花布逆流平洗的数学分析

王印生

（上海第一印染厂）

自从活性染料大量应用于棉布印花以来，由于未固着的染料较多，如何提高平洗机的洗涤效率和防止沾污白地，就成为生产中的一项课题。对此已有一些高效洗涤的措施，目前采用较广泛的是逆流（倒流水）平洗机。为了进一步提高逆流平洗机的效率，掌握生产参数，现从数学方面试做以下的分析和探讨。

一、洗涤过程中的因素及简单模式

1. 洗涤过程

织物洗涤是印染加工生产中最基本、最频繁的工序之一，但又是一个被了解得很不够的过程。这是因为不仅洗涤加工的对象，如织物品种、染料性能、花纹大小、色泽浓淡及糊料厚薄等大有不同，同时影响洗涤效率的因素如水量多少、温度高低、时间长短及轧余率大小等又有很多变化。而且更重要的原因是因为水洗通常总不是在平衡状态下进行的，例如在大批量连续洗涤时，由于水槽中染料的积聚，常常要中途停台换水，这说明洗涤过程难以达到平衡状态。要达到平衡，只有经过很长时间，直至水槽中染料浓度不再增加，但这一平衡浓度显然对洗涤十分不利，应该尽量避免。事实上，我们总是自觉或不自觉地尽量利用不平衡状况来进行洗涤加工的。凡此种种，就构成了洗涤过程的复杂性，很难进行严格的研究分析。为了把问题放在一个力所能及的实际基础上，以下我们把在一定的短暂的时间间隔（譬如说若干秒）内的洗涤过程，当作是处于平衡状态，来对若干影响洗涤过程的因素加以分析研究。

2. 平洗机的简单模式

在普通平洗机水槽中，清水的加入和污水的排出，都是每槽单独完成，互不相关。为了叙述上的方便，我们称它为“分流”，以区别于逆流平洗。兹假定逆流平洗机中，清水仅仅在最后一槽加入，逐槽倒流到最前一槽排出，各槽连成整体。无论是分流或逆流平洗，对洗涤时的工艺条件和水槽轧辊轧余率，都当作相同；对轧点前所淋清水与布上污水的交换，都不予考虑。由于这些假定与实际情况有一定的差别，而又比较简单，故称之为“简单模式”，下面的分析就是以这种简单模式为出发点的。

二、洗涤方程的推导

可以说，对于任何过程的认识，总是随着参变量之间的函数关系的建立而深化的，如果我们能找出洗涤过程中有关因素间的方程，必有助于掌握它的规律。

1. 符号规定

符号规定如下：

流水量 w——单位时间间隔内加入或排出水量的公斤数；

轧 余 率W——经轧水后每公斤织物所带水量的公斤数；

染料浓度 C——水槽中每公斤污水所含染料的克数；

吸 附 量 G——指每公斤织物上所带染料浮色的克数；

时间单位Δt——指以若干秒为时间间隔的一个单位。

2. 基本假设

生产实践表明，织物上染料浮色越多，洗下的染料就越多，水槽中染料浓度就越高，而水里的染料浓度愈高，回到织物上去的染料也就愈多。根据这一事实，可以设想织物吸附染料量G与水槽染料浓度C之间，存在着简单的比例关系，我们设：

$$G=A\cdot C \qquad (1)$$

这就是我们的基本假设。其中A是比例系数，因与织物对染料浮色的吸附性能直接有关，故称A为"吸色系数"。

3. 基本方程推导

花布在n槽逆流平洗机上洗涤时（织物从第1槽通向第n槽，水从第n槽流向第1槽），当织物的线速度为v（米/秒）、单位长度的重量为u（公斤/米）时，则在Δt秒时间内通过任一水槽的织物重量为$u\cdot v\cdot \Delta t$（公斤）。对于其中第r槽来说：

