2003 年 10 月
第 33 卷第 5 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Oct. 2003
Vol. 33 No. 5

级联系统镇定的新结论

叶华文[1],戴冠中[1],王 红[2]

(1.西北工业大学 自动控制系,陕西 西安 710072;2.南开大学 数学科学学院,天津 300071)

摘要:从驱动系统全局渐近稳定定理给出两点改进:① 将从动子系统输入到状态稳定的条件减弱为积分输入到状态稳定,这部分讨论中零状态可检测概念起着关键作用;② 将输入到状态稳定条件跟小增益条件结合,给出系统形式复杂于从驱动系统时的稳定结果。

关 键 词:级联系统镇定;零状态可检测;输入到状态稳定;积分输入到状态稳定;小增益原理

中图分类号:O231 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274 X (2003)05-0515-04

以输入到状态稳定原理为基础发展的从驱动系统全局渐近稳定定理[1](本文简称三角引理),在级联系统镇定中发挥着重要作用,但三角引理并非万能,很多时候需要结合无源设计方法,需要结合小增益原理。本文的目的在于,运用无源设计中的零状态可检测概念,运用小增益条件改进三角引理,使之成为一种强力镇定设计工具。

1 准 备

1.1 有关 ISS 和 iISS

首先说明几类函数。连续函数 $\gamma:R_{\geqslant 0}\to R_{\geqslant 0}$, $\gamma(0)=0$,称为 K 函数,如果它严格单增;K 函数 γ 称为 K_∞ 函数,如果 $s\to\infty$ 时,$\gamma(s)\to\infty$;连续函数 $\beta:R_{\geqslant 0}\times R_{\geqslant 0}\to R_{\geqslant 0}$ 称为 KL 函数,如果固定 t,则 $\beta(s,t)$ 为 K 函数,固定 s,则 $\beta(s,t)$ 随 t 单调减,且 $\beta(s,\infty)=0$。

考查一般非线性系统

$$\dot{x}=f(x,u),$$
$$x\in R^n,u\in R^m,f(0,0)=0。\qquad(1)$$

定义 1[1] 系统(1)称为输入,到状态稳定(ISS),如果存在函数 $\beta\in KL,\gamma\in K$,使得系统的解 $x(t,\zeta;u)$ 对所有 $t\geqslant 0,\zeta\in R^n$ 和 u,有

$$|x(t,\zeta;u)|\leqslant\beta(|\zeta|,t)+\gamma(\|u(t)\|),$$

其中 $\|u(t)\|=\sup\limits_{s\geqslant 0}|u(s)|$,$|\cdot|$ 表示欧氏范数。

定义 2[2] 系统(1)称为积分输入到状态稳定(iISS),如果存在函数 $\beta\in KL,\gamma_1,\gamma_2\in K$,使得系统的解 $x(t,\zeta;u)$ 对所有 $t\geqslant 0,\zeta\in R^n$ 和 u,有

$$|x(t,\zeta;u)|\leqslant\beta(|\zeta|,t)+\gamma_1(\int_0^t\gamma_2(|u(s)|)\mathrm{d}s)。$$

iISS 就稳定鲁棒性而言比 ISS 要弱,具体区别参见文献[2]。

除非特别说明,下文中能量函数总是指 C^1 正定径向无界函数。函数 V 正定是指对所有 x 有 $V(x)\geqslant 0$,且 $V(x)=0\Leftrightarrow x=0$,径向无界指 $V(x)\to\infty(|x|\to\infty)$。

引理 1[3] 系统(1)ISS 当且仅当存在能量函数 V 和 K_∞ 函数 ρ,对所有 $x\neq 0$,有

$$|x|\geqslant\rho(|u|)\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial x}f(x,u)<0。$$

引理 2[2] 如果下面任意一个条件成立,其中 $V(x)$ 为能量函数,则式(1)为 iISS。

1) 式(1)关于某个输出 $h(x)$ 和连续正定函数 a_1 和 K 函数 a_2 满足耗散不等式:

$\forall\, x\in R^n,u\in R^m$,

$L_{f(x,u)}V(x)\leqslant -a_1(|h(x)|)+a_2(|u|)$,

且状态输出系统 $\dot{x}=f(x,0),y=h(x)$ 为 ZSD。ZSD 见后面的定义。

2) 式(1)满足耗散不等式:

