2003年4月 第33卷第2期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Apr. 2003 Vol. 33 No. 2

一个类似于 Dedekind 和的四次均值公式

陈晓峰[1],王育民[1],张文鹏[2]

(1. 西安电子科技大学 ISN 国家重点实验室,陕西 西安 710071;2. 西北大学 数学系,陕西 西安 710069)

摘要:利用 Dedekind 和的性质,Dirichlet L-函数的性质以及解析方法研究一个类似于 Dedekind 和的四次均值,给出了一个较精确的渐进公式。

关 键 词:Dedekind 和;均值公式;Dirichlet L-函数

中图分类号:O156.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2003)02-0129-04

对给定的正整数 k,且 $(h,k)=1$,定义 Dedekind 和如下

$$s(h,k)=\sum_{a=1}^{k}\left(\left(\frac{a}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{ah}{k}\right)\right),$$

$$\text{其中}((x))=\begin{cases}x-[x]-\frac{1}{2}, & x\text{ 不是整数},\\ 0, & x\text{ 是整数}。\end{cases}$$

关于 Dedekind 和的性质,许多学者作了广泛的研究,或许 Dedekind 和最重要的性质是其互反公式

$$s(h,k)+s(k,h)=\frac{h^2+k^2+1}{12hk}-\frac{1}{4},$$

其中 $(h,k)=1,h>0,k>0$。利用文献[1]的符号,笔者引入两个类似于Dedekind 和 $s_1(c,d)$ 与 $s_2(c,d)$ 如下

$$s_1(c,d)=\sum_{j \bmod d}(-1)^{\left[\frac{cj}{d}\right]}\left(\left(\frac{j}{d}\right)\right),$$

这里 c 是偶数,$d>0$ 为奇数。

$$s_2(c,d)=\sum_{j \bmod c}(-1)^{j}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right),$$

这里 c 是偶数。

$s_1(c,d)$ 和 $s_2(c,d)$ 满足混合互反公式[1]

$$s_1(c,d)+s_2(d,c)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{cd}+\frac{d}{c}\right)。$$

这里 $c>0$ 是偶数,$d>0$ 为奇数,$(c,d)=1$。$s_2(d,c)$ 的性质与Dedekind 和的性质非常类似,是由 Gandhi 首先引入的,并且研究了它的一些算术性质[2]。文献[3]研究了 $s_1(c,d)$ 的二次均值估计问题,并给出了一个较精确的渐进公式

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,d)=1}}^{(d-1)/2}|s_1(2k,d)|^2=\frac{d\phi(d)}{8}\prod_{p^\alpha\|d}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\left[\left(1+\frac{1}{p}\right)^2-\frac{1}{p^{3\alpha+1}}\right]+O\left(d\exp\left(\frac{4\ln d}{\ln\ln d}\right)\right)。$$

其中:$d>2$ 为奇数;$\prod\limits_{p^\alpha\|d}$ 表示对 d 的所有满足 $p^\alpha|d$,$p^{\alpha+1}\nmid d$ 的素因子 p 求积;$\exp(y)=e^y$;$\phi(d)$ 是 Euler 函数。

本文将研究 $s_1(c,p)$ 的四次均值性质,而且给出了计算所有偶数次均值的方法。具体地说就是证明了下面的定理。

定理 1 设 p 为奇素数,χ_p 表示模 p 的任一偶特征,则有渐进公式

$$\sum_{a=1}^{(p-1)/2}\chi_p(a)|s_1(2a,p)|^4=\frac{15}{17}\left(\frac{12}{5}\right)^2\left(\frac{p}{12}\right)^4(16-\chi_p(2))\frac{|L(4,\chi_p)|^2}{\zeta(8)}+O\left(p^3\exp\left(\frac{6\ln p}{\ln\ln p}\right)\right)。$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann-Zeta 函数,$L(s,\chi)$ 是 Dirichlet L- 函数。

推论 1 设 p 为奇素数,则有渐进公式

$$\sum_{a=1}^{(P-1)/2}|s_1(2a,p)|^4=\frac{7}{1\,632}p^4+O\left(p^3\exp\left(\frac{6\ln p}{\ln\ln p}\right)\right)。$$