由布匹从前槽（第$r-1$槽）带进的浮色量为$uv\Delta t\cdot G_{r-1}$（克）；

由布上污水从前槽带进的染料量为$uv\Delta t\cdot WC_{r-1}$（克）；

由后槽（第$r+1$槽）倒流水带进的染料量为wC_{r+1}（克）；

另一方面：

由布匹带出的浮色量是$uv\Delta t\cdot G_r$（克）；

由布上污水带出的染料量是$uv\Delta t\cdot WC_r$（克）；

由倒流水带出的染料量是wC_r（克）。

既然在一个单位时间间隔内把洗涤过程作为平衡过程看待，那末第r槽中就不应有染料的增减，即如下式所示，染料的进量和出量应该相等：

$$(uv\Delta t)\cdot G_r+(uv\Delta t)\cdot WC_r+wC_r =(uv\Delta t)\cdot G_{r-1}+(uv\Delta t)\cdot WC_{r-1}+wC_{r+1} \qquad (2)$$

其中Δt为待定的单位时间间隔。

我们之所以不用1秒钟而用Δt秒钟作时间间隔单位，目的在于简化方程。简化条件是：

$$u\cdot v\cdot \Delta t=1（公斤织物） \qquad (3)$$

由于u、v在每一实例中皆属已知，故相应的Δt即可确定。例如：对于每30米重5公斤的织物品种，当洗涤加工线速度为每分钟60米时，即可算得：

$$\Delta t=1/u\cdot v=1/\left(\frac{5}{30}\right)\cdot\left(\frac{60}{60}\right)=6（秒）$$

所以在此例中就以每6秒作为时间间隔单位，与此相应，用6秒钟的流水量作为w的数值。

式(2)以$uv\Delta t=1$代入后，就成为：

$$G_r+WC_r+wC_r=G_{r-1}+WC_{r-1}+wC_{r+1}$$

再将式(1)代入，可得方程：

$$(A+W+w)C_r =(A+W)C_{r-1}+wC_{r+1} \qquad (4)$$

应该注意的是，由于以式(3)为简化条件，故该方程中的A和W都要后缀"公斤水"的单位名称，否则容易产生因次（或量纲）上不能成立的错觉。

现在再定义一个简单的函数关系：

$$F=w/(A+W) \qquad (5)$$

并命名F为"稀释率"。同样考虑到有简化条件式(3)的存在，故F只是一个数值。我们知道，洗涤过程中用水量越大，污水可稀释得越淡，对洗涤越有利，而清水的稀释效果是要受染料吸附和轧余率的约束或限制的。显然，染料吸附作用愈强，轧辊轧余率愈大，就需要用更多的水量，即更大程度的稀释，方可取得满意的洗涤效果。式(5)就是这一概

互制约的关系的数学语言表达式。所以，函数F实际上是对水量效能的一种量度，这就是我们把F称为稀释率的原因。F值与洗涤过程的密切关系，自属不言而喻。希望F能大些为好。

合并式(4)与式(5)，即得到：

$$(1+F)C_r=C_{r-1}+FC_{r+1},\quad 1\leqslant r\leqslant n \qquad (6)$$

这就是最后导出的洗涤过程的基本方程。它具有十分简洁的数学形式，在它的基础上，为我们进一步讨论洗涤效率提供了可能性。

式(6)之所以视作基本方程，还在于它的普遍性。它虽然是从逆流平洗过程中推导出来的，但考虑到逆流与分流唯一的区别仅仅在于：逆流第r槽浓度与第$r+1$槽有关，而分流第r槽浓度与第$r+1$槽完全无关。因此，只要去掉式中FC_{r+1}这一项，此时的方程就适用于分流平洗过程了。换句话说，分流平洗是洗涤基本方程式(6)在$C_{r+1}=0$时的特殊形式。

三、洗涤效率表达式

1. 逆流洗涤效率表达式

从基本方程出发，不难求得各不同槽数的逆流平洗机的洗涤效率的表达式，下面先讨论各种情况：

(1) 一槽水洗　相当于$n=r=1$，此时基本方程(6)相应地成为：

$$(1+F)C_1=C_0+FC_2$$

这里必须弄清C_2的含义。因为既然只有一格水槽，那就没有第二槽倒流过来的水，而只有加入的清水，所以这里的C_2实际上是代表清水浓度，而清水中没有染料，故$C_{n+1}=C_2=0$，于是有：

