

# 利用 BOX-COX 变换改进加速寿命模型的研究

刘 婷, 张 铎

(西北工业大学航天学院, 西安 710072)

**摘 要:** 在加速寿命试验中,产品的寿命通过加速方程和所承受的应力水平密切相关。以往常用的三种加速模型为幂律模型、阿伦尼斯模型和伊林模型。利用 BOX-COX 变换改进加速寿命模型,提出了一种加速寿命模型族,幂律模型、阿伦尼斯模型和伊林模型作为这种模型族的特例。仿真算例验证了 BOX-COX 加速模型族的适用性。

**关键词:** 加速寿命试验; 加速方程; BOX-COX 变换; Weibull 分布; 参数估计

**中图分类号:** O212.1      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1328(2009)03-1261-04

**DOI:** 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.070

## 0 引言

在加速寿命试验中,产品在比正常应力要严酷的应力环境下进行试验,目的是减少试验时间,获得更多的失效数据。基于加速寿命试验数据估计正常应力水平下产品的寿命是一个外推的过程。这一过程是通过加速方程来实现的,加速方程描述了产品在不同应力下的寿命特性。以往常用的三种加速模型为幂律模型、阿伦尼斯模型和伊林模型。

幂律模型具有线性表达式  $\mu = a + b[-\log(S)]$ , 其中  $\mu = \log(\eta)$ ,  $\eta$  为寿命特征量,  $S$  表示应力变量,  $a$  和  $b$  为模型系数,这一模型经常用于描述压力类应力(如电压等)与产品寿命的关系,是一种经过大量试验数据验证的经验模型。阿伦尼斯模型描述产品寿命和温度的关系,  $\mu = a + b/S$ , 如绝缘体、电池组等。伊林模型的一阶近似为  $\mu = \log(A) - \log(S) + B/S$ , 其中  $A$  和  $B$  为常数。在大多数应用中,由于温度变换范围较小,  $A/S$  近似为常数,此时伊林模型近似为阿伦尼斯模型。

上述三种加速寿命模型具有统一结构,

$$\mu = a + b\phi(S) \quad (1)$$

其中  $\phi(\cdot)$  为某一特定函数,  $a$  和  $b$  为模型系数。模型系数往往可以利用最小二乘方法估计得到。利用最小二乘方法时,需要利用试验数据估计每种应力水平下的  $\mu$ 。

模型(1)是基于两个假定的,一是函数  $\phi(\cdot)$  需

要完全确定;二是  $\mu$  和  $\phi(S)$  之间的关系是线性的。如果上述假定有一个不满足,则利用加速方程外推得到的评估结论将是不可靠的。需要指出的是经验模型最好能在应力变量的整个范围内得到验证,这一点并不总是能做到,因为某些产品在低应力水平下寿命特别长。本文则试图考虑更为灵活的模型在一定程度上克服这一困难。

## 1 BOX-COX 变换加速方程的建模分析

对于模型(1)而言,有两种可能的方法使其更为灵活,一是在  $\mu$  和  $\phi(S)$  之间引入非线性关系;二是选择更为灵活的  $\phi(S)$ 。下面采用第二种策略,并不将  $\phi(S)$  直接确定,而是认为  $\phi(S)$  服从某一函数族,这一函数族由 BOX-COX 变换给出。BOX-COX 变换定义如下:

$$BC_{\lambda}(S) = \begin{cases} \frac{S^{\lambda} - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \log(S), & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

当  $\lambda = 0$  时,模型(2)对应于幂律模型;当  $\lambda = -1$  时,模型(2)对应于阿伦尼斯模型;伊林模型也可以由模型(2)来近似。因此函数族  $\{BC_{\lambda}(S), \lambda \in (-\infty, \infty)\}$  可以涵盖加速寿命试验中的大多数模型。

近年来,许多统计学者研究了更为灵活的模型来描述加速寿命试验,非参数模型是其中的典型代表,但是由于大多数情况下应力水平数有限,很难度量模型的拟合程度,本文给出的 BOX-COX 变换加速

模型是传统模型(1)和非参数模型的折衷,通过引入参数  $\lambda$  为  $\phi(S)$  增加了一个自由度,  $\lambda$  的选择可以通过极小化拟合的残差平方和来得到。

为了利用最小二乘法估计加速方程的系数  $a$  和  $b$ , 必须确定每一个应力水平下的寿命特征量  $\mu$ , 下面首先确定单一应力水平下 Weibull 分布的  $\mu$ , 然后估计加速方程的系数。