1 几个引理

引理 1 设 $c>0$ 是偶数,$d>0$ 为奇数,则有

$$s_1(c,d)=2s(c,d)-4s\left(\frac{c}{2},d\right)。$$

证 明 参阅文献[3]。

收稿日期:2001-06-29
基金项目:"973"国家重大资助项目(G19990358-04)
作者简介:陈晓峰(1976-),男,陕西宝鸡人,西安电子科技大学博士生,从事数论及密码学的研究。

引理 2　设奇数 $q\geqslant 3$, χ_1 表示模 q 的任一偶特征,定义 $r(n)=\sum\limits_{d/n}\chi_1(n)$,则有

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{\infty}\frac{r(a)\bar{r}(2a)}{a^2}=\frac{4}{5}(\bar{\chi}_1(2)+1)\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{|r(n)|^2}{n^2},$$

其中 $\sum\limits_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{\infty}$ 表示对所有与 q 互素的正整数求和。

证　明　由数学归纳法有

$$r(2^m l)=\sum_{t=0}^{m}\chi_1^t(2)r(l),$$

其中 $m\geqslant 0$, $l\geqslant 1$ 为奇数。于是,有

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{\infty}\frac{r(a)\bar{r}(2a)}{a^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1+\chi_1(2)+\cdots+\chi_1^m(2))}{4^m}\cdot\frac{(1+\bar{\chi}_1(2)+\cdots+\bar{\chi}_1^{m+1}(2))}{4^m},$$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{l=1\\(l,2q)=1}}^{\infty}\frac{|r(l)|^2}{l^2}={}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1+\chi_1(2)+\cdots+\chi_1^m(2))}{4^m}\cdot\frac{(1+\bar{\chi}_1(2)+\cdots+\bar{\chi}_1^{m+1}(2))}{4^m}\cdot\\&(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1+\chi_1(2)+\cdots+\chi_1^m(2))}{4^m})^{-1}\cdot\frac{(1+\bar{\chi}_1(2)+\cdots+\bar{\chi}_1^m(2))}{4^m})^{-1}\cdot\\&\sum_{\substack{l=1\\(l,2q)=1}}^{\infty}\frac{|r(l)|^2}{l^2}=\frac{4}{5}(\bar{\chi}_1(2)+1)\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{|r(n)|^2}{n^2}。\end{aligned}$$

引理 3　设奇数 $q\geqslant 3$, χ_1 表示模 q 的任一偶特征,定义 $r(n)=\sum\limits_{d/n}\chi_1(n)$,则有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(2)|L(1,\chi)|^2|L(1,\chi\chi_1)|^2={}&\frac{\phi(q)}{5}(\bar{\chi}_1(2)+1)\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{|r(n)|^2}{n^2}+\\&O(\frac{\phi(q)}{q}\exp(\frac{6\ln q}{\ln\ln q})),\end{aligned}$$

其中 $\sum\limits_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}$ 表示对模 q 的所有奇特征求和。

证　明　对参数 $N\geqslant d$,利用 Abel 恒等式,有

$$L(1,\chi)L(1,\chi\chi_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)r(n)}{n}=\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{\chi(n)r(n)}{n}+\int_N^{\infty}\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y,$$

这里 $A(y,\chi)=\sum\limits_{N\leqslant n\leqslant y}\chi(n)r(n)$。注意到分拆恒等式

$$\begin{aligned}A(y,\chi)={}&\sum_{n\leqslant y^{\frac12}}\chi(n)\sum_{m\leqslant y/n}\chi(m)\chi_1(m)+\\&\sum_{m\leqslant y^{\frac12}}\chi(m)\chi_1(m)\sum_{n\leqslant y/m}\chi(n)-\\&\sum_{m\leqslant N/n}\chi(m)\chi_1(m)\sum_{n\leqslant N^{\frac12}}\chi(n)-\\&\sum_{m\leqslant N^{\frac12}}\chi(m)\chi_1(m)\sum_{n\leqslant N/m}\chi(n)+\\&\sum_{n\leqslant N^{\frac12}}\chi(n)\sum_{n\leqslant N^{\frac12}}\chi(n)\chi_1(n)-\\&\sum_{n\leqslant y^{\frac12}}\chi(n)\chi_u^0(n)\sum_{n\leqslant y^{\frac12}}\chi(n)\chi_1(n)。\end{aligned}$$