$$C_1/C_0=1/(1+F)$$

(2) 二槽逆流　相当于$n=2$，基于上述同样理由，得知：$C_{n+1}=C_3=0$。此时基本方程相应地分别成为：

$r=1$　$(1+F)C_1=C_0+FC_2$

$r=n=2$　$(1+F)C_2=C_1+FC_3=C_1$

用消去法化简，于是有：

$$C_2/C_0=1/(1+F+F^2)。$$

(3) 三槽逆流　相当于$n=3$，同理知$C_{n+1}=C_4=0$。此时基本方程分别成为：

$r=1$　$(1+F)C_1=C_0+FC_2$

$r=2$　$(1+F)C_2=C_1+FC_3$

$r=n=3$　$(1+F)C_3=C_2+FC_4=C_2$

也用消去法逐步化简，于是有：

$$C_3/C_0=1/(1+F+F^2+F^3)$$

如此类推，并鉴于实际生产中槽数n是非常有限的数，故得到：

(4) n槽逆流普遍式

$$C_n/C_0=1/(1+F+F^2\cdots\cdots+F^n)$$
$$\equiv(F-1)/(F^{n+1}-1) \qquad (7)$$

式中的C_0可视作常量，它代表与洗前织物上原有浮色染料量相对应的水槽染料浓度。因此，比值C_n/C_0是花布经n槽逆流洗涤后，末槽浓度与洗前对应浓度之比。根据基本假设式(1)，有

$$C_n/C_0=AC_n/AC_0=G_n/G_0$$

故比值C_n/C_0也等效地表达了花布经n槽逆流洗涤后所剩留的浮色在未洗前织物上原有浮色总量中所占的比例，此比值越小，即表示剩留浮色越少，也就是洗涤效果愈高。

由于$F\nless 0$(以后在吸色系数A的物理意义中将论及)，式(7)展开式的分母部分中，$\sum_{n=1}^{n}F^n$随n增大而增大，故C_n/C_0随n增大而减小，于是得到“逆流槽数愈多，布洗得愈干净”的数学证明。

2. 分流洗涤效率表达式

前面提过，分流平洗因各槽互不相关，故$C_{n+1}=0$始终成立，于是基本方程式(6)相应地成为：

$C_r/C_{r-1}=1/(1+F)$，又因

$$C_n/C_0$$
$$=C_n/C_{n-1}\cdot C_{n-1}/C_{n-2}\cdots\cdots C_2/C_1\cdot C_1/C_0$$

故得 n 槽分流洗涤的普遍表达式为：

$$C_n/C_0=1/(1+F)^n \qquad (8)$$

显然该比值也随 n 增大而减小，从而也可得到“分流平洗槽数愈多，布洗得愈干净”的数学证明。

四、分流平洗与逆流平洗效果比较

无论从式(7)或式(8)所引出的水槽越多洗涤效果越好的论断，都在人们普通常识范围之内，如果停留在这样的水平上，可说并未获得什么新的认识。故重要的是如何对它们二者的洗涤效果来分一分高低。下面就从概念和数量两方面来进行尝试。

1．当槽数 n 及总流量 w 相同时，哪一种洗涤方式的效率高？

按“简单模式”的描述，此时逆流平洗机各槽的流量皆为 w，而分流平洗机各槽的流量则为 w/n，根据稀释率的定义式(5)，应以 F/n 代替式(8)中原来的 F，分流的效率方程遂成为：

$$C_n/C_0=1/\left(1+\frac{F}{n}\right)^n \qquad (8')$$

利用式(7)和式(8′)，立即得到下列不等式：

$$\text{比值}=\frac{\text{分流 } G_n}{\text{逆流 } G_n}=\frac{\text{分流 } C_n}{\text{逆流 } C_n}$$

$$=\frac{1+F+F^2\cdots\cdots+F^n}{(1+F/n)^n}>1,\ n>1.$$

这个不等式之所以成立，是由于分子部分任一项的系数皆为1，而分母部分展开式中通项 F^r 的系数

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\cdot\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

