

# 冲击噪声下基于子空间的 MIMO 雷达 DOA 估计研究

王鞠庭, 江胜利, 何劲, 刘中

(南京理工大学电子工程系, 南京 210014)

**摘要:** 研究了 MIMO 雷达在对称  $\alpha$  稳定分布 (S $\alpha$ S, Symmetric  $\alpha$ -stable) 冲击噪声背景下, 基于子空间的多目标 DOA 估计问题, 并分析了空间分集特性对 DOA 估计性能的改善。由于 S $\alpha$ S 噪声不存在二阶及以上矩, 使得传统的基于二阶或高阶累计量的多目标 DOA 算法在 S $\alpha$ S 噪声中性能得到恶化。为此, 首先在分析 MIMO 雷达接收数据 FLOM (Fractional lower order moment) 矩阵子空间的基础上, 给出 FLOM-MUSIC 算法。考虑到 FLOM-MUSIC 算法需要冲击噪声特征指数的先验信息, 为避免噪声特征指数估计, 提出基于无穷范数对接收数据归一化处理的 Inf-MUSIC (Infinity-norm normalization MUSIC) 算法。理论分析表明, 无穷范数归一化后的数据协方差矩阵有界, 且能分解成噪声子空间和信号子空间。计算机仿真验证了上述两种算法的有效性。仿真结果还表明在冲击噪声背景下, MIMO 雷达的空间分集特性也能改善 DOA 估计的精度。

**关键词:** 冲击噪声; MIMO 雷达; 子空间方法; 分数低阶统计量; 无穷范数归一化

**中图分类号:** TN951      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1328(2009)04-1646-05

**DOI:** 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.056

## 0 引言

近年来, 随着雷达研究的深入和多输入多输出 (Multi-Input Multi-Output, MIMO) 通信的快速发展, 雷达与 MIMO 通信交融建立起来的 MIMO 雷达受到雷达界的广泛关注。目前的 MIMO 雷达研究主要集中在两种不同形式的 MIMO 系统: 其一是基于相控阵体制的 MIMO 雷达, 其二是基于多基地 (Multi-static) 或多站点 (Multi-site) 的 MIMO 雷达。第一类 MIMO 雷达系统充分考虑到现有相控阵雷达的特点, 其雷达单元之间的间距足够小, 采用相干处理各单元发射的信号<sup>[1]</sup>。第二类 MIMO 雷达收发单元间距足够大, 从而使得各单元信号相互独立, 以此获得空间分集增益提高雷达的检测和估计性能<sup>[2-6]</sup>。

本文重点研究第二类 MIMO 雷达。文献[2]首次提出此类 MIMO 雷达的概念, 在此基础上, 人们在 MIMO 雷达的波形设计<sup>[3]</sup>、目标检测<sup>[2,4]</sup>以及 DOA 估计<sup>[5-6]</sup>等方面进行了深入的研究, 其基本思想是把传统雷达的相关成果推广到 MIMO 雷达。

在业已开展的 MIMO 雷达 DOA 估计研究中, 通常假设接收噪声为高斯噪声, 采用二阶或高阶统计

量的方法进行处理, 文献[5]研究了 MIMO 雷达基于最大似然算法的单目标 DOA 估计, 并分析了多种 Cramer-Rao 界, 为后续工作提供性能准则。在此基础上, 文献[6]研究了基于 MUSIC 算法的 MIMO 雷达多目标 DOA 估计问题。然而, 有关冲击噪声下的 MIMO 雷达 DOA 估计的文章还鲜见报道。大量的试验数据表明, 雷达实际工作条件下的噪声通常是具有代数拖尾概率密度函数的冲击噪声<sup>[7-9]</sup>。同时, 近年来的研究表明冲击噪声更适用于 S $\alpha$ S 过程, 它不存在二阶及以上矩, 这就意味着高斯噪声背景下基于二阶或更高阶累计量的 DOA 估计算法的性能将急剧下降。为此, 在传统阵列信号处理领域人们提出了各种算法, 用于冲击噪声下的目标 DOA 估计<sup>[9-12]</sup>。本文针对 MIMO 雷达在冲击噪声下的多目标 DOA 估计问题, 提出基于 FLOM 和无穷范数归一的子空间算法, 并分析空间分集特性对 DOA 估计性能的改善。