$\forall\, x\in R^n,u\in R^m,\exists\,\sigma\in K,L_{f(x,u)}V(x)\leqslant\sigma(|u|)$ 且 $\dot{x}=f(x,0)$GAS。

收稿日期:2001-01-19
基金项目:国家自然科学基金项目(19771066);西北工业大学重点学科建设项目资助课题
作者简介:叶华文(1968-),男,湖南安乡人,西北工业大学博士后,从事非线性系统镇定设计研究。

三角引理[1] 考查从驱动系统

$$\dot{x}=f(x,y),\dot{y}=g(y),$$
$$f(0,0)=0,g(0)=0,x\in R^n,y\in R^m,\quad(2)$$

如果从动子系统 $\dot{x}=f(x,y)$ 关于 y ISS,驱动子系统 $\dot{y}=g(y)$ 全局渐近稳定,那么系统(2)全局渐近稳定。

1.2 零状态可检测概念与无源设计

考查光滑仿射系统

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u,y=h(x),$$
$$x\in R^n,u,y\in R^m,f(0)=0,h(0)=0。\quad(3)$$

定义 3[4] 称系统(3)零状态可检测(ZSD),如果

$$\forall x_0\in R^n,\forall t>0,$$
$$h(x(t;x_0))=0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}x(t;x_0)=0,$$

其中 $x=x(t;x_0)$ 为 $u\equiv0$ 时系统(3)的解,x_0 为初始条件。

假设 1 $L_fV(x)\leqslant0,\forall x\in R^n$;状态输出系统 $\dot{x}=f(x),y=(L_gV(x))^T$ZSD。其中 $V(x)$ 为能量函数。

由仿射系统 KYP 引理[4],假设 1 意味着系统

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u,y=(L_gV(x))^T\quad(4)$$

为 ZSD 无源系统。

引理 3[4] 如果假设 1 成立,则 $u=-r(L_gV(x))^T,r>0$ 镇定系统(4),即系统 $\dot{x}=f(x)-rg(x)(L_gV(x))^T$ 全局渐近稳定。

引理 3 说明,零状态可检测的无源仿射系统,可以通过输出负反馈进行镇定。其实,在引理 3 的条件下,输出负反馈还可以使闭环具有积分输入到状态稳定性(iISS)。

引理 4 假设 1 成立,则 $u=-r(L_gV(x))^T,r>0$,为系统(4)的 iISS 镇定控制器。

证 明 求 V 沿 $\dot{x}=f(x)+g(x)[-r(L_gV(x))^T+v]$ 的解的时间微分有

$$\dot{V}=L_fV(x)-r|L_gV(x)|^2+L_gV(x)v\leqslant$$
$$-r|L_gV(x)|^2+\frac{r}{2}|L_gV(x)|^2+\frac{2}{r}|v|^2=$$
$$-\frac{r}{2}|L_gV(x)|^2+\frac{2}{r}|v|^2$$

由引理 2 知结论正确。

2 主要结果

2.1 三角引理的改进之一

以系统(2)为考查对象,基于 iISS 概念改进三角引理。

假设 2 从动子系统 $\dot{x}=f(x,y)$ 关于某个输出 $h(x)$ 和连续正定函数 a_1 和 K 函数 a_2 满足:$\forall x\in R^n$,$y\in R^m,L_{f(x,y)}U(x)\leqslant-a_1(|h(x)|)+a_2(|y|)$,且系统 $\dot{x}=f(x,0),Y=h(x)$ZSD。其中 $U(x)$ 为能量函数,下同。

假设 3 从动子系统 $\dot{x}=f(x,y)$ 满足耗散不等式:

$$\forall x\in R^n,y\in R^m,$$
$$\exists\sigma\in K,L_{f(x,y)}U(x)\leqslant\sigma(|y|),$$

且 $\dot{x}=f(x,0)$GAS。

定理 1 如果假设 2 或假设 3 成立,$\dot{y}=g(y)$GAS,$\dot{x}=f(x,y)$ 的解全局有界,则系统(2)GAS。

证 明 假设 3 成立时的证明参见文献[5, theroem];假设 2 成立时,注意到 $(x,y)=(x,0)$ 属于系统的不变集,因此在不变集中有估计式 $\dot{U}\leqslant-a_1(|h(x)|)$,然后由 ZSD 假设知结论得证。