只有当 $r=1$ 时才是1，而在 $1<r\leqslant n$ 范围内皆 <1 的缘故。

由于上列比值是布经 n 槽洗涤后剩留浮色量之比，比值 >1，就表示分流洗比逆流洗留在布上的染料多，也就表明逆流洗的效果比分流平洗高。

2．当总流量 w 相同时，逆流平洗的效果比分流高多少？

具体地说，就是问：要达到譬如10槽普通分流平洗的效果，当总水量一样时，逆流平洗需要几槽？

令 y 为逆流所需的槽数，则式(7)应改写成：

$$C_y/C_0=1/(1+F+F^2\cdots\cdots+F^y)$$
$$\equiv(F-1)/(F^{y+1}-1)$$

而对应于10槽普通分流平洗的式(8)应改写成：

$$C_{10}/C_0=1/(1+F/10)^{10}$$

题意要求 $C_{10}/C_0=C_y/C_0$，于是这一命题就成为下列方程的对 y 求解：

$$(1+F/10)^{10}=(F^{y+1}-1)/(F-1)$$

显然，y 的解是 F 的函数，当稀释率 F 取不同数值时，y 值也不同，即逆流所需的槽数随稀释率不同而异。兹将 F 取不同数值时所算得的 y 数值列举如下：

表1 逆流分流洗涤效果比较

稀释率 F	对应的数值方程	近似解 y	相当10槽分流洗效果的逆流槽数
1	$(1.1)^{10}=1+y$	1.60	2
2	$(1.2)^{10}=2^{1+y}-1$	1.86	2
3	$2(1.3)^{10}=3^{1+y}-1$	2.05	3
4	$3(1.4)^{10}=4^{1+y}-1$	2.23	3
10	$9(2)^{10}=10^{1+y}-1$	2.96	3
20	$19(3)^{10}=20^{y+1}-1$	3.65	4
30	$29(4)^{10}=30^{y+1}-1$	4.07	5
10^4	$(10^3)^{10}\approx10^{4y}$	7.50	8

这里的 F 值是任意取的，但由于对一项规律的揭示，并不取决于选用数值的方式，而取决于规律本身内在的必然性，所以即使我们的 F 值是任意的，仍可说明问题。

从表中首末两列可以看出：稀释率 F 越小，逆流的相对效率越高；反之，F 越大，逆流的相对效果就下降。按式(5)的定义并结合实际生产来说，就是在水量不足、水槽轧辊轧液效能不良及染料又难洗等不利条件

下，逆流平洗相对洗涤效率的提高格外显著，可以成倍甚至多倍地提高。反之，当洗涤条件有利时，由于分流平洗本身效果的提高，遂使两种洗涤方式之间的差距缩小。不过，如末行数字所示，即使在$F=10^4$的极端情况下，也只要8槽逆流就可相当于10槽分流的效果，仍可提高约25%。这些就是从数学分析所得的定量概念。

五、吸色系数A的物理意义

出现于作为基本假设式(1)中的系数A，是体现染料在织物上和在水溶液中的分配比例的一个数值。实际生产中的一项事实是，布上所谓“浮色”与水槽中的所谓“落色”总是同时存在。因此在数值上，$A\leqslant 0$没有实际意义，应予排除，只有$A>0$才是现实的。原因何在，有必要作进一步的讨论。

按式(1)，$C=1$时，$G=A$，这就是说系数A意味着织物在单位浓度染料溶液中的吸附量。或从另一角度说，系数A意味着染料在单位浓度时上染织物的染色量。前一说法着眼于织物的吸附作用，后一说法则着眼于染料的直接性(俗称“亲和力”，但非严格的热力学含义)。对于任一具体的织物-染料系统而言，似乎没有染料的直接性，就无织物的吸附可言；反过来，似乎没有织物的吸附，也就无染料的直接性可言。因此不妨说，吸附与直接性这二者是同一事物、同一过程的二个方面，有相同的物理含义，只是说法不同而已。事实上可予等量齐观，皆以A作为量度，故称A为吸色系数。

