

用协变反常法研究类 RN 黑洞的霍金辐射*

刘雄伟, 曾晓雄, 杨树政

(西华师范大学 理论物理研究所, 四川 南充 637002)

摘要:利用协变反常取消法研究一种类 RN 黑洞的霍金辐射. 结果表明, 为了在量子水平上保持有效场的广义协变性和规范不变性, 类 RN 黑洞的出射波的电荷总通量和能量总通量必须与一个具有相应化学势和霍金温度的(1+1)维黑体辐射的总通量相等. 该结论支持了 Robinson 等人的观点, 同时又使其在静态条件下得到了扩展.

关键词:黑洞; 规范反常; 引力反常; 霍金辐射

中图分类号:P 145.8 **文献标识码:**A **文章编号:**0258-7971(2008)03-0256-05

1974 年 Hawking 证明了黑洞并非全黑, 而是能够从其视界处向外辐射粒子^[1], 这是量子力学和广义相对论相结合的成果, 是时空量子化进程的一个关键环节, 因此研究霍金辐射具有十分重要的意义. 至今为止已经有许多计算霍金辐射的方法, 其中 Hawking 的方法^[1]最直接也最符合实际物理过程, 但是他要依赖于一些假设和猜想; 弦论方法在逻辑上能够自洽但是在形式上又过于复杂, 并且适用范围窄; 等等, 总之是各有优势和不足. 近年来, 国内外的学者考虑到辐射粒子的反作用, 对霍金纯热谱进行了修正, 取得了不少成果^[2~5]. 2005 年 Robinson 和 Wilczek 提出了通过消除视界处的反常来计算霍金辐射的新方法^[6], 与共形反常方法^[7]不同的是, Robinson 和 Wilczek 利用了有效场理论在视界处的规范反常和引力反常. 这种方法有许多优点: ① 它把反常的源头定位在视界附近区域内(视界处的几何是非奇异的), 使方程得到了简化; ② 它与膜模型中的有效场理论相联系; ③ 由于反常是量子场论的一个基本性质, 其有效性是值得信赖的. 因此, 这种方法最近被广泛的推广, 并取得了一系列成果^[8~18].

2006 年 Satoshi Iso 等人应用 Robinson 和 Wilczek 的方法讨论了 RN 黑洞的反常和霍金辐射^[8], 在本文中我们将对 Satoshi Iso 等人的工作进行推广, 讨论一个类 RN 黑洞的霍金辐射和反常. 与 Satoshi Iso 等人的方法不同的是, 他们对规范反常和引力反常的讨论都是以自洽反常和协变反常为基础, 而我们则直接从协变反常方程出发, 使概念更清晰、计算更简洁. 结果表明, 为了在量子水平上保持广义协变性和规范不变性, 带电静态球对称黑洞的出射波的电荷总通量和能量总通量必须与一个具有相应化学势和霍金温度的(1+1)维黑体辐射的总通量相等. 该结果支持了 Robinson 等人的观点, 同时又使其在静态情况下得到了扩展.

1 类 RN 黑洞的霍金辐射和视界处的量子反常

类 RN 型黑洞的时空线元为^[19]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\sigma Q^4}{5r^6} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\sigma Q^4}{5r^6} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1)$$

* 收稿日期: 2007-09-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10773008).

作者简介: 刘雄伟(1976-), 男, 四川人, 硕士生, 主要从事宇宙论和黑洞物理方面的研究.

通讯作者: 杨树政(1955-), 男, 四川人, 博士, 教授, 主要从事引力理论和黑洞方面的研究.

与这个黑洞相应的电磁势 $A_\mu = (A_t(r), 0, 0, 0)$, 其中^[20]

$$A_t(r) = -\frac{Q}{r} + \frac{2\sigma Q^3}{5r^5}. \quad (2)$$

令 $f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\sigma Q^4}{5r^6}$, 则线元(1)可以简写为

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{(d-2)}^2. \quad (3)$$

以上各式中的 m 和 Q 分别是黑洞的质量和电荷, σ 是 1 个实参量, 当 $\sigma = 0$ 时, 此黑洞的时空线元将退化为 RN 黑洞的情形. De Lorenci 等人已证明^[19], $\sigma Q^4/5r^6$ 项与 Q^2/r^2 项有相同的数量级, 因而其影响是不可忽视的. 根据视界面方程和无限红移面方程可知该黑洞的事件视界 r_H 和无限红移面重合, 事件视界 r_H 由方程 $f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\sigma Q^4}{5r^6} = 0$ 确定.

