2003年2月 第33卷第1期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Feb. 2003 Vol. 33 No. 1

经典Catalan数的组合背景

刘芹英

(西北大学 数学与科学史研究中心,陕西 西安 710069)

摘要:探讨了经典Catalan数在东、西方发现的年代和历史,特别介绍了中国清代数学家明安图(1692? —1763?)在17世纪30年代对Catalan数的首创性工作和应用。列出30种Catalan数的有关公式、组合模型或应用实例,并简要阐明其组合意义。

关 键 词:组合计数;Catalan数;明安图;L. Euler;E. C. Catalan

中图分类号:O11 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2003)01-0121-04

Catalan数:1,1,2,5,14,42,132,…是组合数学中应用广泛的重要计数函数,本文记作C_n。比利时数学家E. C. Catalan(1814—1894),在1838年发表的一篇论文[1]中讨论了尔后所称的Catalan问题:n个不同因子间连续作乘法,如何确定不同的求积方法数?他获得Catalan数的计数公式:

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\quad (n\geqslant 0)。\tag{1}$$

它表示算术三角形"中垂线"上的数递次除以自然数后所得的数列。

现代组合学对Catalan数的深入研究,发现了许多具有组合意义的应用实例,有人估计不少于50种。它们散见于各种文献之中,网上查询,有人列出16种[2],颇为有趣的是令人联想到能否不断补充,使之臻于完备。

其中,特别是许多西方数学家不了解中国历史上对Catalan数的研究成果,清代数学家明安图(约1692? —1763?)是Catalan数的首创者[3],现在已逐步被国内外数学界承认[4,5]。明安图之后,还有几位清代数学家对此也有研究,均在1838年之前,大多鲜为人知。囿于所见,本文在有限的范围内搜集相关材料,重点在介绍和阐明中国数学家的成果,共获得与Catalan数有关的公式、组合模型和应用实例30种。当然,这还是不够的,也可能有理解或翻译方面的不足,还需要感兴趣的学者给予指导和进一步补充。

1 经典Catalan数的产生

1.1 Newton二项式定理

$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{K=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}z^{K}=$$

$$1+\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}C_{k-1}Z^{k}\quad (|z|<1)。\tag{2}$$

当指数$\alpha=1/2$时,Newton二项式定理展开式必然可以表示成Catalan数作系数的幂级数(推导过程从略)。但是,Newton并没有把系数写成Catalan数的形式。

1.2 明安图是Catalan数的首创者

最早发现Catalan数的是我国清代数学家明安图。17世纪30年代他在研究无穷级数时得到该数的3种算法,并多次将它应用于运算之中。其中,两种算法公式是现今组合数学书籍、论文中都未知的。他的有关成果详载于遗著《割圆密率捷法》[6]中,由后人整理出版[7]。

Catalan数的卷积型递推公式

$$C_n=\sum_{k=1}^{n-1}C_{n-k}C_k,\quad (n\geqslant 2)。\tag{3}$$

明安图在计算无穷级数时首先发现了这一规律,并在计算中两次运用。

明安图一项重要的工作是获得了Catalan数的组合递推公式

收稿日期:2002-05-21
基金项目:国家自然科学数学天元基金资助项目(2000)
作者简介:刘芹英(1963-),女,河南安阳人,西北大学博士生,从事中国数学史研究。

$$C_{n+1}=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n-k}{k+1}C_{n-k},\quad (n\geqslant 2)。\tag{3}$$

初始条件是 $C_1=1, C_2=1$。此式为世界首创，区别于西方在历史上和现代求 Catalan 数的所有方法。除了他的算法之外，迄今没有现代的证明。式(3)当 $n\leqslant 5$ 时有 $C_2=C_1=1$,

$$C_3=2C_2=2,$$

$$C_4=\binom{3}{1}C_3-\binom{2}{2}C_2=5,$$

$$C_5=\binom{4}{1}C_4-\binom{3}{2}C_3=14,$$

$$C_6=\binom{5}{1}C_5-\binom{4}{2}C_4+\binom{3}{3}C_3=42。$$

…

明安图在研究无穷级数展开式过程中多次用到式(3)，说明 C_{n+1} 可表为它前边若干项与算术三角形中第 n 条斜线上若干组合数乘积的代数和。

明安图建立了3个几何模型，通过较复杂的几何、代数、级数运算[8](过程从略)，从其中两个获得式(3)，一个获得式(5)，(6)。后者是从原文中经抽象建起的一个奇特的计数结构。