基于这一观点，于是首先可引出的推论是：吸色系数A是染料的固有属性，与洗涤方式无关。亦即每一染料各有其一定的A值的变化规律，而不以生产设备为转移。

1. 系数A的取值范围

现在再来讨论吸色系数A可能采取什么样的数值，就更容易理解了。首先，$A<0$，相当于染料的亲和力为负，这是难以想象的。其次，$A=0$，相当于亲和力为零，织物上的染料浮色既很容易洗净，而洗下来的染料又不会再被织物吸附，显然这是一种特殊情形，只有理论上的存在。因为在这种特殊情形下，吸色系数A就从洗涤方程中消失了，这时的方程虽仍维持原有的形式(注意并未使方程的形式变得更简单些)，但方程中只剩下两个自变量(例如浓度C和流量w等)，无形中就回避了由染料的存在所引起的洗涤问题的实质，而且很容易把洗涤问题仅仅归结为一个所谓“流动比”$F=w/W$($\because A=0$时，$F=w/(A+W)=w/W$)的大小问题，从而会得出片面的结论。所以说，$A=0$及与之相应的方程是谈不上什么实用价值的。

最后，唯有$A>0$才与实践相符，因这相当于亲和力为正值，A越大，吸附作用越大，织物对染料的吸附越多，也越牢，花布经前一槽带往后槽去的浮色就越多，需要更多的水槽才能洗净，这就是通常所说的“难洗”。而且，正因为织物往后带的染料浮色多，势必象实际生产中所常见的那样，造成平洗机自前到后几乎大部或全部水槽的洗液浓度都很高，以致严重沾污白地。这种现象表明，染料之愈难洗者愈易沾色，洗涤的难易与沾色的轻重，实质上是一回事，其程度如何，主要取决于染料的A值。这也为我们关于吸附作用与亲和力的统一性的观点提供了事实基础。

2. 系数A与轧染初液掺水率

上面对系数A的取值，只论证了它仅能存在于整个正数域内，还未给出一个上限，若能估计出一个尽可能小的A值存在域，无疑将更能结合生产实际的要求。为此，在目前尚缺乏可资利用的实测数据的情况下，只好借用有关染色的一些极其有限的经验数字，来粗略估算一下。

活性染料轧染时，由染料直接性所造成的色泽前后深浅，常用所谓“初液掺水”来纠

正。掺水量的多少因染料而异，直接性高的多掺，直接性低的少掺，兹以掺水率 α 表示：

$\alpha(\%)$＝掺水量(升)/轧槽体积(升)

掺水的目的是使轧槽中的染液开始就能达到运行中的“平衡浓度”，因此：

若“供应浓度”为 m(克/公斤水)，则“平衡浓度”为 $(1-\alpha)m$(克/公斤水)。

当轧车轧余率为 W 时，每公斤织物上就有染料 $m\cdot W$(克/公斤织物)。

这 mW 克染料可分做二部分：一部分是留存在布上的液体中的，而该液体的浓度应与平衡浓度相同，故这部分的染料量为 $(1-\alpha)mW$(克/公斤织物)。另一部分是织物所吸附的，即织物吸附染料量：

$G=mW-(1-\alpha)mW=\alpha\cdot mW$(克/公斤织物)

按基本假设式(1)，得：

$$A=G/C=\alpha mW/(1-\alpha)m=(\alpha/1-\alpha)\cdot W$$

可见用这里的估计方法，染料的吸色系数 A 可由掺水率和轧余率表出，而后两者皆随具体条件不同而异，所以说是一种粗糙的估计方法。

现将 $W=80\%$ 这种常见场合下的 A 值列如表2。

表2 吸色系数 A 与初液掺水率 α 对照

α (%)	10	20	30	40	45	50
A	0.09	0.20	0.34	0.53	0.65	0.80

按照我们的实践经验，活性染料的掺水率 α 绝大部分都在50%以下，所以染料的吸色系数存在于 $0<A<1$ 这一狭小范围之内是可能的。

六、关于沾色

活性染料对花布白地的沾污，影响到花色鲜艳度，是大家所关心的问题。对一种洗涤方式的评价，能否有效地减轻沾色，是一项重要内容。那末，同分流相比，逆流平洗能否减轻沾色，能减轻到何种程度，研究这些问题是有意义的。问题的前一半的答案是肯定的，后一半是数量问题，不易讲清，要借重运算。

