西北大学学报(自然科学版)
2004年2月,第34卷第1期,Feb.,2004,Vol.34,No.1
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)
JNWU

·数学与计算机科学·

# 一类线性规划的调节熵函数法

邢志栋[1],王若鹏[2],董建民[1]

(1. 西北大学 数学系,陕西 西安 710069;2. 北京石油化工学院 数理部,北京 102617)

**摘要:目的** 为得到一类线性规划的简单有效的数值算法。**方法** 通过利用熵函数的思想,给出了求解该类线性规划的调节熵函数法,由于算法是基于等价的极大极小问题,从而具有初始点任意性的优点。**结果** 给出了该算法分析并讨论了它的收敛性,最后给出的数值例子显示了其有效性。**结论** 与传统方法比较,所得算法更为简洁,具有可充分利用现有无约束优化算法,以及可较快地收敛到问题的最优解等特点。

**关 键 词:**Karmarkar标准型;熵函数法;极大极小问题

**中图分类号:**O232 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-274X(2004)01-0001-03

考虑如下的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\min c^{\mathrm{T}}x\\
(\mathrm{P})\qquad &\text{s.t.}\quad Ax = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\\
&x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n。
\end{aligned}
$$

这里:$c \in \mathbf{R}^n, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,其中 $a_i \in \mathbf{R}^m, i = 1,2,\cdots,n$。这是一类常见的线性规划问题,线性规划的Karmarkar标准型就是这种形式。

关于求解线性规划的算法已有许多种方法,如单纯形法及各种内点算法[1-3]。20世纪80年代发展起来的Karmarkar算法及其改进形式,是求解线性规划问题的重大突破,其最新进展见文献[4]。本文给出求解Karmarkar标准型的熵函数法。这种方法具有简洁的特点,而且充分利用现有无约束优化的算法。另外,这种方法初始点任意,且较快地收敛到问题的最优解。

## 1 算法推导及熵函数的性质

根据对偶理论,问题(P)的对偶规划是

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{DP})\qquad &\max w_{m+1},\\
&\text{s.t.}\quad w^{\mathrm{T}}B \leqslant c^{\mathrm{T}}。
\end{aligned}
$$

其中:$w = (w_1, w_2, \cdots, w_{m+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{m+1}, B = (A^{\mathrm{T}}, e_n)^{\mathrm{T}}, e_n = (0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$,问题(DP)等价于

$$
\begin{aligned}
&\min -w_{m+1}。\\
(\mathrm{DP}')\qquad &\text{s.t.}\quad a_i^{\mathrm{T}}y - c_i \leqslant -w_{m+1}。
\end{aligned}
$$

令 $f_i(y) = a_i^{\mathrm{T}}y - c_i, y \in \mathbf{R}^m, a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})^{\mathrm{T}}, i = 1,2,\cdots,n$。问题(DP′)等价于下述极大极小问题(MNP)

$$(\mathrm{MNP})\qquad \min_{y\in\mathbf{R}^m}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{f_i(y)\}。$$

令 $F_p(y,\mu) = \dfrac{1}{p}\ln\{\sum_{i=1}^{n}\mu_i\exp(pf_i(y))\}$,其中 $\mu \in \triangle = \{\mu \in \mathbf{R}^n, \mu_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n\}$,$p > 0$ 是一个控制参数,函数 $F_p(y,\mu)$ 称为调节熵函数。

记 $\varphi(y) = \max\{f_i(y)\}, I(y) = \{i \mid \varphi(y) = \max\{f_i(y)\}, i = 1,2,\cdots,n\}$,关于调节熵函数有下述性质。

**引理1**[5] 对 $\forall p > 0, n \geqslant 1$,有下式成立

$$\frac{\ln(\mu_{\min})}{p} \leqslant F_p(y,\mu) - \varphi(y) \leqslant 0。$$

即给定 $\varepsilon > 0$,存在 $P > 0$,使得 $p > P$ 时,对任意的 $y \in \mathbf{R}^m$,有

$$\mid F_p(y,\mu) - \varphi(y) \mid < \varepsilon。$$

**收稿日期:**2002-06-25

**基金项目:**陕西省教育厅专项基金资助项目(01JK057)

**作者简介:**邢志栋(1952-),男,陕西西安人,西北大学教授,从事最优化理论研究。

且 $p>0$ 时,$F_p(y,\mu)$ 关于 $p$ 是单调递减的。

**引理 2**[5] 对于 $y\in\mathbf{R}^m$ 及 $p>0$,$F_p(y,\mu)=\varphi(y)$ 的充要条件是 $\mu\in\Delta_{I(y)}$。

**定理 1** 令 $u_p^i=\dfrac{\exp(pf_i(y))}{\sum\limits_{i=1}^{m}\exp(pf_i(y))}$,

$i=1,2,\cdots,n$,

则有下述不等式成立,

$$0<u_p^i=\frac{\exp(p(f_i(y)-\varphi(y)))}{\sum\limits_{i=1}^{m}\exp(p(f_i(y)-\varphi(y)))}\leqslant \exp(p(f_i(y)-\varphi(y)))。$$

