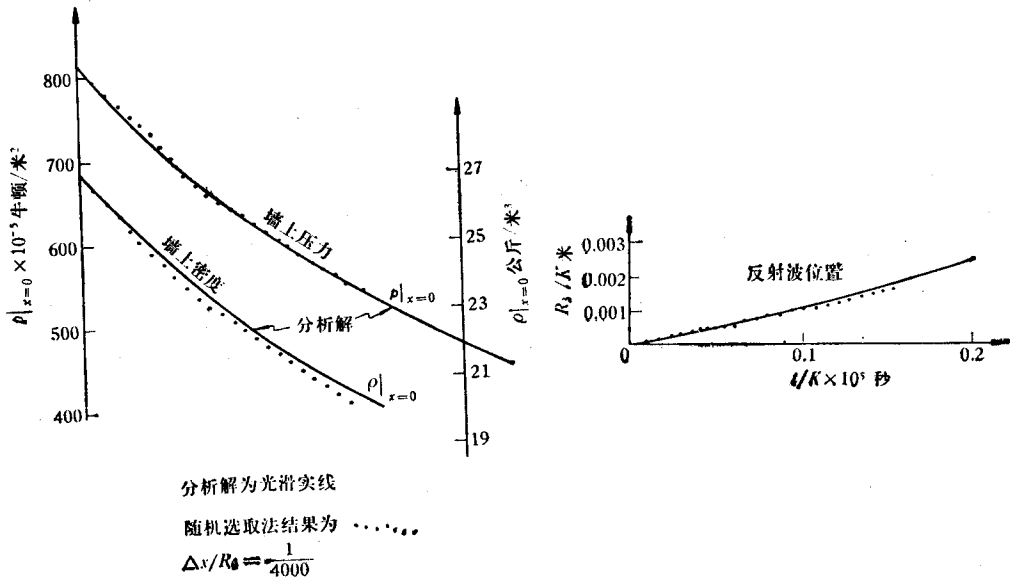


图 7

(2) 与一般差分法相比,RCM 的优点在于当空间步长足够小时,强间断只占一个空间网格,也就是说,没有抹光作用,没有一般差分法中由一个过渡区代表强间断的情形,如图所示,反射

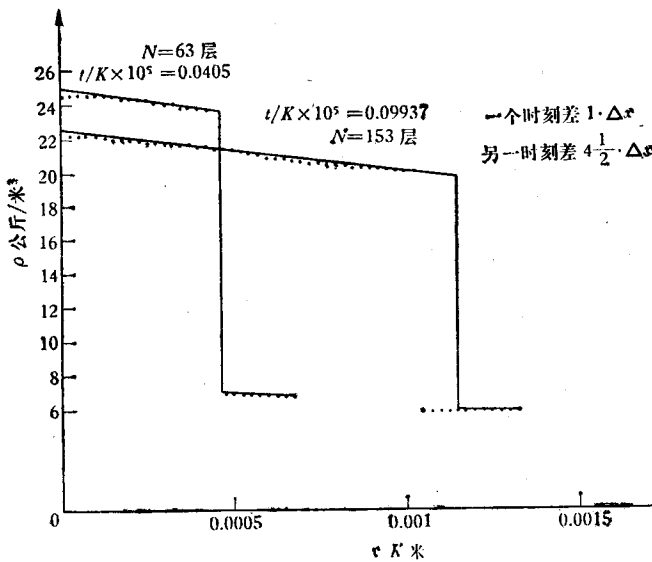


图 8 两个不同时刻密度随空间的变化

随机选取法用小步长 $\frac{\Delta x}{R_0} = \frac{1}{4000}$, 结果用黑点表示; 分析解用实线表示;

两者相差主要在激波位置

空间步长太大时,强间断严格说来并不是只占一格. 这一点用自模拟解来试验是看不到的

(3) 在初始时刻选作 $\frac{1}{K} t_3 = 0.36726767 \times 10^{-7}$ 秒, 空间步长用 $\frac{\Delta x}{R_0} = 0.00015625$ 的

情形,给初始密度分布 $1/100$ 左右的相对误差. 图 15 表明,对于这么小的初始误差,在小空间步长的情况下,RCM 的结果倒比戈杜诺夫格式的结果略为好一些.