1. 逆流平洗机水槽浓度的表达式

基本方程式(6)中，n 槽逆流中第 r 槽的浓度是：

$$C_r=\frac{1}{1+F}(C_{r-1}+FC_{r+1})$$

由前后相邻二槽的浓度 C_{r-1} 和 C_{r+1} 表出，但此二者都在未知之列，所以要设法消去它们。

利用边值条件 C_0＝常量，当

$r=1$ 时，得 $C_1=\frac{F-1}{F^2-1}C_0+\frac{F(F-1)}{F^2-1}C_2$;

$r=2$ 时，得 $C_2=\frac{F-1}{F^3-1}C_0+\frac{F(F^2-1)}{F^3-1}C_3$;

$r=3$ 时，得 $C_3=\frac{F-1}{F^4-1}C_0+\frac{F(F^3-1)}{F^4-1}C_4$

如此类推，可得仅含一项未知浓度的表达式：

$$C_r=\frac{F-1}{F^{r+1}-1}C_0+\frac{F(F^r-1)}{F^{r+1}-1}C_{r+1}$$

再利用边值条件 $C_{n+1}=0$，则当

$r=n$ 时，可直接得 $C_n=\frac{F-1}{F^{n+1}-1}C_0$;

$r=n-1$ 时，化简后得 $C_{n-1}=\frac{F^2-1}{F^{n+1}-1}C_0$;

$r=n-2$ 时，化简后得 $C_{n-2}=\frac{F^3-1}{F^{n+1}-1}C_0$;

$r=n-3$ 时，化简后得 $C_{n-3}=\frac{F^4-1}{F^{n+1}-1}C_0$;

如此类推可得不再含未知量的表达式：

$$C_{n-r'}=\frac{F^{r'+1}-1}{F^{n+1}-1}C_0$$

最后，对附标 $n-r'$ 及 $r'+1$ 进行变换处理，立刻得出逆流平洗第 r 槽浓度普遍表达式：

$$C_r=\frac{F^{n-r+1}-1}{F^{n+1}-1}C_0. \qquad (9)$$

2. 分流平洗机水槽浓度的表达式

以总流量w相同为前提，分流平洗每槽流量为w/n，故按方程式(8)分流平洗第r槽浓度普遍表达式为：

$$C_r=C_0/(1+F/n)^r=\frac{n^r}{(n+F)^r}C_0 \qquad (8'')$$

3. 两种洗涤方式对比

根据基本假设式(1)、及水槽浓度表达式(8″)、(9)，两种洗涤方式所造成的沾色量之比为：

$$\frac{\text{分流}\,G_n}{\text{逆流}\,G_n}=\frac{\text{分流}\,C_n}{\text{逆流}\,C_n}=\frac{n^r\cdot(F^{n+1}-1)}{(n+F)^r\cdot(F^{n-r+1}-1)}$$

此比值只是稀释率F的函数。取定了F值，即可按式算出对应的比值。

兹取$n=10$，即分流和逆流皆10格水槽；取$r=1$、2、3，即10槽中的前三槽；并任意取$F=2$、10作为例子，将算出的比值列如表3。(近似值)

表3 分流与逆流平洗沾色量比较

r 值	$F=2$	$F=10$
1 (第一槽)	1.7	5
2 (第二槽)	2.8	25
3 (第三槽)	4.6	125

这些数字充分说明：

(1) 在序号相同的水槽中，分流平洗的沾色比逆流平洗重得多。

(2) 随着水槽序号的增加，两种平洗方式沾色量之间的差距迅速增大，特别是当稀释率F充分大时，这个差距几乎按几何级数扩大。这一结果，有点出乎意料。

(3) 稀释率F的大小，对沾色量比值的影响很大，F愈大，愈有利于减轻沾色。增大F值的主观手段是大水量w和低轧余率W。不过这些手段都有其实际限度，一旦达到限度，F值的大小就取决于吸色系数A了。可惜，如式(5)所示，F与A是反比关系，要F大，A就得小。然而A值小本身就决定了沾色的轻微，若再帮忙，即成多余。反之，对于易沾色的染料，即A值大者，一俟w和W达到实际限度后，要想再进一步减轻沾色，似乎就难以为力了。