设 $M_1=(1), M_2=(0,1)$；以下的算法步骤为

$$M_3=(2M_1+M_2)M_2=[2(1)+(0,1)](0,1)=(2,1)(0,1)=(0,0,2,1),$$

$$M_4=[2(M_1+M_2)+M_3]M_3=(2,2,2,1)(0,0,2,1)=(0,0,0,4,6,6,4,1),$$

$$M_5=[2(M_1+M_2+M_3)+M_4]M_4=(0,0,0,0,8,20,40,68,94,114,116,94,60,28,8,1)。$$

$$M_{n+1}=(2\sum_{k=1}^{n-1}M_k+M_n)M_n \tag{4}$$

$$MC_n=\sum_{k=1}^{n}M_k=(1,1,2,5,14,42,132,\cdots,C_n)。\tag{5}$$

这种算法相当于建立了一种生成函数，英国数学家 P. J. Larcombe 给出一个现代证明[9]。

明安图应用中国传统数学方法 —— 割圆连比例法得到二倍角正弦的无穷级数展开式：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha-\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin^{2n+1}\alpha/4^{n-1}。\tag{6}$$

它的系数是 Catalan 数[3]。式(6)为世界数学史上首创，其正确性可由二项式定理得到证明。他进而研究了四倍角正弦的无穷级数展开式，它的系数同样可表示为 Catalan 数的函数：

$$\sin 4\alpha=4\sin\alpha-10\sin^3\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}(16C_n-2C_{n+1})\sin^{2n+3}\alpha。\tag{7}$$

Larcombe 已把上述结果推广到 $2k\alpha$ 的情况[10]。

1.3 L. Euler(1707—1783)的创造性工作

用 $n-1$ 条不相交的对角线将一个凸 $n+2$ 边形分割为 n 个三角形的方法数为 C_n。由于此例在几何或组合数学中经常遇到，具有典型性，这个结果曾多次被发现。当Catalan数成为组合数学家关注的课题时，人们才从 Euler 的著作中得知，他在1758—1759年的一篇论文中早已提出这个问题，并予以解决。在西方为首创，要比 Catalan 早80年。

1.4 清代数学家董祐诚(1791—1823)的工作

董祐诚受明安图的影响，在《割圆连比例法图解》中获得[11]

$$\sin m\alpha=m\sin\alpha-\frac{m(m^2-1)}{3!}\sin^3\alpha+\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{5!}\sin^5\alpha-\cdots \tag{8}$$

当 $m=2$ 时，式(9)就成为式(7)，比较它们的系数，知有

$$C_1=1,$$

$$C_n=-\frac{2^{2n-1}}{(2n+1)!}\cdot\prod_{k=1}^{n}(2k+1)(2k-3),(n\geqslant 2), \tag{9}$$

$$C_1=1,$$

$$C_n=2Cn-1(2-\frac{3}{n}),(n\geqslant 2)。\tag{10}$$

1.5 E. C. Catalan 的工作

上已述及，Catalan 于1838年提出并解决了 n 个不同的因子间连续作乘法时不同的方法数为 C_n 的问题，他同时获得了式(1)，(3)。虽然，他不是最早的发现者，但他的工作产生了较大的影响，引起数学家的注意，也丰富了组合数学的内容。

1.6 J. Binet 的生成函数[12]

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n\quad(|x|<\frac{1}{4})。\tag{11}$$

展开式可以用 Newton 二项式定理得到证明。其中的系数是 Catalan 数。

2 Catalan 数的组合意义

经典 Catalan 数具有许多组合应用背景，除了以上所引几何、代数、三角学问题外，不少是组合学或图论问题的实例。我们依据文献[2]，查阅若干相

关著作,又补充若干新例,得到以下20种,有的具有典型性,有的可以看作组合模型,有的形式有别,实质相同。

1) 不同构的有 n 条边的种植树(planted tree)的棵数是 Catalan 数 C_n[13]。

2) 有 n 片树叶的有序三度根树的个数是 Catalan 数 C_{n-1}[14]。

3) n 个顶点的不同二元树的个数是 Catalan 数 C_n。二元树的定义:空集或一组有限个顶点,满足:① 有一个特定的点称作"根点";② 去掉这个根点后,余下的顶点组成两支子二元树:左子树与右子树[13]。