激波位置, 也就是说,没有抹光作用,没有一般差分法中由一个过渡区代表强间断的情形,如图所示,反射激波位置 R_3 有摆动,时高时低,有时与准确值较吻合,有时差几个网格. 图 8, 9 中, $t \times 10^5 = 0.405K$ 秒时, 激波位置很准,而 $t \times 10^5 = 0.09937K$ 秒时, 激波位置就差 $4\frac{1}{2}$ 格. 当步长足够小时,在解的光滑区域,数值解与 [8] 分析解结果很接近,请注意从图 12, 13 可以看出,当空间步长大的时候,强间断邻近的数值解可能很不准,就是说空

(4) 在大空间步长的情形, 如 $\frac{\Delta x}{R_0} = \frac{1}{50}$ 时, 我们将 RCM 的结果与戈杜诺夫格式及[8]

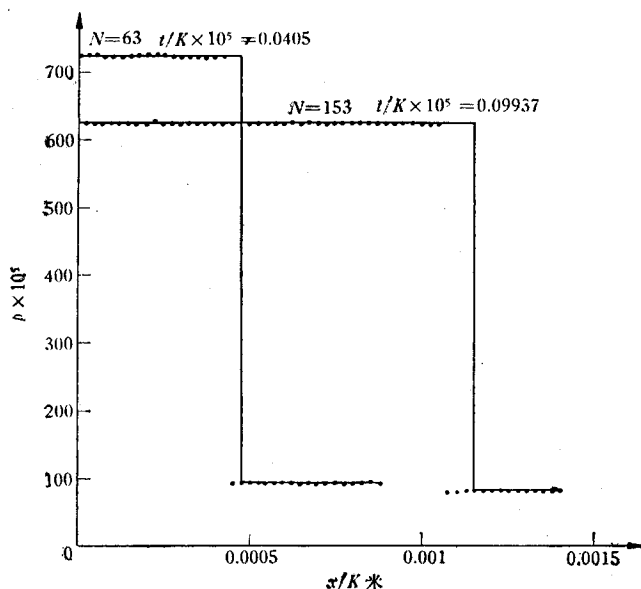


图9 两个不同时刻的压力分布(步长同图8)
分析解为实线; 数值解用小黑点表示; 两者差别主要在于激波的位置

分析解的结果作比较(图6)。这组 RCM 的数据中, 能量、质量、动量检查的相对误差分别是 8.5%、3.8%、6%。这并不算太大。从图6可以看出, 两种算法对入射波的计算结果都较好, 但对反射波的结果误差甚大。数值解的反射波峰值只有准确结果的一半甚至更小。至于反射激波的位置, 则 RCM 的结果优于戈杜诺夫格式的结果。

(5) 正如引言所指出的, 我们采用的新的波形判别和求 P^* 的迭代法是成功的, 在各种步长下迭

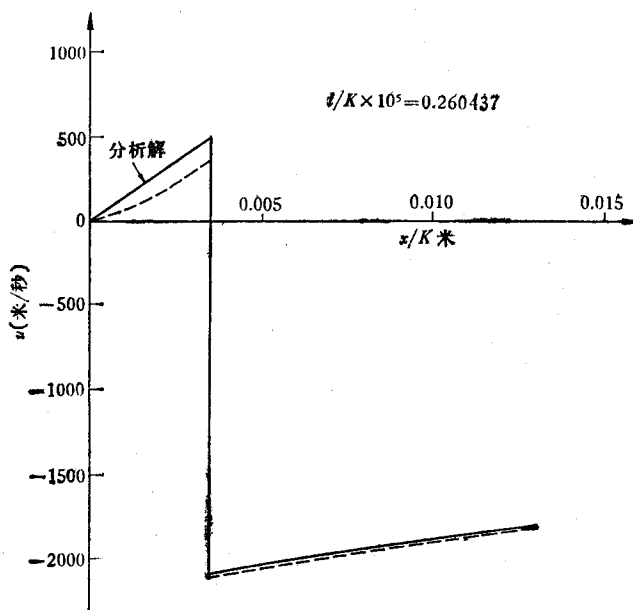


图10 速度分布的比较,
随机选取法用步长 $\frac{\Delta x}{R_0} = 0.01$, 结果用虚线表示。
在本图对应的时刻, 数值解与分析解的反射激波位置正好重合(一般不重合)