定理 1 用更简明的方式表达即为:一个 iISS 系统,如果其解全局有界且扰动动态渐近收敛,则复合系统 GAS。

下面通过典型例子说明上述结论一定程度地改进了三角引理。

考查级联系统

$$\dot{x}=f_0(x)+f_1(x,y)y,$$
$$\dot{y}=f(y),x\in R^n,y\in R^m,\quad(5)$$

假设 4.1 存在能量函数 U,使得对所有 $x\in R^n$;$L_{f_0(x)}U(x)\leqslant-P(x)\leqslant0$;存在能量函数 V,使得对所有 $y\neq0,L_{f(y)}V(y)\leqslant-Q(y)<0$。

假设 4.2 状态输出系统 $\dot{x}=f_0(x),Y=P(x)$ZSD。

假设 4.3 存在连续正函数 κ 和 ρ,$\kappa\notin L^1([0,+\infty))$,$\frac{1}{1+\rho(\cdot)}\notin L^1([0,+\infty))$,使得

$$L_{f_1(x,y)y}U(x)\leqslant\kappa(V(y))Q(y)[1+\rho(U(x))]。$$

系统(5)满足假设 4.1 ~ 4.3 并不能充分地证明 x 子系统关于 y ISS,但显然可以证明关于 y 为 iISS,只需验证假设 3 满足。事实上,$\dot{x}=f_0(x)$ 显然 GAS,而且,由于 $\frac{1}{1+\rho(\cdot)}\notin L^1([0,+\infty))$,$[1+\rho(U(x))]$ 必然全局有界,不妨设 $[1+\rho(U(x))]\leqslant M$,于是可得到耗散不等式:

$$\forall x\in R^n,y\in R^m,\dot{U}\leqslant-P(x)+M\kappa(V(y))Q(y)\leqslant M\kappa(V(y))Q(y):=\sigma(|y|),\sigma\in K。$$

定理 2 如果假设 4.1 ～ 4.3 成立,则系统(5)GAS。

证 明 根据定理1,只需要验证系统(5)全局有界,以

$$W(x,y) \leqslant S(U(x)) + T(V(y)),$$

$$S(r) = \int_0^r \frac{1}{1+\rho(s)}\mathrm{d}s, T(r) = \int_0^r \kappa(s)\mathrm{d}s,$$

为能量函数易验证此事实,此时 w 沿系统(5)的解求时间微分有

$$\dot{W} \leqslant -\frac{P(x)}{1+\rho(U(x))} \leqslant 0。$$

定理1还可以用来解释一类级联系统的镇定设计。

考查系统

$$\begin{aligned}&\dot{\zeta} = f_0(\zeta) + f_1(\zeta,x)y,\\ &Y = (L_{f_1(\zeta,x)}U(\zeta))^T,\\ &\dot{x} = f(x) + g(x)u,\\ &y = h(x)。\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\zeta \in R^q, x \in R^n, u, y \in R^m, U(\zeta)$ 为能量函数。

定理3[4] 考查系统(6),如果 $\dot{\zeta} = f_0(\zeta)$ 关于能量函数 $U(\zeta)$ 满足:$\forall \zeta \neq 0, L_{f_0}U(\zeta) < 0, \{f,g,h\}$ 关于能量函数 $V(x)$ 无源且ZSD,则反馈 $u = -(L_{f_1(\zeta,y)}U(\zeta))^T - h(x)$ 镇定系统(6)。

证 明 由引理4知系统 $\dot{x} = f(x) + g(x)[-(L_{f_1(\zeta,y)}U(\zeta))^T - h(x)]$ 关于 $v:= -(L_{f_1(\zeta,y)}U(\zeta))^T$ 为iISS,而以 $W(\zeta,x) = U(\zeta) + V(x)$ 为能量函数可得到 $\dot{W} = L_{f_0}U(\zeta) < 0$,从而系统的解全局有界,而且,在 $E = \{(\zeta,x) | \dot{W} = 0\}$ 中 $\zeta = 0$,因此有 $v \to 0(t \to \infty)$,这样,由定理1知 $x \to 0(t \to \infty)$。于是,$(\zeta,x) = (0,0)$ 为GAS平衡点。