## 1 MIMO 雷达信号与噪声模型

本文研究文献[5]所给的 MIMO 雷达系统, 原理框图如图 1 所表示。接收端采用普通阵列接收回

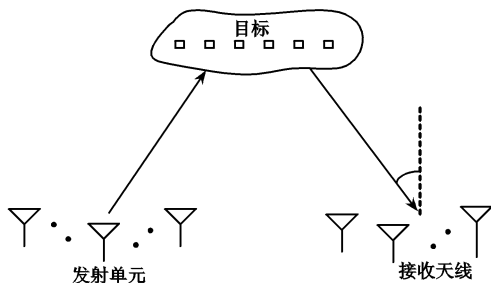


图 1 MIMO 雷达原理框图

Fig.1 Principle diagram of MIMO radar

波,阵列单元数为  $N$ ; 发射端由  $M$  个雷达单元构成, 每个单元使用相同载频发射相互正交的窄带信号  $s_m(t)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ )。发射单元间距足够大, 目标对各发射信号生成的回波相互统计独立; 假设有  $K$  个远场目标, 雷达接收  $s_m(t)$  经第  $k$  个目标反射所得的回波强度为  $\alpha_{k,m}$ , 为独立同分布的零均值, 方差为 1 的高斯随机变量。MIMO 雷达接收阵列第  $t$  次快拍可表示为:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) \sum_{m=1}^M \alpha_{k,m} s_m(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, \dots, L \quad (1)$$

其中  $n_j(t)$  表示第  $j$  个接收阵元的噪声。

$$\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)]^T,$$

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T,$$

$\mathbf{a}(\theta_k)$  为接收阵列对第  $k$  个目标的导向向量。

由(1)式可以看出, MIMO 雷达能够从不同角度接收目标的回波信息, 而这些回波相互统计独立, 故它们同时出现衰落的概率很小。因此, MIMO 雷达通过融合这些回波可以抑制目标“闪烁”, 从而提高 DOA 估计性能。

在实际环境中, 目标散射强度服从高斯分布, 然而, 噪声通常是具有代数拖尾概率密度函数的冲击噪声。在(1)式所给的 MIMO 雷达信号模型中, 假设接收阵列各阵元间的噪声是零均值独立同分布的 SaS 过程, 其分布的特征函数为:

$$\varphi(t) = e^{(\delta t - \gamma |t|^\alpha)} \quad (2)$$

其中  $\alpha$  为特征指数,  $0 < \alpha \leq 2$ ;  $\delta$  为位置参数;  $\gamma$  为偏移系数。当  $\delta = 0, \gamma = 1$  时, SaS 型随机过程服从标准 SaS 分布。此时, 其概率密度函数为:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma(\alpha k + 1) x^{-\alpha k} \sin\left(\frac{\alpha k \pi}{2}\right) & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\pi(x^2 + 1)} & \alpha = 1 \\ \frac{1}{\pi \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) x^{2k} & 1 < \alpha < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{4}\right)} & \alpha = 2 \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数。

图 2 给出了  $\alpha$  取不同值时标准 SaS 分布概率密度函数, 由图可以发现  $\alpha$  越小, SaS 概率密度函数的拖尾越长, 即噪声的冲击性越强。高斯分布是 SaS 分布的极限形式 ( $\alpha = 2$ )。特征指数为  $\alpha$  的 SaS 分布二阶以上矩都不存在, 即

$$\begin{cases} E(|x|^p) = \infty & p \geq \alpha \\ E(|x|^p) < \infty & p < \alpha \end{cases} \quad (4)$$

其中  $E(\cdot)$  表示数学期望。

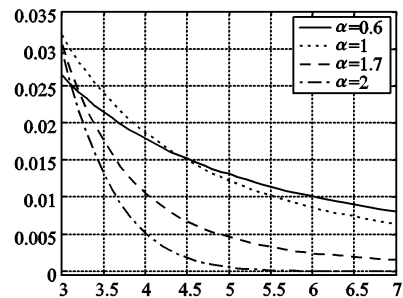


图 2 标准 SaS 分布概率密度曲线

Fig.2 Standard SaS densities

## 2 基于子空间的 DOA 估计算法

### 2.1 FLOM-MUSIC 算法

令

$$\boldsymbol{\alpha}_k = [\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kM}]^T,$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)]^T,$$

