2001 年 6 月
第 31 卷第 3 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Jun. 2001
Vol. 31 No. 3

广义非线性离散系统的稳定性

梁家荣[1],商立群[2],商立军[3]

(1. 广西大学 计算机科学系,广西 南宁 530004;2. 西安科技学院 自动化系,陕西 西安 710054;3. 第四军医大学 基础部,陕西 西安 710032)

摘要:利用广义李雅普诺夫方法,研究了广义非线性离散系统,给出了广义非线性离散系统稳定性定理和不稳定性定理。就一类广义非线性离散系统,给出了其按线性近似的稳定和不稳定的条件。

关 键 词:广义非线性离散系统;稳定性;李雅普诺夫函数

中图分类号:O231 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2001)03-0189-03

随着现代控制理论的发展,广义系统理论已成为人们广泛关注的领域。对连续时间广义系统已得到了较为充分的研究,对离散时间广义系统的研究并不多见。众所周知,由于计算机技术的广泛普及,应用离散时间系统的相关研究,尤其是系统辨识和自适应控制已成为连续系统的完全平行的研究分支。在离散广义系统中,文献[1]给出了李雅普诺夫分析稳定性方法。文献[2]利用等价系统和等价变换方法给出了稳定性的充要条件,但都是基于离散广义线性系统。在现实中,描述问题更多的是非线性系统,因而,研究广义非线性离散系统的稳定性,更具有实际意义。本文利用广义李雅普函数方法研究广义非线性系统稳定和不稳定性。

1 稳定性分析

考虑如下的广义非线性离散系统

$$Ex(t+1)=f(x), \tag{1}$$

其中 $\det E=0$, $E\in R^{n\times n}$, $f:R^n\rightarrow R^n$, $t\in M=\{0,1,2,\cdots\}$,假设式(1)关于任意的满足相容初始条件 $Ex(0)=Ex^0$ 无脉冲解 $x(t)$ 存在且惟一[3]。

定义 1 设 $x(t)$ 是满足相容初条件 $Ex(0)=Ex^0$ 的无脉冲解,称广义系统(1)的零解是 E-稳定的。如果 $\forall\ \varepsilon>0$,存在 δ,t_0 当 $t>t_0$,$\|Ex(0)\|=\|Ex^0\|<\delta$ 时,$\|Ex(t)\|<\varepsilon$。

定义 2 称广义系统(1)的零解是 E-渐近稳定的。如果

1) 广义系统(1)是 E-稳定的,

2) $\lim\limits_{t\to\infty}Ex(t)=0$。

定理 1 若对式(1),存在关于 $Ex(t)$ 的连续正定函数 $V(Ex(t)):R^n\rightarrow R$, $V(0)=0$,它关于式(1)的全差分 $\Delta V(Ex(t))=V(Ex(t+1))-V(Ex(t))=\tilde{\omega}(Ex(t))$ 是一常负函数,并在集合 $H=\{x(t)|\tilde{\omega}(Ex(t))=0\}$ 中不含除使 $Ex(t)=0$ 的其他解,则式(1)是 E-稳定的。

证 明 因 $Ex(t)$ 是无脉冲的,故可取正常数 l,使 $\{x(t)\mid\|Ex(t)\|\leqslant l\}\subseteq\Omega$,$\Omega$ 为包含原点在内的某连通区域。对任意的 $0<\varepsilon<l$,由 $V(Ex(t))$ 的连续性及正则性知,在 $\varepsilon\leqslant\|Ex(t)\|\leqslant l$ 时

$$h=\min V(Ex(t))>0。$$

此外,因为 $V(Ex(t))$ 在 $Ex(t)=0$ 处连续故存在 δ(不妨取 $\delta<\varepsilon$) 当 $\|Ex(t)\|<\delta$ 时,

$$V(Ex(t))<\varepsilon。 \tag{2}$$

下证,对 $\|Ex^0\|<\delta$ 满足相容条件 $Ex(0)=Ex^0$ 的无脉冲解 $x(t,t_0,Ex^0)$,对 $t\geqslant 0$ 满足

$$\|Ex(t)\|<\varepsilon。 \tag{3}$$

事实上,因为 $\delta<\varepsilon$,故当 $t=0$ 时,$\|Ex(t)\|<\varepsilon$,不妨假设存在某时刻 $T\in M$,(3) 在 $t=\{0,1,\cdots,T-1\}$ 时成立,而当 $t=T$ 时,$\|Ex(t)\|>\varepsilon$,从而

收稿日期:1999-06-14

基金项目:广西自然科学基金资助项目(桂科基 0009007);广西教育厅自然科学基金资助项目(桂 169)