在加速寿命试验中,总是假定产品的寿命属于特定的参数分布族(如指数、Gamma、对数正态、Weibull 分布等),寿命分布的某一特定参数(和平均寿命相关)依据(1)式和应力变量建立关系模型,其它分布参数则假定为常数。

假定某产品的寿命  $T$  服从两参数 Weibull 分布,

$$F_T(t) = 1 - \exp\{-(t/\eta)^m\}, t > 0$$

式中  $m$  和  $\eta$  分别为形状参数和尺度参数。在某特定应力水平下,  $n$  个产品投入试验,  $r$  个失效发生后停止试验,即定数截尾,失效时间  $T_1 \leq \dots \leq T_r$ 。记  $X_i = \log(T_i), Y_i = (X_i - \mu)/\sigma, E(Y_i) = \alpha_i,$

$$\text{cov}(Y_i, Y_j) = v_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, r$$

其中  $\mu = \log(\eta), \sigma = 1/m$ 。

则

$$E(X_i) = \mu + \sigma\alpha_i, i = 1, \dots, r \quad (3)$$

利用最小二乘法求解(3)式,得到

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} = (M'V^{-1}M)^{-1}M'V^{-1}\underline{X}$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_r \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1r} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{r1} & v_{r2} & \dots & v_{rr} \end{pmatrix},$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix}$$

计算得到

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^r D(n, r, i)X_i, \hat{\sigma} = \sum_{i=1}^r C(n, r, i)X_i, \text{var}(\hat{\mu}) = \sigma^2 A_{r,n}, \text{var}(\hat{\sigma}) = \sigma^2 B_{r,n} \quad (4)$$

上式中  $D(n, r, i), C(n, r, i), A_{r,n}, B_{r,n}$  为常数,可以查阅相关数表得到<sup>[1]</sup>。

假定共有  $k$  个应力水平  $S_1, \dots, S_k$ 。在应力水平  $S_i$  之下,  $n_i$  个产品进行试验,有  $r_i$  个失效,  $\mu$  可以估计得到,综合考虑(1)和(2)式,有

$$\begin{cases} E(\hat{\underline{\mu}}) = \phi_\lambda \underline{\theta} \\ \text{var}(\hat{\underline{\mu}}) = \sigma^2 A \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\hat{\underline{\mu}} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mu}_k \end{pmatrix}, \phi_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & BC_\lambda(S_1) \\ 1 & BC_\lambda(S_2) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & BC_\lambda(S_k) \end{pmatrix},$$

$$\underline{\theta} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_{r_1, n_1} & & & 0 \\ & A_{r_2, n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{r_k, n_k} \end{pmatrix}$$

利用最小二乘法,得到

$$\hat{\underline{\theta}} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = (\phi'_\lambda A^{-1} \phi_\lambda)^{-1} \phi'_\lambda A^{-1} \hat{\underline{\mu}}$$

经过一些代数计算及简化,有

$$\hat{a} = \frac{GJ - IM}{EG - I^2}, \hat{b} = \frac{EM - IJ}{EG - I^2} \quad (6)$$

式中

$$E = \sum_{i=1}^k A_{r_i, n_i}^{-1}, I = \sum_{i=1}^k A_{r_i, n_i}^{-1} BC_\lambda(S_i),$$

$$G = \sum_{i=1}^k A_{r_i, n_i}^{-1} BC_\lambda(S_i)^2$$

$$J = \sum_{i=1}^k A_{r_i, n_i}^{-1} \hat{\mu}_i,$$

$$M = \sum_{i=1}^k A_{r_i, n_i}^{-1} BC_\lambda(S_i) \hat{\mu}_i \quad (7)$$

由于已经得到了  $k$  个应力水平下的对数特征寿命估值  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_k$ , 且它们互不相关。当  $r_1, r_2, \dots, r_k$  很大时,它们近似服从正态分布。因此,  $a$  与  $b$  的估值也近似服从正态分布。对于一个给定的应力水平,  $\mu$  的估值为

$$\hat{\mu}(S_0) = \hat{a} + \hat{b} BC_\lambda(S_0) \quad (8)$$

方差为

$$\text{Var}(\hat{\mu}(S_0)) = \sigma^2 (1, BC_\lambda(S_0)) \cdot (\Phi'_\lambda A^{-1} \Phi_\lambda) (1, BC_\lambda(S_0))' \quad (9)$$

