2002 年 12 月 第 32 卷第 6 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Dec. 2002 Vol. 32 No. 6

七、八次方程的笛卡儿做图

程小红[1],王　瑾[2]

(1. 西北大学 数学系,陕西 西安　710069;2. 沈阳师范大学 数学系,辽宁 沈阳　110034)

摘要:利用计算机首次给出了八次方程笛卡儿做图的一个案例,并据此对笛卡儿方程做图方法中代数的作用及其算法实质进行了分析。

关　键　词:做图;七、八次方程;笛卡儿;数学史

中图分类号:O11　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-274X(2002)06-0617-05

笛卡儿的《几何学》作为《方法论》的附录之一发表于 1637 年。在《几何学》中,笛卡儿给出了一至六次方程的标准做图程序,对此已有学者作了详细的分析[1]。解决了低于六次方程的做图问题后,笛卡儿指出,他的方法具有一般性,可适用于任意次方程。那么笛卡儿的方法能否推至七、八次方程呢?笔者至今似未见到这方面的研究文献。本文通过具体实例来探讨这个问题。

1　笛卡儿方程做图的代数化和算法化倾向

笛卡儿《几何学》的宏伟目标是创造一种方法,以便用来解决所有的几何问题,给出这些问题所谓的一般方法。我们知道,在古希腊,几何做图和几何证明一样,并没有一般的规律可循。笛卡儿之所以能给出几何做图的一个标准程序,完全在于他引入了一种全新的思想——几何做图的代数化,即利用代数方法来解决几何做图问题。

首先,笛卡儿在几何量中引入代数运算和建立坐标系,从而把几何问题转化为代数方程。并且,按照方程的次数把几何问题加以分类,一、二次方程归为第一类,三、四次方程属于第二类,五、六次方程则为第三类,依次类推。同时,笛卡儿仿照古希腊人的传统,把他的前三类问题分别称为平面问题、立体问题和超立体问题[2]。《几何学》围绕这些问题展开,由简单的平面问题开始,直到超立体问题,对每一类问题都给出了标准的做图程序。

笛卡儿不仅将几何问题代数化,而且也把做图工具加以代数化。几何问题转化为代数方程后,并不是要给出这些问题的数值解或者根式解,而是要用做图曲线描绘出方程的根所对应的线段。对于一、二次方程很容易做到,只需要利用圆和直线相交,那么交点到一条坐标轴的距离就为方程的根。对于三、四次方程,也可利用圆和圆锥曲线相交描绘出来,实际上在古希腊已存在这种做法,而对于更高次的方程做图问题,已有的几何曲线显然已不够用。为此,需要引入新的曲线,那么笛卡儿是依据什么样的标准引入几何曲线呢?对此问题西方学者已有很多研究[3]。笔者认为,对于笛卡儿来说,几何曲线是那些能够由一条或几条曲线经连续运动描绘出来的,这种运动不一定是实际可操作的,但必须能在思维中很清晰地想像出来。同时,通过这种方式生成的曲线一定能得到表征它的代数方程,而对于那些没有代数方程的曲线根本不在笛卡儿考虑的范围之内。这也就是说,代数方程是决定几何曲线的一个重要关卡。事实上,曲线需要有生成过程只是笛卡儿心理上的作用,而在做图中发挥实质性作用的却是曲线的代数方程。笛卡儿之所以将割圆曲线及螺线排除在几何曲线之外,正是由于这些曲线没有代数方程。为了下面讨论的方便,我们给出笛卡儿生成曲线的一种方式,同时也可以看到,笛卡儿在描绘出曲线的同时也给出了曲线的代数方程。

首先,他用直线与一个平面直线图形运动的交

收稿日期:2001-12-07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10071085)
作者简介:程小红(1973-),女,辽宁葫芦岛人,西北大学博士,首都师范大学助教,主要从事数学史研究。

点描绘出双曲线。如图 1 所示：EC 是直线 GL 和平面直线图形 $CNKL$ 的交点所描述的曲线，其中 G 点固定，让 GL 绕 G 点转动，$CNKL$ 沿 KL 上下移动，KL 长度保持不变，那么它们的交点描绘出的图形就是双曲线。笛卡儿得到双曲线的方程为 $y^2 = cy - \frac{cx}{b} + ay - ac$。随后，笛卡儿指出，现在若把曲线 $CNKL$ 换作抛物线，依然按照上述方式，让直线绕固定点转动，抛物线沿轴上下移动，那么交点描绘出来的就是解决超立体问题的笛卡儿抛物线．如此下去．直至无穷。