作者简介:梁家荣(1966-),男,广西玉林人,广西大学博士,从事广义系统理论和计算方法的研究。

$$V(Ex(t)) \geqslant h,$$

又因为 $\Delta V(Ex(t)) \leqslant 0$，从而有 $V(Ex(t)) \leqslant V(Ex(t-1)) \leqslant \cdots \leqslant V(Ex(0)) < h$。此为矛盾，因而广义系统(1)是 E-稳定的。

定理 2 若存在关于 Ex 连续函数 $V(Ex(t)): R^n \to R$, $V(0)=0$，它在原点的任何邻域中关于 $Ex(t)$ 不是常正的，它沿式(1)的全差分 $\Delta V(Ex(t))$ 是常负的，且式(1)在集合 $H = \{x(t) \mid \tilde{\omega}(Ex(t)) = 0\}$ 中不含除使 $Ex(t)=0$ 的其他解，则式(1)的零解是非 E-稳定的，从而式(1)的零解也不是李雅普诺夫意义下稳定的。

证 明 因为 V 在原点的任何邻 $S_\delta = \{Ex(0) \mid \|Ex(0)\| < \delta\}$ 域内均不是常正的。故对于任意的无论怎样的 $\delta > 0$，对集合 S_δ，必存在某一元素 $Ex_1(0)$，使得 $V(Ex_1(0)) < 0$，记 $-r = V(Ex_1(0))$，$r > 0$。对于满足初始相容条件 $Ex_1(0) = Ex^0$ 的相容解 $x_1(t)$，无论怎样大的 $T > 0$，由 ΔV 的常负性知，当 $t > T$ 时，$V(Ex_1(t)) \leqslant V(Ex_1(T)) \leqslant V(Ex_1(0)) = -r$。又由 $V(0)=0$ 及 V 关于 $Ex(t)$ 的连续性知，必存在某个 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $\|Ex_1(t)\| \geqslant \varepsilon_0$。因此，式(1)是非 E-稳定的，从而不是李雅普诺夫意义下稳定的。

考虑如下离散广义线性系统

$$Ex(t+1) = Ax(t), \tag{4}$$

V 为对称阵，式(4)的广义李雅普诺夫函数

$$v(Ex(t)) = (Ex(t))^T V(Ex(t))。 \tag{5}$$

若存在一对称阵 W，满足

$$A^TVA - E^TVE = -E^TWE, \tag{6}$$

则称式(6)为式(4)的李雅普诺夫方程[1]。

定理 3 若式(4)有无脉冲的轨线存在，且广义特征方程 $\det(\lambda E - A) = 0$ 有模大于1的特征根，且对所有的特征根 λ_i, λ_j 满足 $\lambda_i \lambda_j \neq 1$，则对于任意给定的关于 $Ex(t)$ 负定(正定)的对称阵 W，李雅普诺夫方程(6)有不是常负(常正)的对称解矩阵 W。

证 明 由于式(4)无脉冲轨线，因而存在可逆矩阵 P, Q，使

$$QEP = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ QAP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}。$$

令 $$(Q^{-1})^TVQ^{-1} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2^T & V_4 \end{bmatrix},$$

$$(Q^{-1})^TWQ^{-1} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^T & W_4 \end{bmatrix}。$$

$$P^T(A^TVA - E^TVEP) =$$

$$(QAP)^T(Q^{-1})^TVQ^{-1}(QAP) - (QEP)^T(Q^{-1})^TVQ^{-1}(QEP) =$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2^T & V_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2^T & V_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_1^TV_1A_1 - V_1 & A_1^TV_2 \\ V_2^TA_1 & V_4 \end{bmatrix}。$$

$P^T(E^TWEP) = (QEP)^T(Q^{-1})WQ^{-1}(QEP) = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，因而，$A_1^TV_1A_1 - V_1 = -W_1$。由 W 关于 $Ex(t)$ 的正定(负定)知，W_1 为正定(负定)阵。又因为

$$|\lambda E - A| = |Q^{-1}|\,|\lambda QEP - QAP|\,|P^{-1}| = |Q^{-1}|\begin{vmatrix} \lambda I_1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{vmatrix}|P^{-1}| = (-1)^{n-r}|Q^{-1}|\,|\lambda I_1 - A_1|\,|P^{-1}|。$$

因而，$\det(\lambda E - A) = 0$ 与 $\det(\lambda E - A_1) = 0$ 有相同的特征根，从而知 A_1 有模大于1的特征根，所以 A_1 的特征根满足 $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$，由文献[4]可知对于负定阵 W_1 存在惟一矩阵 V_1，使

$$A_1^TV_1A_1 - V_1 = -W_1。$$

由 A_1 有模大于1的特征根可知 V_1 不是常负阵。取 $V_3 = 0$，V_4 是一负定阵，则

$$V = Q^T\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_4 \end{bmatrix}Q。$$