利用柯西不等式及特征和的估计,有

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\neq\chi^0}|\sum_{N\leqslant n\leqslant N+q}\chi(n)|^2={}&\sum_{\chi\neq\chi^0}|\sum_{N\leqslant n\leqslant M\leqslant N+q}\chi(n)|^2=\\&\phi(q)\sum_{N\leqslant n\leqslant M\leqslant N+q}\chi^0(q)-\\&|\sum_{N\leqslant n\leqslant M\leqslant M+q}\chi^0(n)|^2\leqslant\frac{\phi^2(q)}{4},\end{aligned}$$

于是,有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|A(y,\chi)|^2\ll{}&\sqrt{y}\sum_{n\leqslant y^{\frac12}}\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|\sum_{m\leqslant y/n}\chi(m)\chi_1(m)|^2+\\&\sqrt{y}\sum_{m\leqslant y^{\frac12}}\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|\sum_{n\leqslant y/m}\chi(n)|^2+\\&\sqrt{N}\sum_{n\leqslant N^{\frac12}}\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|\sum_{m\leqslant N/n}\chi(m)\chi_1(m)|^2+\\&\sqrt{N}\sum_{m\leqslant N^{\frac12}}\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|\sum_{n\leqslant N/m}\chi(n)|^2+\\&\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|\sum_{n\leqslant N^{\frac12}}\chi(n)|^2|\sum_{n\leqslant N^{\frac12}}\chi(n)\chi_1(n)|^2+\\&\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|\sum_{n\leqslant n^{\frac12}}\chi(n)|^2|\sum_{n\leqslant N^{\frac12}}\chi(n)\chi_1(n)|^2+\\&\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|\sum_{n\leqslant y^{\frac12}}\chi(n)|^2|\sum_{n\leqslant y^{\frac12}}\chi(n)\chi_1(n)|^2\ll\\&y\phi^2(q)。\end{aligned}$$

于是,利用柯西不等式有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(2)|\int_N^{\infty}\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y|^2\leqslant{}&\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|\int_N^{\infty}\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y|^2=\\&\int_N^{\infty}\int_N^{\infty}\frac{1}{y^2z^2}(\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|A(y,\chi)||A(z,\chi)|)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ll\end{aligned}$$

$$(\int_N^\infty \frac{1}{y^2}(\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}} |A(y,\chi)|^2)^{1/2}dy)^2 \ll \frac{\psi^2(q)}{N}。$$

注意到当$(ab,q)=1$时，有

$$\sum \chi(a)\bar{\chi}(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi(q), & 如果\quad a \equiv b \bmod q, \\ -\frac{1}{2}\psi(q), & 如果\quad a \equiv -b \bmod q, \\ 0, & 其他。\end{cases}$$

于是，由上式及引理2有

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2)|\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{\chi(n)r(n)}{n}|^2 =$$

$$\frac{1}{2}\psi(q)\sum_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant N\\ (ab,q)=1\\ 2a\equiv b(\bmod q)}} \frac{r(a)\bar{r}(b)}{ab} - \frac{1}{2}\psi(q)\sum_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant N\\ (ab,q)=1\\ 2a\equiv -b(\bmod q)}} \frac{r(a)\bar{r}(b)}{ab} =$$

$$\frac{1}{2}\psi(q)\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant N\\ (a,q)=1}} \frac{r(a)\bar{r}(2a)}{2a^2} + O(\psi(q)\sum_{a=1}^{N}\sum_{l=1}^{[N/q]} \frac{\tau(a)\tau(lq+2a)}{a(lq+2a)}) +$$

$$O(\psi(q)\sum_{a=1}^{q-1} \frac{\tau(a)\tau(q-2a)}{a(q-2a)}) + O(\psi(q)\sum_{a=1}^{N}\sum_{l\geqslant 1+a/q}^{[N/q]} \frac{\tau(a)\tau(lq-2a)}{a(lq-2a)}) =$$

$$\frac{1}{2}\psi(q)\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant \infty\\ (n,q)=1}} \frac{r(a)\bar{r}(2a)}{2a^2} + O(\frac{\psi(q)}{q}\exp(\frac{a\ln N}{\ln\ln N})) =$$

$$\frac{\psi(q)}{5}(\bar{\chi}_1(2)+1)\sum_{\substack{n=1\\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{|r(n)|^2}{n^2} + O(\frac{\psi(q)}{q}\exp(\frac{2\ln N}{\ln\ln N}))。$$