总之，活性染料的沾色问题，主要取决于染料吸色系数A的大小，采用逆流平洗虽不能彻底解决，但比普通分流平洗大为有利。

七、稀释率F的实际意义

1. 洗液浓度梯度

花布逆流平洗时，在正常情况下，水槽浓度越往后越淡，任何相邻二槽之间都有一个浓度差，形成所谓“浓度梯度”。显然，水槽的浓度差对实际生产有重要关系，浓度差越大，织物上的染料浮色可被洗除得越快，反之，浓度差越小，则浮色就洗除得越慢，织物处在浓的污水中的时间就越长，也就是容易造成沾污。所以对浓度梯度分布情况的了解，实有必要。

要了解浓度差的分布，可有二种途径，其一是通常广泛采用的直接计算前后二槽浓度的方法，即利用式(9)求出相邻两槽的浓度之差或浓度之比。

浓度之差：

$$C_r-C_{r-1}=F^{n-r}/(1+F+F^2\cdots\cdots+F^n)$$

浓度之比：

$$C_{r-1}/C_r=(F^{n-r}-1)/(F^{n-r+1}-1)$$

这种方法的优点是直观性强，符合于习惯要求，但从所列二式可以看出，无论是差值或比值，皆与水槽序号r(位置)有关，计算繁冗，难以引出明晰的概念。

另一方法就是这里要提出的，从连续三槽的两个浓度差之比来考察的方法，为此，要新定义一个称为“浓度的梯度比”$\varDelta$的函数。

2. 洗液浓度的梯度比Δ

定义：

$$\Delta=(C_{r-1}-C_r)/(C_r-C_{r+1}) \quad (10)$$

目的是先使任何两个相接的浓度差建立起关系，而后再去研究它。可以理解，生产实践中不仅希望水槽的浓度差要大，而且希望水槽浓度迅速趋向零，因为这对洗涤才更加有利，浓度的梯度比Δ所反映的正是这种情况，较单纯的浓度差具有更积极的意义，这就是我们的出发点。

就其含意而言，浓度的梯度比要比浓度梯度本身来得复杂，但有趣的是，若将基本方程式(6)改写成F的显函数，即

$$F=(C_{r-1}-C_r)/(C_r-C_{r+1})$$

它与定义式(10)完全相同，可见

$$F=\Delta \quad (11)$$

亦即我们一举得出："任何相连三槽浓度的梯度比Δ与洗涤过程中的稀释率F相等"这一简单明了而十分重要的结果。此结果之所以重要，在于它明确了F作为水量效果的一种量度，所指的就是Δ，即在于它赋予稀释率F以新的涵义，使我们在考虑水量的稀释效能和浓度差的分布情况时，有统一的依据。因此可以认为，选定了F值，实质上就决定了洗涤过程的效果。于是，如何选用F值就成为如何结合生产实践的关键所在。

3. F值的选择

究竟如何选择F值呢？这需要解决两个问题：一是F值的控制的可能性，二是以什么数值为宜。

先讨论第一个问题。回忆前面第五节中的讨论，我们论证了吸色系数$A>0$，而且流水量w和轧余率W皆>0，故$F=w/(A+W)>0$成立。我们还估计出吸色系数可能的存在域是开域(0，1)这一小范围，而w与W这二个参数又全在掌握之中，所以控制的可能性问题其实已经解决了。

至于第二个问题，即F值的选择，当然应以其对水槽浓度分布到底有何具体影响为依据。为了弄清这种影响，现将由式(9)及式(10)所求得的理论数据制成C-r曲线图（图1)。图中，横座标为水槽序号r，以$r=n=10$为终点；纵座标为水槽浓度C，以$C=C_0$为极点。这些曲线(实线曲线)显示了不同的F值对水槽浓度分布的影响。