因此,当  $r_1, r_2, \dots, r_k$  很大时,  $\mu$  的  $100(1 - \alpha)\%$  置信区间为:

$$\hat{\mu}(S_0) \pm t_{\alpha/2, k-1} s(\hat{\mu}(S_0)) \quad (10)$$

上式中  $t_{\alpha/2, k-1}$  是自由度为  $k - 1$  的 t 分布的  $1 - \alpha/2$  分位数,  $s(\hat{\mu}(S_0))$  是  $\hat{\mu}(S_0)$  的标准差, 其中  $\sigma$  用  $\hat{\sigma}$  来代替。因此, 特征寿命  $\eta$  的  $100(1 - \alpha)\%$  置信区间为

$$\begin{aligned} & (\log^{-1}(\hat{\mu}(S_0 - t_{\alpha/2, k-1} s(\hat{\mu}(S_0))))), \\ & \log^{-1}(\hat{\mu}(S_0 + t_{\alpha/2, k-1} s(\hat{\mu}(S_0)))) \end{aligned} \quad (11)$$

当  $\{r_i\}_{i=1}^k$  中的某些值较小时, (11) 式同样有良好的估计效果, 即置信估计对样本容量的稳健性较好。

### 2 BOX-COX 变换加速方程适应性的仿真验证

假定产品寿命服从 Weibull 分布, 分布参数分别为  $m = 2, \log(\eta) = \mu = 28.3 + 4/T - 4\log(T)$

产品在 7 个应力水平下进行寿命试验, 应力水平分别为: 150℃, 200℃, 250℃, 300℃, 350℃, 400℃, 450℃。每个应力水平投入 12 个产品, 截尾数为 9。

由上述真实模型产生仿真试验数据, 并根据第一节中的公式(4)计算每个应力水平下的  $\hat{\mu}_i$ , 然后利用阿伦尼斯模型和 BOX-COX 变换加速方程分别对不同应力水平下的寿命特征量进行建模。利用 BOX-COX 变换, 可得  $\mu_i = a + \hat{b}BC_\lambda(S_i), i = 1, 2, \dots, 9$ , 然后根据极小化残差平方和的方法同时估得参数  $\lambda$  以及系数  $a$  和  $b$ 。

图 1(a) 给出了真实模型、阿伦尼斯模型和 BOX-COX 变换加速方程三者对试验数据的拟合程度以及外推准确程度的比较。从图中可以看出, 在给定的温度范围内 ( $150^\circ\text{C} < T < 450^\circ\text{C}$ ), 利用 BOX-COX 变换方法和阿伦尼斯模型都可以很好地逼近真实模型, 即两者对试验数据的拟合程度很好。但在正常工作应力水平下 ( $T \leq 100^\circ\text{C}$ ), 两者差异显著, 阿伦尼斯模型明显偏离真实模型, 而 BOX-COX 变换加速方程则能够很好地逼近真实模型, 即外推能力较强。

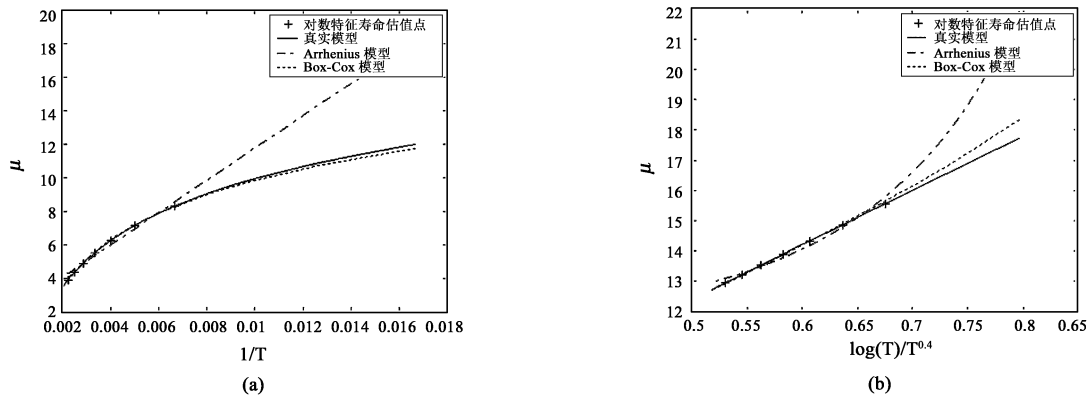


图 1 BOX-COX 变换加速方程与阿伦尼斯模型的比较

Fig.1 The contrast between the BOX-COX transformation model and the arrhenius model in accelerated life test