这里$\tau(n)$是除数函数且

$$r(n) \leqslant \tau(n) \ll \exp(\frac{(1+\varepsilon)\ln 2\ln n}{\ln\ln n})。$$

注意到

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2)(\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{\chi(n)r(n)}{n})(\int_N^\infty \frac{\bar{A}(y,\chi)}{y^2}dy) \ll$$

$$\ln^2 N\int_N^\infty \frac{1}{y^2}(\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}} |A(y,\bar{\chi})|)dy \ll \psi^{1/2}(q)\frac{\ln^2 N}{\sqrt{N}},$$

取$N=q^3$，由以上所得就证明了引理3。

同理，还有

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}} |L(1,\chi)|^2|L,\chi\chi_1|^2 = \frac{\psi(q)}{2}\sum_{\substack{n=1\\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{|r(n)|^2}{n^2} + O(\frac{\psi(q)}{q}\exp(\frac{6\ln q}{\ln\ln q})) \cdot$$

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2)|L(2,\chi)|^2|L(2,\chi\chi_q)|^2 =$$

$$\frac{2\psi(q)}{17}(\bar{\chi}_q(2)+1)\frac{\zeta^2(4)|L(4,\chi_q)|^2}{\zeta(8)} + O(1)。$$

引理4　设整数$k\geqslant 3$，则有

$$s(h,k) = \frac{1}{\pi^2 k}\sum_{d/k}\frac{d^2}{\psi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}} \chi(h)|L(1,\chi)|^2。$$

证明参阅文献[4]。

引理5　设p为奇素数，χ_p和χ表示模p的偶特征，则有渐进公式

$$\sum_{a=1}^{p=1/2} \chi_p(a)s(2a,p)s(a,p) = \frac{p^2}{10\pi^4}(\bar{\chi}_p(2)+1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sum_{d/n}\chi_p(d)|^2}{n^2} + O(p\exp(\frac{6\ln p}{\ln\ln p}))。$$

证　明　由引理4有

$$\sum_{a=1}^{p=1/2} \chi_p(a)s(2a,p)s(a,p) =$$

$$\frac{p^2}{\pi^4(p-1)^2}\sum_{\substack{\chi_1 \bmod p\\ \chi_1(-1)=-1}}\sum_{\substack{\chi_2 \bmod p\\ \chi_2(-1)=-1}}\sum_{a=1}^{(p-1)/2}$$

$$\chi_p(a)\chi_1(2a)\chi_2(a)|L(1,\chi_1)|^2|L(1,\chi_2|^2。$$

由特征和的正交性有

$$\sum_{a=1}^{(p-1)/2} \chi_p(a)\chi_1(a)\chi_2(a) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{p-1}\chi_p(a)\chi_1(a)\chi_2(a) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\psi(p), & 如果\ \chi_2 = \bar{\chi}_1\bar{\chi}_p, \\ 0, & 其他。\end{cases}$$

于是，
$$\sum_{a=1}^{(P-1)/2} \chi_p(a)s(2a,p)s(a,p) = \frac{p^2}{2\pi^4(p-1)} \cdot$$

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2)|L(1,\chi)|^2|L(1,\chi\chi_p|^2 =$$

$$\frac{p^2}{10\pi^4}(\bar{\chi}_p(2)+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sum_{d/n}\chi_p(d)|^2}{n^2} + O(p\exp(\frac{6\ln p}{\ln\ln p}))。$$

引理6　设p为奇素数，χ_p和χ表示模p的偶特征，则有渐进公式

$$\sum_{a=1}^{(p-1)/2} \chi_p(a)|s_1(2a,p)|^2 =$$

$$\frac{12}{5}(4-\bar{\chi}_p(2))(p/12)^2\frac{|L(2,\chi_p)|^2}{\zeta(4)} + O(p\exp(\frac{6\ln p}{\ln\ln p}))。$$