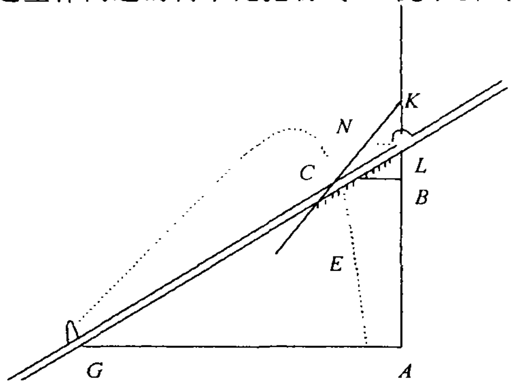

图 1　用直线与一个平面直线图形运动的交点描绘出的双曲线

Fig. 1　The hyperbola made by the moving cross-point of straight line and retilinear ichnography

从上述可以看出，无论是几何问题还是解决几何问题的工具 —— 做图曲线，笛卡儿都用代数方程来表示，这表明了笛卡儿用代数方法处理几何做图的思维取向。

更加值得注意的是，笛卡儿的方程做图还带有鲜明的算法化倾向。这从做图曲线的选取以及曲线参数的得出可以看出来。在文献[2]中，作者指出，笛卡儿解决各类问题的方法是统一的，都是利用圆与另一种曲线的交点，而这些曲线则构成一个迭代序列，即解决 K 类问题的 K 次曲线本身通过一种重复使用的迭代程序（就是上述做图方式）又被用来产生解决 $K+1$ 类问题的 $K+1$ 次曲线。这可从已解决的例子看出，五、六次方程的做图曲线笛卡儿抛物线就是由三、四次方程的做图曲线抛物线生成的。那么对于给定的方程而言，如何确定做图曲线的参数呢？研究表明，笛卡儿实际上是通过待定系数法得到这些参数的。具体说来，假设给定的方程为 $f(x) = 0$，做图曲线是圆和另一生成曲线，设其方程分别为 $g(x,y) = 0$ 和 $h(x,y) = 0$。联立这两个方程组成一个方程组，然后消去其中的一个未知量，得到关于另外一个未知量的方程，设此方程为 $k(y) = 0$，比较 $f(y)$ 与 $k(y)$ 对应项的系数，从而求出做图曲线的参数。以上表明了这样一个事实，即笛卡儿是通过计算来解决方程做图问题的，正是源于此，才使得笛卡儿做图有可能自动运行下去。

笛卡儿给出了低于六次方程的做图程序以后，在《几何学》末尾总结道："我们利用圆与直线的交点解决了所有平面问题，利用圆与抛物线的交点解决了所有的立体问题，利用圆与比抛物线高一次的曲线的交点解决了所有复杂程度比立体问题高一阶的超立体问题，只需要遵循同样的一般方法去解决所有的做图问题，越来越复杂，直至无穷"[1]。那么，笛卡儿的方法在七、八次方程的情形到底如何呢？按照笛卡儿的观点，五次方程可化为六次来做图，七次方程可以通过八次方程来做图。因此，对于七、八次方程的做图问题，笔者仅就八次方程来讨论。

2　七、八次方程的做图

按照笛卡儿的一般方法，七、八次方程的做图曲线应该是由笛卡儿抛物线和直线运动的交点描绘出的四次曲线和圆，而解决九次和十次方程的做图曲线则是由解决七、八次方程的四次曲线和直线运动交点所描绘出的五次曲线和圆 …… 依次下去。笛卡儿能仅凭已解决的 3 种类型就草率地下这样的一般性的结论吗？下面看看这个程序有没有进行下去的可能。这个程序能否持续下去，关键在于构造曲线的参数能否用给定方程的系数表示。在处理六次方程时，做图曲线含有 6 个参数（笛卡儿抛物线含有 3 个参数，圆有 3 个参数），利用待定系数法，恰好得到 6 个方程，由这 6 个方程能够解出 6 个参数。对于八次方程，很显然做图曲线共有 8 个参数（笛卡儿抛物线和直线共有 5 个参数，所以由它们生成的四次曲线含有 5 个参数，而圆有 3 个参数），因此也能得到 8 个方程的方程组，对于十次方程，构造曲线有 10 个参数（四次曲线有 5 个参数，直线有 2 个参数，所以由这两条曲线生成的五次曲线含有 7 个参数，圆有 3 个参数），可以推出，对于 n（n 为偶数）次方程，利用笛卡儿的曲线描绘方式，我们总可以得到 n 个参数的 n 个方程，即此程序确实有做下去的可能。