则式(1)所给 MIMO 雷达的接收回波可表示为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, \dots, L$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_K]$$

定义  $\mathbf{x}(t)$  的 FLOM 矩阵  $\mathbf{C}$ , 其第  $i$  行第  $k$  列的元素为:

$$[C]_{ik} = E\{x_i(t) |x_k(t)|^{p-2} x_k^*(t)\}, 1 < p < \alpha \leq 2 \quad (6)$$

由第 1 节所给  $\alpha$  和  $n(t)$  的统计特性, 可将  $C$  表示为<sup>[8]</sup>:

$$C = A A A^H + \gamma I$$

$$A_{n,k} = \delta_{n,k} E \left\{ \alpha_n^T s(t) \left| \sum_{q=1}^K \alpha_q^T s(t) + n_n(t) \right|^{p-2} \left( \sum_{r=1}^K \alpha_r^T s(t) + n_n(t) \right)^* \right\} \quad (7)$$

其中  $I$  为单位矩阵。

在实际应用中,  $C$  是根据 MIMO 雷达接收到的  $L$  个快拍数据估计得出, 即

$$[\hat{C}]_{ik} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L x_i(t) |x_k(t)|^{p-2} x_k^*(t), 1 < p < \alpha \leq 2 \quad (8)$$

根据式(7)和(8), 结合 MUSIC 算法, 可得 MIMO 雷达的 FLOM-MUSIC 算法流程如下:

步骤 1: 由雷达接收数据, 根据式(8)计算 FLOM 矩阵估计值  $\hat{C}$ ;

步骤 2: 对  $\hat{C}$  进行奇异值分解, 构造  $N \times (N - K)$  维矩阵  $\hat{E}_n = [\hat{e}_{K+1}, \hat{e}_{K+2}, \dots, \hat{e}_N]$ , 其中  $\hat{e}_{K+1}, \hat{e}_{K+2}, \dots, \hat{e}_N$  为矩阵  $\hat{C}$  的  $N - K$  个较小奇异值所对应的左奇异矢量;

步骤 3: 计算谱函数

$$V(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta) \hat{E}_n \hat{E}_n^H a(\theta)} \quad (9)$$

步骤 4: 谱峰对应的角度值即为 MIMO 雷达目标 DOA 的估计值。

### 2.2 Inf-MUSIC 算法

由式(8)可以发现, FLOM-MUSIC 算法需要选择一个合适的参数  $p$ , 这就需要有  $\alpha$  的先验信息, 或是  $\alpha$  的估计值。 $\alpha$  的先验信息在实际应用中通常很难得到, 而对  $\alpha$  进行估计则需要付出很大的计算代价并且存在误差。针对该问题, 本节提出一种无需任何参数设置的 Inf-MUSIC 算法。

MIMO 雷达接收阵列在第  $t$  个快拍的无穷范数归一化加权系数为:

$$w(t) = \frac{1}{\max\{|x_1(t)|, |x_2(t)|, \dots, |x_N(t)|\}} \quad (10)$$

则式(5)所给接收信号经  $w(t)$  加权处理后为:

$$y(t) = A r(t) + v(t)$$

$$r(t) = w(t) \alpha^T s(t) \quad (11)$$

$$v(t) = w(t) n(t)$$

下面定理给出了 MIMO 雷达接收数据经无穷归一预处理, 所得结果  $y(t)$  的协方差矩阵的子空间结构。

定理: 对于 MIMO 雷达接收数据  $x(t)$ , 其无穷归一预处理所得结果  $y(t)$  的协方差矩阵可分解为:

$$R = E\{y(t)y^H(t)\} = A A A^H + \eta_n^2 I$$

$$A = E\{w(t) \alpha^T s(t) s^T(t) \alpha^* w(t)\} = E\{w^2(t)\} I \quad (12)$$

证明: 因为高斯分布和 SaS 分布都是球面对称, 而球面对称分布随机变量的和仍然是球面对称分布<sup>[12]</sup>, 所以  $x_n(t)$  服从球面对称分布。故对任意  $n = 1, 2, \dots, N$ , 有