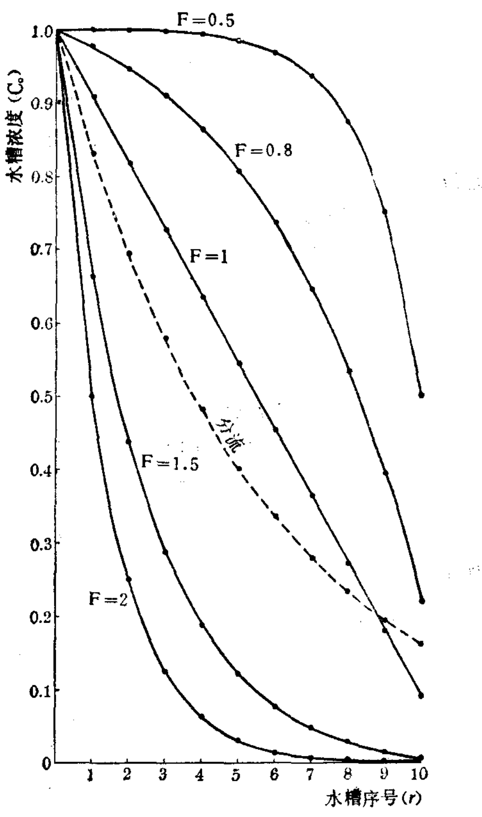

图1 水洗槽浓度序号曲线图(C-r曲线图)

按照各根C-r曲线不同的斜率变化的方式，可分为三组：①$F<1$者为一组，这组曲线的趋向具有先缓降后陡降的共同特征；②$F>1$者为另一组，其共同特征是先陡降后缓降；③处于这二组之间而成为分界线者，是$F=1$的唯一的一条斜率不变的直线。

结合实际情况说，这些特征的意义是：F愈小，平洗机前段水槽的浮色浓度愈高，而且处于高浓度的槽数也愈多，这当然对洗涤不利，所以我们不应该选择$F<1$。F愈大，则前段水槽的浓度迅速下降，使许多水

槽都处于较低浓度中，这对洗涤显然有利，所以对稀释率的选择应以$F>1$为前提。不过F值要大。首先意味着水量w要大，但水量一大，势必要增加热能的供应和消耗，故不能不有所限制。正如曲线所示，对F值的选择，实质上就是对洗涤过程所遵循的路径的选择，选择$F=2$或3是比较适宜的，所以选择问题也解决了。

4．应用实例

现在我们可以最后对这些数学表达式如何应用于实际生产作一介绍，即设想一个例子来作综合说明。假定织物品种与式(3)的实例相同，则取$\Delta t=6$秒。若染料的直接性比较大，则取$A=0.5$。若水槽轧辊轧余率不太理想，就假设$W=100\%$。若希望洗涤过程要按照$F=2$时的C-r曲线所示的路径进行，以作为既经济又有效的最佳选择，那末：

$$w=F\cdot(A+W)=2\times(0.5+100\%)=3(\text{公斤水})$$

所以我们在逆流末槽加入的清水，应该是每6秒钟加3公斤，即保持每分钟的流量为30公斤即可。总之，应用方法很简单。

这30公斤/分的水量，孤立起来看似乎很大，但对同样是10槽的分流平洗而言，每槽流量实际上只有它的1/10，即$w=30/10=3$公斤/分，这不能不算是相当苛刻的条件。在这一条件下，即分流的稀释率只是逆流的1/10，利用式$(8'')$求出各槽浓度并绘成虚曲线，以与$F=2$时逆流平洗的相应C-r曲线对照，则无论在水槽浓度或趋零速度上，都有很大差距。所以逆流平洗在洗涤效能、减轻沾色、节约水量及热能消耗等各方面，都比分流平洗优越得多。

八、结束语

以上的分析比较，是在平洗机的简单模式的基础上进行的，故不可避免地导致对分流平洗方式的估价比实际低些，对逆流方式的估价比实际高些。但从所得的若干结果来看，逆流平洗的简单模式具有明显的优越性，足可作为设备设计和生产技术操作上的借鉴。

为了推导洗涤方程，通过基本假设引进了一个作为染料属性的吸色系数A，定义了一个量度水量效能的稀释率F，藉以揭示洗涤规律。但F由A派生而来，所以只有A才是根本。可惜我们对染料的A值甚少了解，只能作一点粗糙的推测，以供参考而已。不过生产实际中有这样的现象，即温度变化会或多或少地改变染料的直接性，所以必有一个体现其变化规律的函数$A=A(T)$存在。若能求得这个函数，就可把温度T引入洗涤方程，而目前因为尚未掌握它，所以作为洗涤过程中的重要因素之一的温度，没有在方程中出现，以及由此而来的局限性，就在所难免了。

注：本文经陶乃杰同志提供有益意见，谨致谢意。