下面举一个具体的八次方程做图的例子来说明之，设有八次方程为

$$y^8 - \frac{1}{2}y^7 + 3y^6 + 6\frac{1}{2}y^5 - 23y^4 + 3\frac{1}{2}y^3 + 18y^2 - 9\frac{1}{2}y + 1 = 0。$$

按照笛卡儿的一般方法，八次方程的根要用一条由

笛卡儿抛物线和直线经平移和转动生成的四次曲线和圆相交而得。设笛卡儿抛物线的方程为

$$y^3 + by^2 - cdy + bcd + dxy = 0。$$

如图 2，过其上任一点 $K(x_0,\ y_0)$ 做平行于 x 轴的直线 $X'K$、为使问题简化，令 $y_0 = 1$，$x_0 = -\dfrac{1 + b - cd + bcd}{d}$。取直线 GL 恒通过 G 和 K 上一点 L，其中 G 到 x 轴的距离为 a，沿 K 平移 CKN，GL 绕 G 转动，且 $KL = e$ 保持不变，此时，CKN 与 GL 之交点将描绘出一四次曲线。事实上，设 CKN 与 GL 的交点为 $C(x,y)$，$AB = x$，$C'O = y$，$KL = e$，$GO = a$，由 $\triangle GCC' \backsim \triangle CBL$，有 $\dfrac{GC'}{CC'} = \dfrac{CB}{BL}$，令 $BK = z$，即 $\dfrac{a - y}{x} = \dfrac{y - y_0}{e - z}$，得到 $z = \dfrac{ae - ye - xy + xy_0}{a - y}$，而 C 又在 CKN 上，从而有 $y^3 + by^2 - cdy + bcd + d(x_0 + z)y = 0$。将 $z = \dfrac{ae - ye - xy + xy_0}{a - y}$ 代入这个方程中，得到四次曲线方程为

$$y^4 - (a + b)y^3 + (ab + de + d\,x_0 - cd)y^2 + (acd + bcd - dx_0 a - aed)y - abcd = dx(y - y^2)。$$

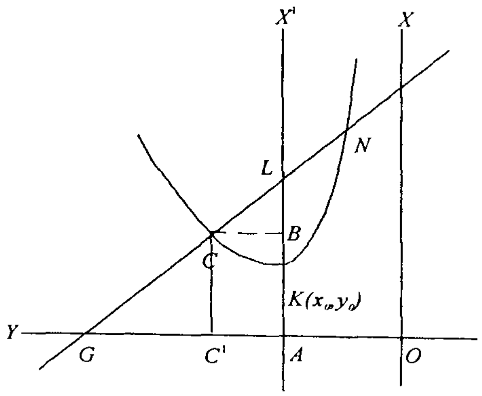

图 2　由笛卡儿抛物线做出的四次曲线

Fig. 2　4 degree curve made by descartes parabola

设圆的方程为 $(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2 = R^2$，则此四次曲线与圆的交点满足方程

$$\begin{aligned}
&y^8 - 2(a + b)y^7 + (a^2 + b^2 + d^2 + 4ab + 2de + \\
&\quad 2dx_r - 2 - 2b - 2bcd)y^6 + \\
&\quad [2(a + b)(1 + b + bcd - ab - de) + \\
&\quad 2bcd + 2abcd + 2a + 2ab - 2aed - \\
&\quad 2dx_r - 2d^2y_r - 2d^2 - 2(a + b)dx_r]y^5 + \\
&\quad [2(a + b)(aed + dx_r - abcd - \\
&\quad ab - a - bcd) + (ab + de - 1 - \\
&\quad b - bcd + dx_r)^2 - 2abcd + d^2 - \\
&\quad d^2R^2 + d^2y_r{}^2 + 4d_2y_r]y^4 + \\
&\quad [2(ab + de - 1 - b - bcd + dx_r)\cdot \\
&\quad (bcd + a + ab + abcd - aed - dx_r) + \\
&\quad 2(a + b)abcd - 2y_rd^2 + 2d^2R^2 - \\
&\quad 2d^2y_r{}^2]y^3 + [-2abcd^2x_r - \\
&\quad 2a^2b^2cd - 2abcd^2e + 2abcd + 2ab^2cd + \\
&\quad 2ab^2c^2d^2 + (bcd + a + ab + \\
&\quad abcd - aed - dx_r)^2 - d^2R^2 + \\
&\quad d^2y_r{}^2]y^2 - (2bcd + 2a + 2ab + \\
&\quad 2abcd - 2aed - 2dx_r)abcdy + a^2b^2c^2d^2 = 0。
\end{aligned}$$