$$E\{w(t)x_n(t)\} = 0 \quad (13)$$

又  $w(t)n_n(t)$  也服从球面对称分布, 所以

$$E\{w(t)n_n(t)\} = 0 \quad (14)$$

即无穷归一预处理结果为零均值的随机变量。

对任意  $k, n = 1, 2, \dots, N$ , 有

$$E\{|y_n(t)y_k^*(t)|\} = E\{|w(t)x_n(t)x_k^*(t)w^*(t)|\}$$

$$\leq E\left\{\left|\frac{x_n(t)}{x_n(t)}\right| \times \left|\frac{x_k(t)}{x_k(t)}\right|\right\} = 1 \quad (15)$$

即  $|y_n(t)y_k^*(t)|$  有界。

对于  $n = k$  有

$$E\{w(t)n_n(t)n_n^*(t)w^*(t)\}$$

$$= E\{w^2(t)|n_n(t)|^2\} = \eta_n^2 \quad (16)$$

由于 MIMO 雷达各阵元接收噪声独立同分布, 所以

$$\eta_1^2 = \eta_2^2 = \dots = \eta_N^2 \quad (17)$$

对  $n \neq k$ ,  $w(t)n_n(t)n_k^*(t)w^*(t)$  服从球面对称分布<sup>[12]</sup>, 所以

$$E\{w(t)n_n(t)n_k^*(t)w^*(t)\} = 0 \quad (18)$$

由前面 MIMO 雷达回波模型所给信号与噪声的独立性可得:

$$E\{r_n(t)m_k^*(t)\} = 0 \quad (19)$$

所以

$$R = A A A^H + \eta_n^2 I$$

$$A = E\{w^2(t)\} I \quad (20)$$

由上述子空间分析可以看出,矩阵  $\mathbf{R}$  的  $N - K$  个较小的特征值为  $\eta_n^2$ , 对应的特征向量与矩阵  $\mathbf{A}$  的列向量正交, 这些特征矢量张成噪声子空间, 而  $K$  个较大特征值所对应的特征矢量张成信号子空间。因此, 对 MIMO 雷达接收数据进行无穷范数归一化加权处理所构造出的矩阵  $\mathbf{R}$  进行子空间分析, 可以获得目标的 DOA 估计值。根据式(12), 结合 MUSIC 算法, 可得 MIMO 雷达的 Inf-MUSIC 算法流程如下:

步骤 1: 根据 MIMO 雷达接收的快拍数据计算  $w(t)$  和  $\mathbf{y}(t)$ ;

步骤 2: 计算加权信号  $\mathbf{y}(t)$  的协方差矩阵估计值

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{y}(t) \mathbf{y}^H(t) \quad (21)$$

步骤 3: 对  $\hat{\mathbf{R}}$  进行奇异值分解, 构造  $N \times (N - K)$  维矩阵  $\hat{\mathbf{E}}_n = [\hat{\mathbf{e}}_{K+1}, \hat{\mathbf{e}}_{K+2}, \dots, \hat{\mathbf{e}}_N]$ , 其中  $\hat{\mathbf{e}}_{K+1}, \hat{\mathbf{e}}_{K+2}, \dots, \hat{\mathbf{e}}_N$  为矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  的  $N - K$  个较小奇异值所对应的左奇异矢量;

步骤 4: 计算谱函数

$$V(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{E}}_n \hat{\mathbf{E}}_n^H \mathbf{a}(\theta)} \quad (22)$$

步骤 5: 谱峰对应的角度值即为 MIMO 雷达目标 DOA 的估计值。

由以上步骤可以看出, 对比于 FLOM-MUSIC 算法, Inf-MUSIC 算法两个优点: (1) 无需利用噪声的统计特性, 属于盲处理; (2) 不需要任何参数设置, 计算简单。

### 3 计算机仿真分析

本节将通过计算机仿真, 研究在冲击噪声背景下, 传统 MUSIC、FLOM-MUSIC 和 Inf-MUSIC 三种算法的性能, 以及 MIMO 雷达的空间分集特性对目标 DOA 估计性能的改善。由于 S $\alpha$ S 分布噪声不存在二阶功率, 因此仿真中在比较各种算法性能时都是在考虑相同特征指数的冲击噪声下, 性能指标随信号功率的变化。