首先我们说明在这个时空背景中的标量场理论可以被降为等效的二维标量场理论, 标量场的作用量为

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \phi \nabla^2 \phi = \frac{1}{2} \int d^D x r^{D-2} \sqrt{\gamma} \phi \left(-\frac{1}{f} \partial_t^2 + \frac{1}{r^{D-2}} \partial_r r^{D-2} f \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \right) \phi. \quad (4)$$

其中 γ 是 $d\Omega_{D-2}^2$ 的行列式, Δ_Ω 是角度部分的积分. 在进行波函数退偶和乌龟坐标变换后, 将上式取极限 $r \rightarrow r_H$ 并忽略次要项后, 作用量变为

$$S[\phi] = \frac{r_H^{D-2}}{2} \int d^D x \sqrt{\gamma} \phi \left(-\frac{1}{f} \partial_t^2 + \partial_r f \partial_r \right) \phi = \sum_n \frac{r_H^{D-2}}{2} \int dt dr \phi_n \left(-\frac{1}{f} \partial_t^2 + \partial_r f \partial_r \right) \phi_n. \quad (5)$$

(5) 式表明 (3+1) 维类 RN 黑洞的标量场作用量可表示为二维线元 $ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2$ 的标量场的无穷集合, 因此我们将标量场理论在视界附近从 (3+1) 维降到了二维, 从而建立起有效二维标量场理论.

有效二维标量场理论是手征理论, 如果我们在视界处忽略入射模以便在其外部区域得到有效作用量, 就将出现规范和引力反常. 然而潜在的理论是广义协变的, 因此, 这些反常必须被那些与经典无关而被忽略了入射模的量子效应所消除, 在消除反常的过程中会引进额外的流. 接下来我们将说明, 这个额外引进的流正好与霍金辐射流相符合.

1.1 规范反常和霍金辐射 在这一部分我们将首先讨论在视界处的规范反常, 再将其与霍金辐射作一比较. 有效理论的定义域是 $r \in [r_H, \infty]$, 如果我们在视界 r_H 附近忽略了入射模, 入射模数和出射模数不相等, 规范流就会在这里出现反常. 协变形式的二维规范反常方程^[8] 如下所示

$$\nabla_\mu \tilde{J}^\mu = \pm \frac{e^2}{4\pi \sqrt{-g}} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (6)$$

式中 \tilde{J}^μ 为协变规范流, $+$ ($-$) 分别对应于左(右)手场, 是一个反对称张量, 其中 $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$, $F^{\mu\nu}$ 为电磁张量. 在视界外附近区域 $[r_H, r_H + \epsilon]$ 内对方程积分得

$$\tilde{J}_{(H)}^r = a_H + \frac{e^2}{2\pi} [A_t(r) - A_t(r_H)], \quad (7)$$

其中 a_H 是积分常数. 在视界外区域 $[r_H + \epsilon, \infty]$ 内不存在反常, \tilde{J}^μ 守恒, 满足 $\partial_\mu \tilde{J}^\mu = 0$, 解得

$$\tilde{J}_{(o)}^r = a_o, \quad (8)$$

a_o 是积分常数. 为了确定 a_H 和 a_o 的关系, 我们引入阶跃函数, 将规范流写为 2 项之和

$$\tilde{J}^\mu = \tilde{J}_{(o)}^\mu \Theta_H(r) + \tilde{J}_{(H)}^\mu H(r). \quad (9)$$

其中 $\Theta_H(r) = \Theta(r - r_H - \epsilon)$, $H(r) = 1 - \Theta_H(r)$. 因此, Ward 恒等式可写成如下形式

$$\partial_\mu \tilde{J}^\mu = \partial_r \left[\frac{e^2}{2\pi} A_t(r) H(r) \right] + \left[\tilde{J}_o^r - \tilde{J}_H^r + \frac{e^2}{2\pi} A_t(r) \right] \delta(r - r_H - \epsilon). \quad (10)$$

为了保持规范不变性, 等式右边应等于零, 而右边第 1 项会被入射模的量子效应所消除, 因此 δ 函数的系

数应为零,结合(7),(8)式可解得

$$a_o = a_H - \frac{e^2}{2\pi} A_t(r_H). \quad (11)$$

利用规范流在视界处的边界条件,由(7)式知 $a_H = 0$,于是可得

$$a_o = -\frac{e^2}{2\pi} A_t(r_H) = \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{Q}{r_H} - \frac{2\sigma Q^3}{5r_H^5} \right) = \tilde{J}_{(o)}. \quad (12)$$

这样,通过消除视界处的规范反常,我们引入了一个流 a_o .