与给定方程比较系数，得到下列含有 8 个方程的方程组：

$$\begin{aligned}
&-2(a + b) = \frac{1}{2}; \\
&a^2 + b^2 + d^2 + 4ab + 2de + \\
&\quad 2dx_r - 2 - 2b - 2bcd = 3; \\
&2(a + b)(1 + b + bcd - ab - de) + 2bcd + \\
&\quad 2abcd + 2a + 2ab - 2aed - 2dx_r - 2d^2y_r - \\
&\quad 2d^2 - 2(a + b)dx_r = 6\frac{1}{2}; \\
&2(a + b)(aed + dxr - abcd - ab - a - bcd) + \\
&\quad (ab + de - 1 - b - bcd + dx_r)^2 - 2abcd + \\
&\quad d^2 - d^2R^2 + d^2y_r{}^2 + 4d^2y_r = -23; \\
&2(ab + de - 1 - b - bcd + dx_r)(bcd + a + \\
&\quad ab + abcd - aed - dx_r) + 2(a + b)abcd - \\
&\quad 2y_rd^2 + 2d^2R^2 - 2d^2y_r{}^2 = 3\frac{1}{2}; \\
&-2abcd^2x_r - 2a^2b^2cd - 2abcd^2e + 2abcd + \\
&\quad 2ab^2cd + 2ab^2c^2d^2 + (bcd + a + ab + abcd - \\
&\quad aed - dx_r)^2 - d^2R^2 + d^2y_r^2 = 18; \\
&-(2bcd + 2a + 2ab + 2abcd - 2aed - \\
&\quad 2dx_r)abcd = -9\frac{1}{2}; \\
&\quad a^2b^2c^2d^2 = 1。
\end{aligned}$$

上述方程组恰好含有 8 个未知量，即 a, b, c, d, e, x_r, y_r 和 R。经过计算选取一组解分别为

$$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}, c = -\frac{32}{\sqrt{191}}, d = -\frac{\sqrt{191}}{4}, e = -\frac{2}{\sqrt{191}}, x_r = -\frac{9}{2\sqrt{191}}, y_r = -\frac{149}{191}, R = \frac{12\sqrt{442}}{191}。$$

于是，笛卡儿抛物线方程为

$$y^3 - \frac{1}{4}y^2 + 8y + 2 + \frac{\sqrt{191}}{4}xy = 0,$$

而由笛卡儿抛物线生成的四次曲线方程为

$$y^4 - \frac{1}{4}y^3 - 3\frac{3}{8}y^2 + 3\frac{5}{8}y - 1 = \frac{\sqrt{191}}{4}x(y - y^2),$$

圆的方程为

$$(x+\frac{9}{2\sqrt{191}})^2+(y+\frac{149}{191})^2=(\frac{12\sqrt{442}}{191})^2。$$

四次曲线与圆的交点到 x 轴的距离就为方程的根所表示的线段。从理论上来说，当做图曲线的参数求出来后，就可以按步骤描绘出曲线。对于五、六次方程做图，笛卡儿用手工描绘给出了笛卡儿抛物线的示意图，然而他实际上只给出一支笛卡儿抛物线。在今天，借助于计算机的便利，我们能够给出比较精确的示意图(图 3)。以下给出做图步骤并用计算机做出图形(这里我们只给出了四次曲线和圆的图像)：