在仿真中, 目标反射系数  $\alpha_{km}$  为服从零均值, 方差为 1 的复高斯变量。接收天线为间距等于半波长且阵列单元数  $N = 8$  的均匀线阵, 空间有两个目标

分别位于  $\theta_1 = 10^\circ$  和  $\theta_2 = 16^\circ$ 。噪声假设为标准 S $\alpha$ S 分布噪声, 独立蒙特卡罗实验次数为 2000。采用均方根误差和成功分辨概率作为算法的性能指标。均方根误差定义为

$$\text{RMSE} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1}{K} \left( \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_1(k) - \theta_1)^2 \right)} + \sqrt{\frac{1}{K} \left( \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_2(k) - \theta_2)^2 \right)} \right\} \quad (23)$$

其中  $\hat{\theta}_1(k)$  和  $\hat{\theta}_2(k)$  分别为第  $k$  次成功对  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分辨的估计值。若满足  $2V\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) < V(\theta_1) + V(\theta_2)$  则记为一次成功分辨<sup>[13]</sup>。图 3 和图 4 给出  $\alpha = 1.2$ 、 $p = 0.8$  以及  $p = 1.5$  时, MIMO 雷达发射单元  $M$  取不同值时, 三种 DOA 算法的成功分辨概率和均方根误差随信号功率的变化曲线。

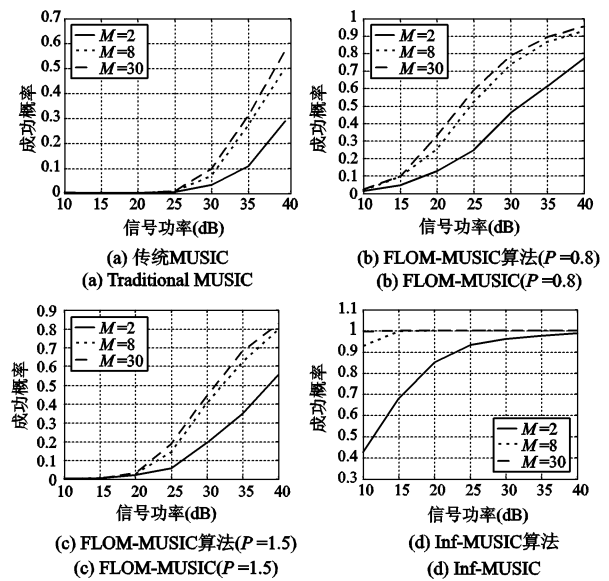


图 3  $\alpha = 1.2$  时三种算法的成功分辨概率

Fig. 3 Probability of resolution of the three algorithms with  $\alpha = 1.2$

由仿真结果可以得出以下结论:

(1) 在冲击噪声中, 传统 MUSIC 算法性能明显下降, 已不能正确估计出目标方向; FLOM-MUSIC 算法必须要求参数  $p < \alpha$ , 方能正常工作; Inf-MUSIC 算法无需任何参数设置, 在强冲击噪声下仍然能正常工作, 且成功分辨概率和估计误差都优于 FLOM-MUSIC 算法。