接着再来计算霍金辐射的规范流,为方便讨论,我们只考虑费米子的辐射情况.在计算黑洞的纯热辐射时可将其当作理想的黑体来处理,温度为 T 的黑体辐射的费米普朗克分布为

$$N^{(\pm)}(\omega) = \frac{1}{e^{(\omega \pm \omega_0)/T} + 1}. \quad (13)$$

其中化学势能 $\omega_0 = -eA_t(r_H) = e \left(\frac{Q}{r_H} - \frac{2\sigma Q^3}{5r_H^5} \right)$,相应的霍金辐射规范流为

$$J^r = e \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} [N^{(-)}(\omega) - N^{(+)}(\omega)] = \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{Q}{r_H} - \frac{2\sigma Q^3}{5r_H^5} \right). \quad (14)$$

(12)和(14)结果一致.前者是通过反常得到的,而后者是黑洞热力学的结果,因此可以说,由黑洞热力学推出的流消除了视界处的规范反常.也就是说,我们可以通过计算黑洞的规范反常而得到它的霍金辐射.

1.2 引力反常和霍金辐射 在这一部分我们先讨论视界处的引力反常,再将其与霍金辐射能动张量流作一比较.如果我们忽略入射模的量子效应,微分同胚对称被破坏,有效理论就会在视界处出现引力反常.协变形式的引力反常方程^[8]如下

$$\nabla_\mu \tilde{T}_\nu^\mu = \frac{1}{96\pi \sqrt{-g}} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\mu R = \tilde{A}_\nu. \quad (15)$$

因为黑洞带电荷,时空存在电场,因此相应的反常 Ward 恒等式为

$$\nabla_\mu \tilde{T}_\nu^\mu = F_{\nu\alpha} \tilde{J}^\alpha + \tilde{A}_\nu. \quad (16)$$

对于线元(1),协变反常(15)是类时的($\tilde{A}_r = 0$), $\tilde{A}_t = \partial_r \tilde{N}_t^r$,其中

$$\tilde{N}_t^r = \frac{\left[ff'' - \frac{(f')^2}{2} \right]}{96\pi}. \quad (17)$$

在视界附近区域 $[r_H, r_H + \epsilon]$ 内,Ward 恒等式的 $v = t$ 分量为

$$\partial_r \tilde{T}_{t(H)}^r = F_{r\alpha} \tilde{J}_{(H)}^\alpha + \partial_r \tilde{N}_t^r. \quad (18)$$

在视界外部区域 $[r_H + \epsilon, \infty]$ 内,由于不存在反常,Ward 恒等式变为

$$\partial_r \tilde{T}_{t(o)}^r = F_{r\alpha} \tilde{J}_{(o)}^\alpha. \quad (19)$$

利用已知条件,对(18),(19)式积分得

$$\tilde{T}_{t(H)}^r = b_H + a_o [A_t(r) - A_t(r_H)] + \frac{e^2}{4\pi} [A_t^2(r) - A_t^2(r_H)] + [\tilde{N}_t^r(r) - \tilde{N}_t^r(r_H)], \quad (20)$$

$$\tilde{T}_{t(o)}^r = b_o + a_o A_t(r). \quad (21)$$

其中 b_H 和 b_o 为积分常数.为了确定 b_H 和 b_o 的关系,引入阶跃函数将能动张量写成 2 项之和 $\tilde{T}_\nu^\mu = \tilde{T}_{\nu(o)}^\mu \Theta_H(r) + \tilde{T}_{\nu(H)}^\mu H(r)$,变换后得到

$$\partial_r \tilde{T}_t^r = a_o \partial_r A_t(r) + \partial_r \left[\frac{e^2}{4\pi} A_t^2(r) + \tilde{N}_t^r(r) \right] H(r) + \left[\tilde{T}_{t(o)}^r - \tilde{T}_{t(H)}^r + \frac{e^2}{4\pi} A_t^2(r) + \tilde{N}_t^r(r) \right] \delta(r - r_H - \epsilon). \quad (22)$$

该式右边第 1 项是黑洞电荷的电场效应,考虑到视界面处的量子效应,第 2 项消除,为了在视界处保持广义协变性, δ 函数的系数项应为零,于是我们可以得到

$$b_o = b_H + \frac{e^2}{4\pi} A_t^2(r_H) - \tilde{N}_t^r(r_H). \quad (23)$$

利用协变流在视界处的边界条件,由式(20)可得积分常数 $b_H = 0$,再将条件 $f(r_H) = 0$ 代入(17)式得 $\tilde{N}_t^r(r_H) = -\frac{(f')^2|_{r_H}}{192\pi}$,利用黑洞表面引力方程得 $\kappa = 2\pi T = \frac{(f')|_{r_H}}{2}$ 得 $\tilde{N}_t^r(r_H) = -\frac{\pi}{12} T^2$,于是可将(23)式化为

$$b_o = \frac{e^2}{4\pi} A_t^2(r_H) + \frac{\pi}{12} T^2 = \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{Q}{r_H} - \frac{2\sigma Q^3}{5r_H^5} \right)^2 + \frac{\pi}{12} T^2. \quad (24)$$