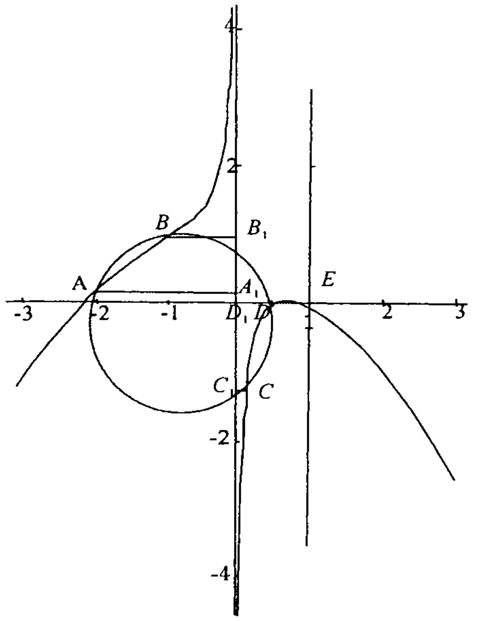

图 3 利用计算机绘出的四次曲线

Fig. 3 4 degree curve and circle made by computer

1) 做出参数为 $-1/4, 8, 2$ 和 $\sqrt{191}/4$ 的笛卡儿抛物线(可由抛物线和直线经上述的平移和转动生成)；

2) 过笛卡儿抛物线上一点 $K(43/\sqrt{191}, 1)$ 做平行于 x 轴的直线 $X'K$，过点 $G(1/2, 0)$ 做直线 GL，使 $KL=-2/\sqrt{191}$ 保持不变，沿 $X'K$ 平移笛卡儿抛物线①，同时绕 G 转动 GL，其交点描绘出一四次曲线；

3) 以 $(-9/2\sqrt{191}, -149/191)$ 为圆心，$12\sqrt{442}/191$ 为半径做圆(可由尺规做出)；

4) 四次曲线与圆的交点到 x 轴的距离为方程的根所对应的线段。

从计算机做出的示意图可以看出，圆与四次曲线有 4 个交点，交点到 x 轴的距离分别为 AA_1，BB_1，CC_1 和 DD_1。另外，$y=1$ 是四次曲线的一支，因此 ED_1 也是方程的根所对应的线段②。从所做的图形来看，方程应该有 6 个实根，其中有一个是二重根。经过计算，此八次方程确实有 6 个实根，分别是 -1，-2，$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{-17+\sqrt{8\,289}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{-17+\sqrt{8\,289}}$，$\frac{1}{2}$ 和 1(二重根)，与上述做图完全吻合。上述案例表明，笛卡儿的方法确实适用于七、八次方程的做图。

然而，我们发现，虽然笛卡儿的程序从形式上看可以继续下去，但是以当时的数学发展状况来看，实际操作起来却有很大的难度。首先，方程做图所涉及到的计算相当繁琐和复杂。实际上，笛卡儿方程做图的本质就是用复杂的量的计算来替代几何做图中存在的质的困难。然而，这种计算量的复杂程度在当时是人力所不及的，七、八次方程做图中的计算就已经很复杂了，更别说更高次的方程了。当然，现在由于计算机的产生和迅速发展，这些对我们来说已经变得微不足道了。但是，如果用手工计算简直难以想像。再有，17 世纪时期的数学家对高次曲线的性质还不甚了解。我们知道，方程做图的核心是通过曲线与圆的交点来描绘出方程的实根，这就要求对曲线的性质有一个基本的了解。但是，事实是当时人们对三次曲线的性质知道得都不多，更何况高次曲线了，这必将成为方程做图的一个障碍。我们注意到，用来解决超立体问题的三次曲线，笛卡儿只描绘出其中的一支，另一支他并未做任何交代。然而，漏掉一支曲线，很可能使方程做图不完善．因为多数情况下，圆不是只与其中的一支曲线有交点。对三次曲线的了解尚且如此，而七、八次，九、十次方程等等所需要的四次和五次曲线以及更高次的曲线的性质知道得就更少了。在这种情况下，很难准确地描绘出所需要的曲线。综上，我们可以看到，限于当时的条件，笛卡儿做图程序操作起来确实不是十分容易，对更高次情形实际上就是不可行的。笛卡儿仅做到五、六次方

① 笛卡儿抛物线和直线可参照上述图形，在此我们不另行描绘。

② 在这里，我们看到，圆与曲线的交点并不能涵盖方程所有实根。这也就是说，方程的实根有可能不是曲线与圆的交点，如我们上述方程的根解 $x=1$ 就不是由交点给出的，而是四次曲线的一支解 $y=1$ 上的点描绘出来的。笛卡儿对这种情形未做说明，当然这种情形比较容易看出来，笛卡儿不会不知道。只是这种技术性的问题，笛卡儿并未详加讨论。