(2) 仿真结果还表明 DOA 估计的 RMSE 随着

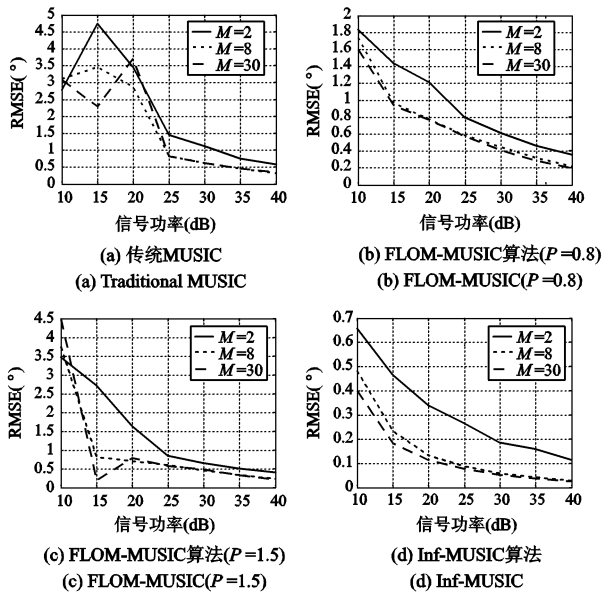


图 4  $\alpha = 1.2$  时三种算法的 RMSE

Fig. 4 RMSE of the three algorithms with  $\alpha = 1.2$

$M$  的增大而变小,这是因为随着  $M$  的增大,目标回波强度都出现衰减的概率很小,即 MIMO 雷达的空间分集特性,在冲击噪声背景下也能改善目标 DOA 估计性能。

#### 4 结论

本文提出 FLOM-MUSIC 和 Inf-MUSIC 两种算法实现了 MIMO 雷达在冲击噪声背景下对多个目标的 DOA 估计。理论分析和计算机仿真表明上述两种算法在冲击噪声环境下都能稳定工作,是两种鲁棒的 DOA 估计算法。相比于 FLOM-MUSIC 算法,Inf-MUSIC 无需利用噪声的统计特性和任何参数设置,计算简单,具有一定的工程应用价值。同时,仿真结果还表明在冲击噪声背景下,MIMO 雷达的空间分集特性也能改善 DOA 估计的精度。

#### 参考文献:

[ 1 ] Bekkerman I, Tabrikian J. Target detection and localization using MIMO radars and sonars[J]. IEEE Trans. on SP, 2006, 54(10): 3873 - 3883.

[ 2 ] Fishler E, Haimovich A, Blum R, et al. Spatial diversity in radars - models and detection performance[J]. IEEE Trans. on SP, 2006, 54(3): 823 - 838.

[ 3 ] Yang Y, Blum R S. MIMO radar waveform design based on mutual information and minimum mean - square error estimation[J]. IEEE Trans. on AES, 2007, 43(1): 330 - 343.

[ 4 ] Haimovich A M, Blum R S, Cimini L J. MIMO radar with widely separated antennas[J]. IEEE SP Mag., 2008, 25(1): 116 - 129.

[ 5 ] Lehmann N H, Fishler E, Haimovich A M, et al. Evaluation of transmit diversity in MIMO-radar direction finding[J]. IEEE Trans. on SP, 2007, 55(5): 2215 - 2225.

[ 6 ] Xia W, He Z S, Liao Y Y. Subspace-based method for multiple-target localization using MIMO radars[C]. In Proc. ISSPIT, 2007: 715 - 720.

[ 7 ] Tsakalides P, Raspanti R, Nikias C L. Angle/Doppler estimation in heavy tailed clutter backgrounds[J]. IEEE Trans. on AES, 1999, 35(2): 419 - 436.

[ 8 ] Liu T H, Mendel J M. A Subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics[J]. IEEE Trans. on SP, 2001, 49(8):1605 - 1613.

[ 9 ] Tsakalides P, Nikias C L. The robust covariation-based MUSIC (ROC-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments[J]. IEEE Trans. on SP, 1996, 44(7): 1623 - 1633.

[ 10 ] 何劲, 刘中. 脉冲噪声环境中鲁棒的自适应波束形成方法[J]. 电子学报, 2006, 34(3): 464 - 468. [ He J, Liu Z. Robust adaptive beamforming method in impulsive noise[J]. ACTA Electronica Sinica, 2006, 34(3): 464 - 468. ]

[ 11 ] He J, Liu Z. Snapshot-instantaneous  $\|\cdot\|_{\infty}$  normalization against heavy-tail noise[J]. IEEE Trans. on AES, in Press.

[ 12 ] Visuri S, Oja H, Koivunen V. Subspace-based direction-of-arrival estimation using nonparametric statistics[J]. IEEE Trans. on SP, 2001, 49(9): 2060 - 2073.

[ 13 ] Zhang Q T. Probability of resolution of the MUSIC algorithm[J]. IEEE Trans on SP, 1995, 43(4): 978 - 987.

作者简介:王鞠庭(1983 - ),男,博士生,研究方向为雷达波形设计与信号处理。

通信地址:南京理工大学电光学院雷达楼

电话:(025)84315156

E-mail:jtwang767@hotmail.com