证　明　由引理1和引理5有

$$\sum_{a=1}^{(p-1)/2}\chi_p(a)|s_1(2a,p)|^2 =$$

$$4\sum_{a=1}^{(p-1)/2}\chi_p(a)[s(2a,p)-2s(a,p)]^2 =$$

$$4[\overline{\chi}_p(2)-4\frac{2}{5}(\overline{\chi}_p(2)+1)+4]\cdot$$

$$\frac{p^2}{4\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sum_{d/n}\chi_p(d)|^2}{n^2}+$$

$$O(p\exp(\frac{6\ln p}{\ln\ln p}))=\frac{12}{5}(4-\overline{\chi}_p(2))\frac{p^2}{4\pi^4}\text{。}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sum_{d/n}\chi_p(d)|^2}{n^2}+O(p\exp(\frac{6\ln p}{\ln\ln p}))\text{。}$$

由恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sum_{d/n}\chi_p(d)|^2}{n^2}=$$

$$\frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}|L(2,\chi_p)|^2\frac{(1-\frac{1}{p^2})^3}{1-\frac{1}{p^4}}\text{。}$$

这就证明了引理 6。

2 定理的证明

由引理 1,3,6 有

$$\sum_{a=1}^{(p-1)/2}\chi_p(a)|s_1(2a,p)|^4 =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{p-1}\chi_p(a)|s_1(2a,p)|^4 =$$

$$\frac{1}{2\phi(p)}\sum_{\chi\bmod p}(\sum_{a=1}^{p-1}\overline{\chi}(a)|s_1(2a,p)|^2)\cdot$$

$$(\sum_{a=1}^{p-1}\chi\chi_p(a)|s_1(2a,p)|^2)\text{。}$$

注意对模 p 的奇特征及正整数 k 有

$$\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a)|s_1(2a,p)|^{2k}=0\text{,于是}$$

$$\sum_{a=1}^{(p-1)/2}\chi_p(a)|s_1(2a,p)|^4 =$$

$$\frac{4}{2\phi(p)}\sum_{\substack{\chi\bmod p\\ \chi(-1)=-1}}(\sum_{a=1}^{(P-1)/2}\overline{\chi}(a)|s_1(2a,p)|^2)\cdot$$

$$(\sum_{a=1}^{(p-1)/2}\chi\chi_p(a)|s_1(2a,p)|^2)=$$

$$\frac{2}{\phi(p)}(\frac{12}{5})^2(\frac{p}{12})^4\frac{1}{\zeta^2(4)}\cdot$$

$$\sum_{\substack{\chi\bmod p\\ \chi(-1)=-1}}[16+\overline{\chi}_p(2)-4\overline{\chi}_p(2)\overline{\chi}(2)-4\chi(2)]\text{。}$$

$$|L(2,\chi)|^2|L(2,\chi\chi_p)|^2+O(p^3\exp(\frac{6\ln p}{\ln\ln p}))=$$

$$\frac{15}{17}(\frac{12}{5})^2(\frac{p}{12})^4(16-\chi_p(2))\frac{|L(4,\chi_p)|^2}{\zeta(8)}+$$

$$O(p^3\exp(\frac{6\ln p}{\ln\ln p}))\text{。}$$

于是,完成了定理的证明。取 χ_p 为模 p 的主特征,即可得到推论。

运用同样的方法,还可以得到以下渐近公式 $\sum_{a=1}^{(p-1)/2}\chi_p(a)|s_1(2a,p)|^{2k}$,这里不再列出。

参考文献:

[1] BERNDT B C. Analytic eisenstein series, theta-functions, and series relations in the spirit of Ramanujan [J]. Journal fur Mathematik, 1978, 304: 332-365.

[2] GANDHI J M. On sums analogous to Dedekind's sums [C]. Proc Fifth Manitoba conf Numerical Math, Congressus Numerantium, Utilitas Math Publishing, Winnipeg, Manitoba, 1975, 647-655.

[3] 陈晓峰. 一个类似于 Dedekind 和的均值公式[J]. 数学年刊 A, 2000, 6(21): 715-722.

[4] ZHANG Wen-peng. On the mean values of Dedekind sums[J]. Journal de Theorie des Nombres, 1996(8): 429-442.

(编 辑 曾大刚)

A sum analogous to Dedekind sums and its 4-th man value formula

CHEN Xiao-feng, WANG Yu-min, ZHANG Wen-peng

(1. National Key Lab of ISN, Xidian University, Xi'an 710071, China; 2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: A sum analogous to Dedekind sums and its 4-th man value is studied by using properties of Dedekind sums, the estimation for character sums and analytic methods and a sharper asymptotic formula are given.

Key words: Dedekind sums; asymptotic formula; dirichlet L-functons