**证　明** 不等式的左端成立是显然的。下面证明不等式右端。由 $\varphi(y)=\max\{f_i(y)\}$,则必存在 $i_0$,使得 $\varphi(y)=f_{i_0}(y)$ 成立,所以必有 $\exp(p(f_{i_0}(y)-\varphi(y)))=1$。而 $\exp(p(f_i(y)-\varphi(y)))>0$,当 $1\leqslant i\leqslant n$ 且 $i\neq i_0$ 时,$\exp\sum\limits_{i=1}^{m}\exp(p(f_i(y)-\varphi(y)))>1$,因此不等式成立。

引理 1 表明调节熵函数 $F_p(y,\mu)$ 是 $\varphi(y)$ 的整体逼近,即当 $p\to\infty$ 时,$F_p(y,\mu)$ 一致收敛于 $\varphi(y)$。所以,我们不仅可以调节 $p$,而且可通过调节 $\mu$ 使 $F_p(y,\mu)$ 快速逼近 $\varphi(y)$。

## 2　算法及收敛性

算法(algorithm)

**step 1** 给充分大的 $P>0,p^0>0,\Delta p>0,\varepsilon>0,\mu_i^{(0)}=\dfrac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$,初始点 $y^{(0)},k=0$;

**step 2** 以 $y^{(k)}$ 为初始点调用 BFGS 法求解无约束规划问题 $\min F_p(y,\mu)$,得最优解 $y^{(k+1)}$,若 $\|y^{(k+1)}-y^{(k)}\|<\varepsilon$,停止,否则转 step 3;

**step 3** 计算

$$\mu_i^{(k+1)}=\frac{\mu_i^{(k)}\exp(p^kf_i(y^{(k+1)}))}{\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i^{(k)}\exp(p^kf_i(y^{(k+1)}))},i=1,2,\cdots,n,$$

若 $p^k<P$,则令 $p^{k+1}=p^k+\Delta p$,否则 $p^{k+1}=p^k,k=k+1$,转 step 2。

**定理 2** 当 $F_p(y,\mu)$ 是凸函数时,由算法产生的点列 $\{y^{(k)}\}$ 的任意聚点都是无约束极大极小问题(MNP) 的最优解。

**证　明** 由熵函数的收敛性可得定理成立[6]。

**定理 3** 令 $x_i=\dfrac{\mu_i\exp(pf_i(y))}{\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i\exp(pf_i(y))},i=1,2,\cdots,n$,其中 $y$ 是 $\min F_p(y,\mu)$ 的最优解,则当 $p\to\infty$ 时,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$ 是问题(P) 的最优解。

**证　明** 对每一 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,$x_i\geqslant0$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$。另一方面,$y$ 是 $\min F_p(y,\mu)$ 的最优解,由 K-T 条件,$\nabla F_p(y,\mu)=0$,展开即得 $\nabla f_i(y)x=0$,也就是 $Ax=0$。所以 $x$ 是问题(P) 的可行解,由对偶理论,$y$ 是 $\min F_p(y,\mu)$ 的最优解,$x$ 是问题(P) 的最优解。

## 3　数值例子

本文给出两个数值例子,计算程序只需调用一个标准无约束 BFGS 算法子程序和用户提供的计算函数值的程序。计算中 $p^0=0.2,\Delta p=2$,精度要求 $\varepsilon=10^{-3}$。

**例 1** $\min\ 2x_1+2x_2+2x_3+5x_4+x_5-4x_6$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &3x_1-7x_2+3x_3+6x_4-4x_5-9x_6=0\\&-9x_1+3x_2-x_3+9x_4-5x_5-6x_6=0\\&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1\end{aligned}$$

取 $y^{(0)}=(1,2)^{\mathrm T}$,最优解为 $x^*=(0,0,15/35,9/35,0,11/35)^{\mathrm T}$,而求得近似解为

$x=(0.000\,000,0.000\,000,0.428\,901\,1,0.257\,302\,1,0.000\,000,0.314\,204\,3)^{\mathrm T}$。