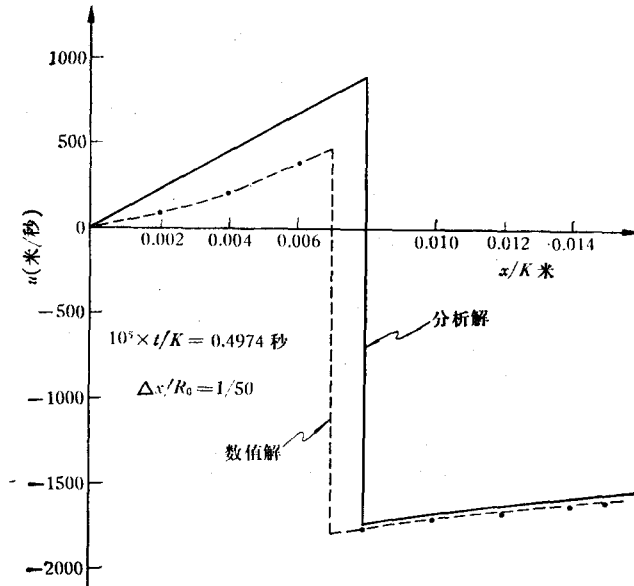


图 11 速度分布

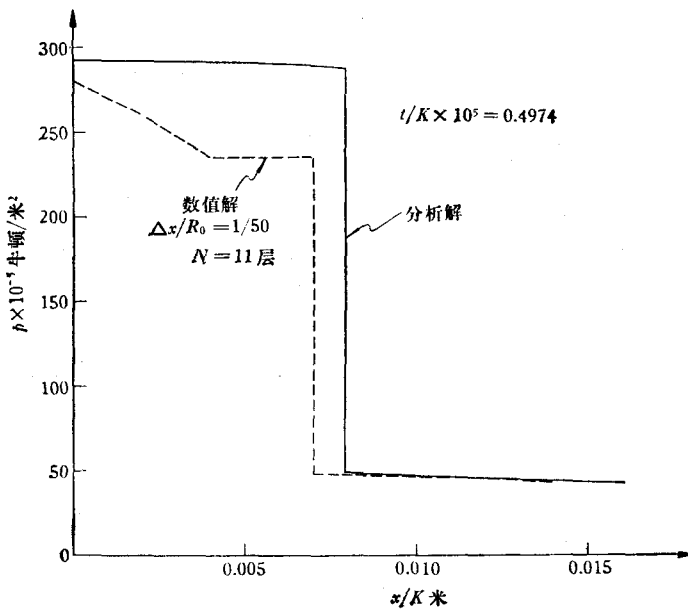


图 12 压力分布. 数值解与高精度分析解的比较

代只二、三次,在激波附近最多四、五次即可,这样就节省了计算时间([5]中需要 5—20 次).

(6) 用 RCM 进行计算,会遇到这样一种现象:开始计算结果很正常,后来就有较大的跳动.不论大步长或小步长,都遇到过这类情形.原因比较复杂,有待进一步弄清.本文基本写完后看到 Colella 的博士论文(1979年7月)[15],其中也谈到类似现象.

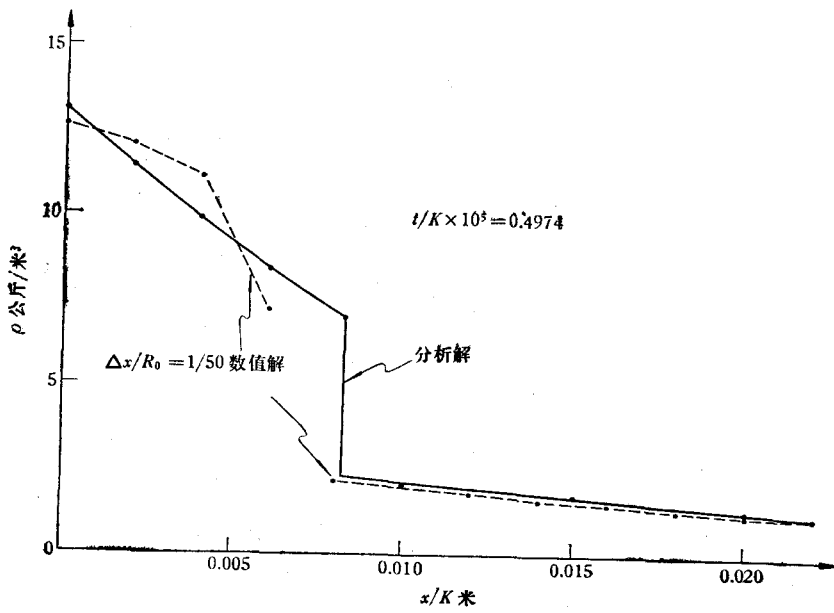


图 13 密度分布

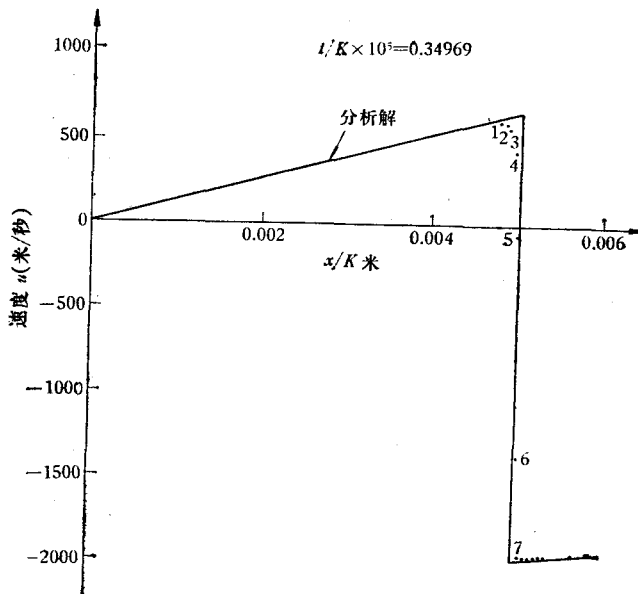


图 14 某一时刻速度分布

这个图中数值解用了戈杜诺夫方法,数值解用小步长 $\frac{\Delta x}{R_0} = 0.000502$ 。数值解在图中只有标着 1 到 7 的几个点与高精度分析解看得出差别。有意思的是分析解的激波(无厚度)正好落在数值解的第 5、6 两点之间。