4) 从点$(0,0)$到点$(n+1,n+1)$,除端点外与对角线不相交的(在对角线一侧的)非降路径数是 Catalan 数 C_n[14]。

5) 循环序列满足递推关系:$C_0=1,(n+2)C_{n+1}=(4n+2)C_n,(n\geqslant 0)$,$C_n$ 是 Catalan 数[2]。由此可知 $C_0=1,C_n=(4-\frac{6}{n})C_{n-1}$,即式(11)。

6) $2n$ 个均匀分布在一个圆周上,用 n 条不相交的弦将这 $2n$ 个点配成 n 对,则不同的配对方式数是式(1)[15]。

7) 序列$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$,其中 $x_i=+1$ 或 -1,$(i=1,2,\cdots\cdots,2n)$

满足条件$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_k\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_2n=0\end{cases}$,对每个 $k=1,2,\cdots,2n-1,2n$,则满足上述条件的数是 Catalan 数[16]。

8) n 个1和 n 个0组成一 $2n$ 位的二进制数,要求从左到右扫描,1的累计数不小于0的累计数,满足这一条件的 $2n$ 位的二进制数的个数是[17]。

9) 在两个候选人A和B的投票选举中,共有 $2n$ 个人投票,最终结果是支持A和B票数都是 n 票。在开票过程中始终使A的票数不少于B的票数的投票方案数是 Catalan 数 C_n[18]。

10) 有 $2n$ 个人在剧院票房门前准备买票入场。每张票价是50美分,而且此时票房售票员没有零钱。这 $2n$ 个人恰好有 n 个人有50美分的钱,其余 n 个人只有1美元的钱。如果在任何时候售票员都能找开零钱的 $2n$ 个人的排列方法数是 Catalan 数 C_n[17]。

11) 有 $2n$ 个高低不同的人,排成两行,使得第一排 n 个人都比第二排 n 个人高的排列方法数是 Catalan 数 C_n[17]。

12) 设 S_n 是 n 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$(可以为零)不同排列的集合数,且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足下列条件:① $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$,② $a_1+a_2+\cdots+a_k\geqslant k$(对任意的 $k<n$),则 S_n 是 Catalan 数[17]。

13) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为整数,且满足下列条件:① $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$;② $a_1\leqslant 1$, $a_2\leqslant 2,\cdots,a_n\leqslant n$,则 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足上述条件的序列的个数是 Catalan 数[18]。

14) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是两个完全不同的序列,则把这两个序列融合在一起组成一个新的序列,使得后一个序列与前一个序列相对应的数始终排在前一个序列数后面的排列的个数是 Catalan 数[18]。

15) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是两个完全不同的序列,则把这两个序列融合在一起组成一个新的序列。一个逆序是指 a_i 排在 b_i 的后面$(i=1,2,\cdots,n)$,则这两个序列融合在一起恰有 k 个逆序的排列数是 Catalan 数[18]。

16) 设在 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 上定义了一种非结合、非交换的乘法运算,则由 A 的全体元素作成的乘积的方法数 $U_{n-1}=n!\ C_{n-1}$,其中 C_{n-1} 为 Catlan 数[19]。

17) 有 $2n$ 个人围着圆桌就坐,手臂不相交的握手的方法数是 Catalan 数 C_n[2]。

18) 有一个凸的$(2n-2)$角形 $A_1,A_2,\cdots,A_{2n-2}$,将它们成对连接,并使得连接的线段在$(2n-2)$角形内不相交的方法数是 Catalan 数 C_{n-1}[20]。

19) 由 n 个1,n 个0组成到 $2n$ 位二进制数,要求从左向右扫描前 $2n-1$,位数为1的累计数大于0的累计数,则满足这样条件的数的个数 Catalan 数 C_{n-1}[16]。