程也说明了这一点。然而，按道理来说，他为了说明他的方法的一般性，至少应该做到七、八次方程。由此看来，笛卡儿很可能已经意识到做图程序的复杂性和可行性问题了。几何做图问题在笛卡儿的影响下，曾经繁荣一时。或许基于上述的原因，到了18世纪后期却渐渐衰落下来，最终淹没在浩瀚的数学文献中而无人问津。

现在我们对这个问题也许很感兴趣：笛卡儿为什么提出这个对当时来说没有多大实用性的程序呢？笔者以为，笛卡儿《几何学》的主旨并不在于这种技术上的探讨，而是着眼于从整体上提出解决问题的机械化方案。众所周知，他在其著作《指导思维的法则》中给出了解决一切问题的方案，即首先把任一问题转化为数学问题，然后将任一问题转变为代数问题，最后将任一代数问题转变为单个方程来求解。但是，他并没有具体说明这3步如何操作，当然，他也无法给出周详的说明，即使在科学高度发展的今天，这3步中的任一步我们也无法完全解决。实际上，这个方案的意义在于他为能够机械化地解决问题指出了一个方向，而《几何学》是笛卡儿整个机械化方案的一部分，也是其中的一个案例，因此它的意义就在于为几何问题机械化的解决指出了一条思路。在计算机已经普及的今天，笛卡儿的这套机械化方案有着现实的意义。本文就是要说明，笛卡儿的程序虽然在当时由于数学的发展状况和科技的不发达限制了它的使用，但是，在今天我们借助于计算机的便利，发现笛卡儿方法对高次方程做图是可行的。

3　代数的作用

通过笛卡儿的工作，纷繁复杂的几何做图问题有了统一的解决程序(至少形式上是如此)，这完全依赖于代数方法的使用。代数在笛卡儿《几何学》中的作用是毋庸置疑的，这主要表现在两个方面，其一是笛卡儿明确地将代数运算引入到几何学中，用代数方程来表征几何问题，并且建立了坐标系，从而能用方程表征曲线。后来的学者也正是从这方面挖掘出笛卡儿几何学的重大意义，并把笛卡儿称为解析几何的创立者。其二是用待定系数法求做图曲线的参数。这两方面对于笛卡儿得到几何做图问题的一般方法是根本的。可以这样说，由于代数的介入，使得在欧氏几何中需要特殊技巧才能解决的难题，现在变成了一种可按确定的法则与程序进行的机械算术过程，这也许才是笛卡儿几何学的真正宗旨。

但是，一般的数学史籍中却存在着这样的误解，即认为代数在笛卡儿《几何学》中的作用与在现行解析几何中的作用是一样的。众所周知，解析几何的中心思想是每一个代数方程表征一条几何曲线，方程与几何曲线是等价的，可通过研究代数方程的性质来探讨几何曲线的性质，而在笛卡儿《几何学》中，代数方程与几何曲线并不完全等价。例如，笛卡儿所引入的做图曲线，总是先有它的生成过程，然后再求出表征它的代数方程，而不是由代数方程引出它所表征的几何曲线。虽然在几何学中有代数方程表征曲线的例子，但笛卡儿连最简单的直线方程都没有给出，解析几何学的思想用代数方程来研究曲线的性质，在笛卡儿几何学中很少见到，因为他的主旨不是研究曲线的性质，而是要向人们展示解决几何问题的一个通用程序。

参考文献：

[1]　勒内·笛卡儿．几何学[M]．袁向东译．武汉：武汉出版社，1992.

[2]　李文林．笛卡儿《几何学》的机械化特征[J]．自然科学史研究，1993，12(3)：1-4.

[3]　HENK J M BOS. Redefining Geometrical Exactness[M]. New York：Springer-Verlag，2001

(编　辑　姚　远)

The method of Descartes′ construction for 7 and 8 degree equations

CHENG Xiao-hong[1]，WANG Jin[2]

(1. Department of Mathematics，Northwest University，Xi′an 710069，China； 2. Department of Mathematics，Shenyang Normal University，Shenyang，110034，China)

Abstract：An example for construction of 7 and 8 degree equation is given by use of Descarte method. Based on this，the role of algebra in construction of equations and the algorithmic character of Descartes′ method are analysed.

Key words：construction；7 and 8 degree equation；Descartes；history of mathematics