(7) 关于 §5 所说的第(5)个比较, 不论空间步长大小, RCM 的数值结果都较好. 这也说明有自模拟性的区域比较容易算.

总之, 随机选取法是个处于萌芽状态的方法, 有希望在多个强间断相互作用的情形下提供有益的结果, 但是, 值得改进和研究的问题还很多, 我们的工作是很初步的.

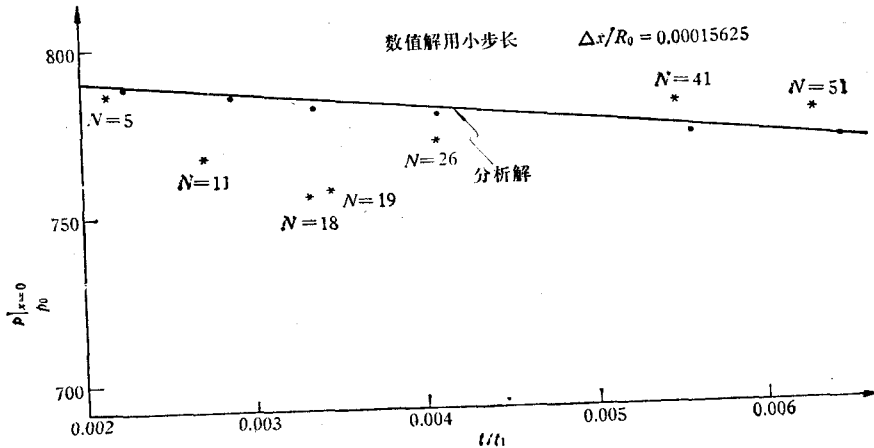


图 15 初值中密度分布的小误差对数值解的影响.

说明:

- 1) 这是一张放大的图, 原点离图上的曲线和点已经很远了, 实际上数值解的相对误差并不大.
- 2) 算到 $N = 200$ 左右的结果已画不下, 数值解的相对误差逐渐缩小.
- 3) 该图自变量与以前各图不同.

... 随机选取法的结果 ... 戈杜诺夫方法的结果 N 时间层数 p_0 大气压 = 1.012928×10^5 牛顿/米²
 $t_1 = 2.1718193 \times 10^{-5}$ K 秒 K 可以任意调整的无量纲常数.

参 考 文 献

- [1] Beresford Parlett, Progress in Numerical Analysis, *SIAM Review*, 20: 3 (1978).
- [2] A. J. Chorin, Random choice solution of hyperbolic systems, *J. Comp. Phys.*, 22, 1976, 517—533.
- [3] A. J. Chorin, Random Choice method with applications to reacting gas flow, *J. Comp. Phys.*, 25, 1977, 253—272.
- [4] J. Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, 1965, 697.
- [5] G. A. Sod, Survey of finite difference methods, *J. Comp. Phys.*, 27: 1(1978), 1—31.
- [6] G. A. Sod, *J. Fluid Mech.*, 83, (1977), 785.
- [7] G. A. Sod, A hybrid random choice method with application to internal combustion engines Lecture Notes in Physics, 90, 1979 (即第六届国际流体力学数值计算方法专题报告会文集).
- [8] 黄敦, 气体力学方程组的一套高精度的分析解(平面强爆炸波的正反射), 计算数学会论文, 1979.
- [9] 黄敦、黄禄平、柳玉芝, 用戈杜诺夫格式计算不定常激波兼论影响数值解质量的某些因素, 计算数学会论文, 1979.
- [10] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, 4 тое изд, 1957.
- [11] С. К. Годунов, Численные методы многомерных задач газовой динамики, Москва, 1976.
- [12] С. К. Годунов, *Мат. сбор.*, т. 47, 1959.
- [13] С. К. Годунов, *ЖВММФ* т. 1, 1961.
- [14] 黄敦、黄禄平、柳玉芝, 关于随机选取法及其对不定常激波的计算, 计算数学会论文, 1979.
- [15] P. Colella, An Analysis of the Effect of Operator Splitting and the Sampling Procedure on the Accuracy of Glimm's Method, Dr. thesis July 1979, Univ. Calif. Berkely.