为对称阵，且 V 不是常负阵。

2 按线性近似系统决定广义非线性离散系统的稳定性

考虑非线性广义系统

$$Ex(t+1) = Ax(t) + G(x(t)), \tag{7}$$

其中 $\det E = 0$，$E, A \in R^{n\times n}$，$\operatorname{rank} E = r < n$，$G(0) = 0$，$t \in M$，假设 (E, A) 正则，$G(x)$ 在包含原点的开连通域 Ω 内充分光滑，以保证满足相容初始条件 $Ex(0) = Ex^0$ 的解在 Ω 内存在且惟一。并且，假设式(7)无脉冲轨线存在。

定理 4 假设式(7)的线性近似式(4)的零解是 E-渐近稳定的且存在常数 F，满足

1) $\displaystyle\lim_{\|Ex\| \to 0} \frac{\|G(x)\|}{\|Ex\|} = 0$,

2) $\|Ax(t)\| \leqslant F\|Ex(t)\|$,

则广义非线性离散系统式(7)的平衡态 $x=0$ 是渐近稳定的。

证　明　因为 $(E-A)$ 正则，则式(4) 的零解是 E- 渐近稳定的，从而(4)的平衡态是李雅普诺夫意义下渐近稳定的。对于 n 阶正定阵 $W=I$，存在 n 阶正定阵 V 满足李雅普诺夫方程[3]

$$A^TVA-E^TVE=-E^TE,$$

取式(7)的广义李雅普诺夫函数

$$v(Ex(t))=(Ex(t))^T(VEx(t)),$$

则

$$\begin{aligned}&\Delta v(Ex(t))=\\&v(Ex(t+1))-v(Ex(t))=\\&(Ex(t+1))^T(VEx(t+1))-\\&(Ex(t))^T(VEx(t))=\\&(Ax(t)+G(x(t)))^TV(Ax(t)+Gx(t))-\\&(Ex(t))^T(VEx(t))-\\&(Ex(t))^T(Ex(t))+\\&2(Ax(t))^TVG(x(t))+\\&(G(x(t)))^TV(G(x(t)))\leqslant\\&-(Ex(t))^T(Ex(t))+\\&2F\|Ex(t)\|\lambda_M(V)\|G(x(t))\|+\\&\lambda_M(V)\|Gx(t)\|^2。\end{aligned}$$

由条件 1)可知取 $\varepsilon=\min\left\{(4F\lambda_M(V))^{-1},\frac{1}{4}\right\}$，存在 $\delta>0$，当 $\|Ex(t)\|<\delta$ 时，有 $\|G(x)\|\leqslant\varepsilon\|Ex\|$，从而，有 $\Delta v(Ex(t))|_{(7)}\leqslant-\frac{1}{4}\|Ex(t)\|^2$，即 $\Delta V(Ex(t))|_{(7)}$ 是一个负定函数。故 $\lim\limits_{t\to\infty}Ex(t)=0$ 即式(7) 的零解 $x=0$ 是 E- 渐近稳定的。下证 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。事实上，由于 (E,A) 正则，从而存在可逆阵 Q,P，使

$$QEP=\begin{bmatrix}I_1&0\\0&0\end{bmatrix},QAP=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&I_2\end{bmatrix}。$$

A_1 为 $r\times r$ 矩阵。I_1,I_2 分别为 $r\times r,(n-r)\times(n-r)$ 阶单位阵。令 $x=PZ$，则式(7)受限等价于

$$\begin{cases}z_1(t+1)=A_1z_1(t)+G_1(x),\\0=z_2+G_2(x)。\end{cases}\tag{8}$$

其中 z_1,z_2 分别为 $r,n-r$ 维状态分量

$$Z(t)=\begin{bmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{bmatrix}=P^{-1}x,\begin{bmatrix}G_1(x)\\G_2(x)\end{bmatrix}=QG(x)。$$

注意到 $QEx(t)=QEPZ(t)=\begin{bmatrix}z_1(t)\\0\end{bmatrix}$，故 $\lim\limits_{t\to\infty}z_1(t)=0$ 此外，由 $z_2=-G_2(x)=-(0,1)\begin{bmatrix}G_1(x)\\G_2(x)\end{bmatrix}=-(0,1)QG(x)$，因为 $\lim\limits_{t\to\infty}Ex(t)=0$，故 $\lim\limits_{t\to\infty}G(x)=0$，从而 $\lim\limits_{t\to\infty}Z(t)=0$，由此得 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

这说明式(7) 的平衡态 $x(t)=0$ 是李雅普诺夫意义下渐近稳定的。

定理 5　假设离散线性近似的广义系统式(4)的广义特征方程 $\det(\lambda E-A)=0$ 具有模大于 1 的特征根，且对于所有的特征根 $\lambda_i,\lambda_j,\lambda_i\lambda_j\neq1$ 满足