20) n 个数相乘,不改变它们的位置,只用括号表示不同的相乘顺序,则构成不同的乘积的方法数 Catalan 数 C_{n-1}[21]。

Catalan 数不仅结构独特,而且有着十分广泛的组合意义和应用,可以同斐波那契数相媲美。本文总结、列举了几个实例。这一有重要意义的计数函数乃是由中国清代数学家明安图首创,以后外国数学家是对明安图成果研究的继续,但却未称它为明安图数。数学史界近年来明确为明安图首创,这样的缺憾并非仅此一例。数家史家有必要进行这类研究,还历史以本来面貌。

参考文献:

[1] CATALAN E C. Note surune equation aux differences finies[J]. J Math Pures Appl,1838,(3):508-514.

[2] ROGER EGGLETON,RICHARD GUY. The Meaning of Catalan Numbers[J]. Mathematics Magazine,1988,(10):1-4.

[3] 罗见今.明安图是卡塔兰数的首创者[J].内蒙古大学学报(自然科学版),1988,(2):239-245.

[4] LARCOMBE P J. On the history of the Catalan numbers:a first record in China[J]. Mathematics Today,1999,35(3):89-94.

[5] LARCOMBE P J. The 18th century Chinese discovery of the Catalan Numbers[J]. Mathematical Spectrum,1999-2000,(1):5-7.

[6] 明安图.割圜密率捷法[M].道光己亥(1839)孟秋.石梁岑氏刊本.

[7] 明安图.割圜密率捷法译注[M].罗见今译注.呼和浩特:内蒙古教育出版社,1998.

[8] 罗见今.无穷级数中的卡塔兰数:明安图的四种几何模型[A].编委会.庆祝吴文俊院士八十华诞论文集.数学与数学机械化[C].济南:山东教育出版社,2001.457-476.

[9] LARCOMBE P J. On a finite polynomial generating function for Catalan subsequences:an 18th century observation proved[J]. Congressus Numerantium,2000,141:49-60.

[10] LARCOMBE P J. On Catalan numbers and Expanding the Sine Function[J]. Bulletin of the ICA,2000,(28):39-47.

[11] 董祐诚.割圜连比例法图解[M].江南制造局刻本,1879.

[12] BINET J. Reflexions surie probieme de terminer le nombre de manieres don't une figeure rectiligne peut etrepartaguee en triangles au moyen de ses diagonals [J]. J Math Pures Appl,1839,(4):79-91.

[13] HARARY F,PRINS G,TTUTTE W T. The number of plane trees[J]. Nederl Akad Wetensch Proc Ser A,1963,67:319-329.

[14] 屈婉玲.组合数学[M].北京:北京大学出版社,1989.46-47.

[15] 屠规章.组合计数方法及其应用[M].北京:科学出版社,1981.36-38.

[16] WHITEWORTH W A. Arrangements of m things of one sort and m things of another sort under certain conditions of priority[J]. Messenger of Math,1978,(8):105-114.

[17] 卢开澄.组合数学[M].北京:清华大学出版社,1991.126-130.

[18] DANIEL I A. Cohen. Basic Techniques of Combinatorial Theory[M]. Boston: A Harcourt Science and Technology Company,1978.38;131;132;142.

[19] 周振黎,康 泰.组合数学[M].重庆:重庆大学出版社,1986.161-162.

[20] 〔罗〕Tomescu I.组合学引论[M].清华大学应用数学系离散数学教研组译.北京:高等教育出版社,1985.38.

[21] MARSHALL HALL J R. Combinatorial Theory [M]. New York: A Wiley-Interscience Pulication,1986.27-28.

(编 辑 姚 远)

Combinatorical background of classical Catalan numbers

LIU Qin-ying

(Research Center for the History of Mathematics and Science,Northwest University,Xi'an 710069,China)

Abstract:The history of Catalan numbers in the East and West is showed. Especially,the earliest application of Catalan numbers by Antu Ming(1692? —1763?),a famous mathematician in Qing Dynasty,is introduced. 30 faormula,combinatorial models concerning Catalan numbers are listed and their combinatorial meaning are briefly presented.

Key words:combinatorial counting; Catalan numbers; Antu Ming; L. Euler