2.2 三角引理的改进之二

下面讨论的系统其形式比三角引理中的要复杂,描述如下

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2), \dot{x}_2 = f_2(x_2,x_1), \tag{7}$$

其中 $x_i \in R^{n_i}, f_i(0,0) = 0(i=1,2)$。

定理 4 如果满足下面两个条件,那么系统(7)GAS。

1) 对所有 $x \neq 0$,存在能量函数 V_1, V_2 和 K_∞ 函数 ρ_1 及可微 K_∞ 函数 ρ_2 使得

$$V_1(x_1) \geqslant \rho_1(V_2(x_2)) \Rightarrow L_{f_1(x_1,x_2)}V_1(x_1) < 0,$$

$$V_2(x_2) \geqslant \rho_2(V_1(x_1)) \Rightarrow L_{f_2(x_2,x_1)}V_2(x_2) < 0,$$

2) $\forall s > 0, \rho_1 \circ \rho_2(s) < s$。

证 明 $\rho_1 \in K_\infty$,因此 ρ_1^{-1} 在 $[0,\infty)$ 上有定义且 $\rho_1^{-1} \in K_\infty$,由2)知 $\forall s \in (0,\infty), \rho_2(s) < \rho_1^{-1}(s)$。于是,在 $(0,\infty)$ 上总存在一个连续可微函数 K_∞ 函数 σ,对所有 $s > 0, \sigma'(s) > 0$,并且 $\rho_2(s) \leqslant \sigma(s) < \rho_1^{-1}(s)$。

定义能量函数 $V(x) = \max\limits_x\{\sigma(V_1(x_1)), V_2(x_2)\}$,$V(x)$ 显然正定径向无界。定义集合:

$$\Omega_1 = \{x: V_2(x_2) \leqslant \sigma(V_1(x_1))\},$$

$$\Omega_2 = \{x: V_2(x_2) > \sigma(V_1(x_1))\}。$$

在 Ω_1 中,$V_2(x_2) \leqslant \sigma(V_1(x_1)) < \rho_1^{-1}(V_1(x_1))$,即 $V_1(x_1) \geqslant \rho_1(V_2(x_2))$,由假设1)知

$$\forall x \neq 0, x \in \Omega_1, \dot{V}(x) = \sigma'(V_1(x_1))\frac{\partial V_1}{\partial x_1}f_1 < 0。$$

在 Ω_2 中同样可推得

$$\forall x \neq 0, \dot{V}(x) = \frac{\partial V_2}{\partial x_2}f_2 < 0,$$

这样,由稳定原理知道系统(7)GAS。

条件1)实际上意味着 x_1 子系统关于 x_2,x_2 子系统关于 x_1 为ISS,因此从定理4不难得到三角引理。事实上,考查三角引理中的系统,定理4的条件1),2)总可以满足。另外,条件2)是非线性小增益条件,也是定理4中的一个关键条件。

例 1 镇定下面的系统

$$\begin{cases}\dot{z} = -z^5 + x^2,\\ \dot{x} = u + z^2。\end{cases} \tag{8}$$

文献[6]曾指出,系统(8)不存在只依赖状态 x 的光滑镇定控制器 $u = a(x)$,但运用定理4可以给出系统(8)的只依赖 x 的连续镇定控制律。

为 z, x 子系统设置能量函数,分别为 $U(z) = \frac{1}{2}z^2$ 和 $V(x) = \frac{1}{2}x^2$。因为只能利用 x 的信息,还要使 x 子系统关于 z ISS,故而初步取 $u = -3x^\theta$,θ 为待定常数,它将保证 x^θ 为 x 的奇函数。

对 z 子系统有

$$\dot{U} = -z^6 + zx^2 = -\frac{1}{2}z^6 - \frac{1}{2}z^6 + zx^2 \leqslant -\frac{1}{2}z^6 - \frac{1}{2}|z|(|z|^5 - 2|x|^2)。$$