1) $\lim\limits_{\|Ex\|\to0}\dfrac{\|G(x)\|}{\|Ex\|}=0$。

2) $\|Ax(t)\|\leqslant F\|Ex(t)\|$。

由此，广义非线性离散系统式(7)的零解 $x=0$ 不是 E- 稳定的，从而不是李雅普诺夫意义下稳定的。

证　明　若式(7)的解有脉冲行为，则其零解不稳定，假设式(7)的解无脉冲，因而知对于任意给定的关于 Ex 的正定矩阵 W。比如，$W=I$，存在不是常正的对称阵 V，使得

$$A^TVA-E^TVE=-E^TE。$$

取式(7)的广义李雅普诺夫函数 $v(Ex(t))=(Ex(t))^TV(Ex(t))$，则

$$\begin{aligned}&\Delta v(Ex(t))|_{(7)}=\\&(v(Ex(t+1))-v(Ex(t)))|_{(7)}=\\&(Ax(t)+G(x(t)))^TV(Ax(t)+\\&GX(t))-(Ex(t))^T(VEx(t))=-\\&(Ex(t))^T(Ex(t))+2(Ax(t))^TVG(x)+\\&(G(x))^TV(G(x))\leqslant-\\&(Ex(t))^T(Ex(t))+\\&2\lambda_M(V)F\|G(x(t))\|+\\&\lambda_M\|G(x(t))\|^2。\end{aligned}$$

仿定理 4 的证明可证 $\Delta v(Ex(t))$ 是常负的，由定理 2 可知式(7) 的零解是非 E- 稳定的，从而可知式(7)的零解是不稳定的(李雅普诺夫意义下)。

参考文献：

[1]　张庆灵，戴冠中，徐心和，等. 离散广义系统稳定性分析与控制的 Lyapunov 方法[J]. 自动化学报，1998，4(5)：622-629.

[2]　梁家荣，应益荣. 离散广义线性系统的稳定性分析[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，1999，27(4)：17-21.

[3]　WUN H S, MIUKAMI K. Lyapunov stability theory and robust control of uncertain descriptor systems[J]. Int J of Systems Sci, 1995, 26(10): 1 981-1 991.

(下转第 202 页)

[3] XIE J, KAR A. Mathematical modeling of melting during laser materials processing[J]. J APPL Phys, 1997, 81(7): 3 015-3 022.

[4] HU C, BAKER T N. Investigation of temperature field developed by a spinning beam in laser processing[J]. Metallurgical and Materials Transaction A, 1996, 27A: 4 039-4 047.

[5] CHANDE T, MAZUMDER J. Two-dimensional transient model for mass transport in laser surface alloying[J]. J APPL Phys, 1985, 57(6): 2 226-2 232.

(编 辑 曾大刚)

The numerical simulation of temperature fields of laser molten pool

LIU Zhen-xia[1], HUANG Wei-dong, YANG Sen, LIU Jian-rui

(State Key Laboratory of Solidification Processing, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Based on symmetry of the circular light spot of the laser, a two dimensional numerical simulation of temperature fields of laser molten pool has been developed. The point-source model is used to deduce the boundary condition, and SIMPLE method is used to do the calculation. Under the condition that the precision is assured, the calculation has been simplified (compared with three-dimensional model). The comparison between the calculation results and the experimental results indicates that the temperature fields information of the longitudinal section along the scanning trace of the laser molten pool got by this method is coincident with the experiment and useful to predict the microstructure.

Key words: laser molten pool; temperature fields; point source model; boundary condition

(上接第191页)

[4] 刘永清,宋中昆. 大型动力系统的理论与应用(卷1)[M]. 广州:华南工学院出版社,1988,7-35.

[5] 田秀恭. 李雅普诺夫方程 $A^TBA - B = W$ 解矩阵方式[J]. 天津商学院学报,1991,11(2):30-41.

(编 辑 曾大刚)

The stability to singular nonlear discrete systems

LIANG Jia-rong[1], SHANG Li-qun[2], SHANG Li-jun[3]

(1. Department of Computer, Guangxi University, Nanning 530004, China; 2. Department of Automation, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China; 3. Department of Basic Clinical, the Fourth Military Medical University, Xi'an 710032, China)

Abstract: The method of singular Lyapunov's function is employed to study the singular nonlinear discrete systems, the theorem of stability and the theorem of no stability on it are given. Besides these, the conditions of stability and condition of no stability are presented for a class singular nonlinear discrete systems to be linearized.

Key words: singular nonlinear discrete systems; stability; lyapunov's function