**例 2** $\min\ 2x_1-3x_2+x_4-4x_5$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &3x_1+x_2-2x_3-x_4-x_5=0\\&-x_1+2x_2-3x_3+2x_5=0\\&-x_1-x_2+x_3+2x_4-3x_5=0\\&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\end{aligned}$$

取 $y^{(0)}=(-1,2,1)^{\mathrm T}$,最优解为 $x^*=(1/15,8/15,1/3,1/15,0)^{\mathrm T}$,而求得近似解为

$x=(0.066\,667,0.534\,083,0.332\,428,0.066\,197,0.000\,000)^{\mathrm T}$。

两者的相差甚微。

## 参考文献:

[1] 李兴斯.解非线性规划的凝聚函数法[J].中国科学(A辑),1992,(12):1 283-1 288.
[2] 唐焕文,张立卫,王雪华.一类约束不可微优化的极大熵方法[J].计算数学,1993,15(3):268-278.
[3] 张建中,许绍吉.线性规划[M].北京:科学出版社,1999.
[4] 马仲蕃.线性规划最新进展[M].北京:科学出版社,1994.
[5] 唐焕文,张立卫.求解线性规划的极大熵函数[J].计算数学,1995,5(2):160-172.
[6] 杨庆之.调节熵函数[J].计算数学,2001,23(1):81-86.

(编　辑　亢小玉)

# An entropy function method for a class of linear programs

XING Zhi-dong[1], WANG Ruo-peng[2], DONG Jian-min[1]

(1. Department of Mathematic, Northwest University, Xi'an 710069, China; 2. Department of Mathematics and Physics, Beijing Institute of Petro-Chemical Technology, Beijing 102617, China)

**Abstract: Aim** In order to get a numerical algorithm which is simple and efficient for a class of linear programs problem. **Methods** An entropy function method for the linear programs problem is proposed through the idea of Entropy function, which is based on minimax problem with the arbitary point. **Results** The algorithm's analyses and convergence are given. **Conclusion** Compared with traditional method, this algorithm is simpler, which can make full use of the current, unrestrained optimized algorithm and has the advantadge of making quick convergence of the problem. Finally, the numerical results showed the efficient of our approach.

**Key words**: Karmarkar; standard form; entropy function; minimax problem

·学术动态·

## 中国高校自然科学学报研究会第 9 次学术年会在成都举行

中国高校自然科学学报研究会第 9 次学术年会暨四届四次理事会议、四届八次常务理事会议于 2003 年 10 月 14 日至 21 日在成都召开。来自全国 29 个省、市、自治区的 420 多名代表参加了会议。

大会开幕式由副理事长徐安玉主持,副理事长王亨君致开幕词。在开幕式上邓久华代表教育部科技司讲了话,对高校学报所取得的成绩给予高度评价,同时也充分肯定了研究会的工作。高等教育出版社研究生教育与学术著作分社社长陈小平向与会代表介绍了"中国高校学术期刊文摘系列刊"的筹办情况。

《清华大学学报》主编、副理事长杜文涛作了《深化学报改革,开拓学报发展新思路》的专题发言。他认为目前高校学报内部具有改革的需要和可能,外部有较大的改革压力,并分析了高校学报的历史作用、地位和优势,探讨了资源整合,培植精品名牌期刊的可行性。《北京林业大学学报》副主编、副理事长兼秘书长颜帅作了《积极总结经验,顺应时代发展,加快高校自然科学学报的改革步伐》的专题发言。颜帅从人才培养、学科建设、学术交流等方面论述了高校自然科学学报的作用,介绍了高校学报在编辑出版规范化、学术影响力和编辑队伍建设等方面取得的成绩。同时,他也指出了当前高校学报存在的问题,提出了今后的发展思路。

本刊主编、副理事长姚远以《高校学报的三大功能及其拓展》为题作了精彩的演讲,认为高校学报应当由多科性向突出特色、以点带面的方向发展;由发表园地向科技创新阵地方向发展;由重社会效益向在重社会效益的同时重经营的方向发展。《同济大学学报》主编赵惠祥以《高校自然科学学报问题的层次及其改革》为题进行了演讲。他将学报目前所面临的问题分为:学报自身的问题、社会化期刊的问题和市场化过程中的问题,并针对每一类问题提出了改革的思路,建议引入市场机制,建立二级法人,开展学报的经营。

本次学术年会关注的都是当前学报工作的热点问题,前期准备充分,会前确定了演讲主题和演讲人,年会既重视内容也重视形式,学术讨论既严肃又活跃,吸引了广大会员积极参与。

(薛　鲍)