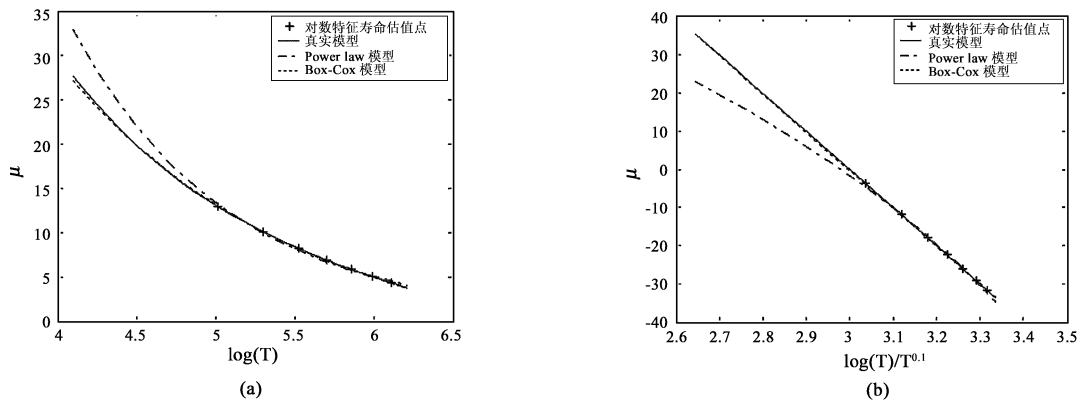


图 2 BOX-COX 变换加速方程与幂律模型的比较

Fig.2 The contrast between the BOX-COX transformation model and the power Law model in accelerated life test

图 1(b)中,  $\mu$  与  $\phi(T)$  之间仍为线性关系, 其中  $\phi(T) = \log(T)/T^{0.4}$ , 真实的模型为  $\mu = 3.5 + 18\phi(T)$ , 同样阿伦尼斯模型和 BOX-COX 变换对试验数据拟合程度都很好, 但是阿伦尼斯模型外推精度较差, 而 BOX-COX 变换加速方程外推则精度较高。

下面比较幂律模型和 BOX-COX 变换的外推性能。图 2(a)中的真实模型为  $\mu = 20 + 1200/T - 3\log(T)$ , (b)中的真实模型为  $\mu = 300 - 100\log(T)/T^{0.1}$ , 分别采用幂律模型和 BOX-COX 变换加速方程进行建模分析, 同样 BOX-COX 变换加速方程的外推性能要优于幂律模型。

### 3 结论

经过上述分析与仿真验证, 可以认为在产品加速寿命试验中采用 BOX-COX 变换加速方程比传统的阿伦尼斯模型、幂律模型和伊林模型等更具优势,

统计推断精度更高, 适应面也更宽。

### 参考文献:

- [1] 菲诗松, 王玲玲. 加速寿命试验[M]. 北京: 科学出版社, 2000. [MAO Shi-song, WANG Ling-ling. Accelerated Life Testing[M]. Beijing: Science Press, 2000(in Chinese).]
- [2] Box G E P, Cox D R. An analysis of transformations[J]. Journal of the Royal Statistics Society B26, 1964.
- [3] Draper N R, Smith H. Applied Regression Analysis[M]. 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [4] Lawless J F. Statistical Models and Methods for Lifetime Data[M]. John Wiley & Sons, New York, 1982.

作者简介: 刘婷(1967-), 女, 博士研究生, 研究员, 研究方向为可靠性分析与评价。

通信地址: 北京 7203 信箱 120 分箱(100074)

电话: (010)88534817(0)

E-mail: liutingkx@163.com

## Improving Accelerated Life Model Adopting BOX-COX Transformation

LIU Ting, ZHANG Duo

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** In accelerated life testing, the nominal life time is often related to stress levels by an acceleration equation. Three particular models that have been used frequently in the past are the power law model, the Arrhenius model and the Eyring model. The accelerated life model is improved by adopting Box-Cox transformation, and the accelerated life model family which includes the three particular models as special cases is proposed. The simulation demonstrates the applicability of Box-Cox accelerated life model family.

**Key words:** Accelerated life testing; Acceleration equation; Box-Cox transformation; Weibull distribution; Parameter estimation