当 $|z|^5 - 2|x|^2 \geqslant 0$,即 $U \geqslant 2^{-\frac{1}{5}}V^{\frac{2}{5}}$ 时,z 子系统关于 x ISS,此时 $\rho_1(s) = 2^{-\frac{1}{5}}s^{\frac{2}{5}}$。

对 x 子系统有

$$\dot{V} = -3x^{\theta+1} + xz^2 = -x^{\theta+1} - 2x^{\theta+1} + xz^2 \leqslant -x^{\theta+1} - 2|x|(|x|^\theta - \frac{1}{2}|z|^2)。$$

当 $|x|^\theta - \frac{1}{2}|z|^2 \geqslant 0$,即 $V \geqslant \frac{1}{2}U^{\frac{2}{\theta}}$ 时,x 子系统关于 z ISS,此时 $\rho_2(s) = \frac{1}{2}s^{\frac{2}{\theta}}$。

为满足对所有 $s>0$，$\rho_1\circ\rho_2(s)<s$，取 $\theta=\frac{4}{5}$。由定理 4，$u=-3|x|^{\frac{1}{5}}x^{\frac{3}{5}}$ 或者 $u=-3|x|^{\frac{3}{5}}x^{\frac{1}{5}}$ 镇定系统(8)。

如果全状态反馈，运用无源设计方法可以得到镇定控制律 $u=-x-xz-z^2$。设计方法是将系统重构为两个严格无源子系统组成的从驱动系统，并且从驱动系统的输入为驱动系统的输出。以 $U(z)=\frac{1}{2}z^2$ 和 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$ 分别为 z 子系统和 x 子系统的能量函数，初置控制律 $u=-x-z^2+xv$，v 为新输入，得到两个严格无源系统组成的从驱动系统

$$\begin{cases}\dot{z}=-z^5+x^2, Y_1=z,\\ \dot{x}=-x+xv, Y_2=x^2。\end{cases}\tag{9}$$

按照文献[7]中的结论，$v=-Y_1=-z$ 镇定系统(9)，即 $u=-x-xz-z^2$ 镇定系统(8)。

3 小 结

本文从下述两个途径改进了三角引理：① 用积分输入到状态稳定条件和有界性条件代替输入到状态稳定条件(定理 1)；② 将输入到状态稳定条件与小增益条件结合并运用特殊的能量函数(定理 4)。定理 1 说明最近的 iISS 刻画[2] 在级联系统的镇定中有着重要应用，定理 4 则说明小增益原理有助于镇定设计。

参考文献：

[1] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization[J]. IEEE Trans Automa Contr, 1989, 34(4): 435-443.

[2] ANGELI D, SONTAG E D, WANG Y. A characterization of integral input to state stability[J]. IEEE Trans Automa Contr, 2000, 45(6): 1 082-1 096.

[3] SONTAG E D, WANG Y. On characterizations of the input-to-state stability property[J]. Syst Contr Lett, 1995, 24: 351-359.

[4] BYRNES C I, ISIDORI A, WILLEMS J C. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems [J]. IEEE Trans Automat Contr, 1991, 36: 1 228-1 240.

[5] SONTAG E D. Remarks on stabilization and input-to-state [A]. IEEE ed. Proc the 28th IEEE CDC [C]. Tempa: IEEE Publications, 1989. 1 376-1 378.

[6] BYRNES C I, ISIDORI A. New results and examples in nonlinear feedback stabilization [J]. Syst Contr Lett, 1989, 12: 437-442.

[7] ORGEGA R. Passivity properties for stabilization of cascaded nonlinear systems[J]. Automatica, 1991, 27(2): 423-424.

(编 辑 亢小玉)

New results in stabilization designs of cascaded nonlinear systems

YE Hua-wen[1], DAI Guan-zhong[1], WANG Hong[2]

(1. Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, China; 2. College of Mathematics Science, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: The hierachical system stability theorem, concluded by E. D. Sontag, is an important result in nonlinear stabilization. This result has been improved along two different routes: ① the driven subsystems are usually supposed to be input-to-state stable. This condition has been weakened and replaced with integral input-to-state stable; here the concept of zero-state-detectability plays an important role. ② by combining input-to-state stability condition with small gain condition, the corresponding stability result is concluded for non-hierachical systems.

Key words: zero-state-detectability; input-to-state stability; integral input-to-state stability; small gain theory