根据(13)式,霍金辐射能动张量流为

$$T_t^r = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega [N^{(-)}(\omega) + N^{(+)}(\omega)] = \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{Q}{r_H} - \frac{2\sigma Q^3}{5r_H^5} \right)^2 + \frac{\pi}{12} T^2. \quad (25)$$

显然,(24)与(25)结果一致,前者是通过消除视界处的引力反常而引进的,后者是黑洞热力学的结果,因此可以说,由黑洞热力学得到的能动张量流消除了视界处的引力反常.也就是说,我们可以通过计算黑洞的引力反常而得到霍金辐射.

2 讨论

计算霍金辐射的方法很多,也各有优点和不足,本文采用最近国际上流行的一种新方法,用反常方法研究了一个类 RN 黑洞的霍金辐射.文中我们从(1+1)维有效理论下的协变反常方程出发,通过计算得到视界处的有效作用量,然后利用规范和协变条件在视界处引入一个流来消除反常,结果表明,我们所引入的流就正好是一个具有相应化学势和霍金温度的(1+1)维黑体的辐射流.

量子场论中的反常是经典作用量的对称和量子化的矛盾^[21].现在已经证明可以从反常的角度研究一些黑洞的辐射问题,反常在黑洞研究中的应用必将促进我们对黑洞的更深入和全面地理解.与其它一些方法相比,利用反常方法计算静态黑洞的霍金辐射只需要计算视界附近的规范流或能动张量流,将该方法应用动态情况还需要进一步地研究.另外,黑洞熵也是近年的热门课题,如果能将反常方法应用到熵的研究上,将是十分有意义的.

参考文献:

- [1] HAWKING S W. Particle creation by black holes[J]. Commun Math Phys, 1975, 43: 199-220.
- [2] YANG Shu-zheng, CHEN De-you. A new method to study Hawking radiation of charged particle from stationary axisymmetric Sen black hole[J]. Chin Phys Lett, 2007, 24(1): 39-41.
- [3] YANG Shu-zheng, CHEN De-you. Charged particle tunnels from the slowly varying Reissner-Nordström black hole[J]. Chin Phys Lett, 2007, 24(6): 1 479-1 481.
- [4] 张靖仪, 赵峥. 静质量不为零的粒子的量子隧穿辐射[J]. 物理学报, 2006, 7: 3 796-3 798.
- [5] ZHOU Wei, ZHU Jian-yang. Decay of spin-1/2 field around Reissner-Nordstrom black hole[J]. Int J Mod Phys, 2004, D13: 1105-1118. arXiv: gr-qc/0309071.
- [6] ROBISON S P, WILCZEK F. Relationship between hawking radiation and gravitational anomalies[J]. Phys Rev Lett, 2005, 95: 011313. arXiv: gr-qc/0502074v3.
- [7] CHRISTENEN S, FULLING S. Trace anomalies and the Hawking effect[J]. Phys Rev D, 1977, 15: 2 088-2 091.
- [8] ISO S, UMETSU H, WILCZEK F. Hawking radiation from charged black holes via gauge and gravitational anomalies[J]. Phys Rev Lett, 2006, 96: 151302. arXiv: hep-th/0602146.
- [9] MURATA K, SODA J. Hawking radiation from rotating black holes and gravitational anomalies[J]. Phys Rev D, 2006, 74: 044018. arXiv: hep-th/0606069.
- [10] XU Zhi-bo, CHEN Bin. Hawking radiation from general kerr-(anti) de Sitter black holes[J]. Phys Rev D, 2007, 75:

024042. arXiv: hep-th/0612261.

- [11] ISO S, MORITA T, UMETSU H. Quantum anomalies at horizon and hawking radiations in myers-perry black holes[J]. JHEP, 2007, 0704, 068. arXiv: hep-th/0612286.
- [12] JIANG Qing-quan, WU Shuang-qing. Hawking radiation from rotating black holes in anti-de sitter spaces via gauge and gravitational anomalies[J]. Phys Lett B, 2007, 647: 200-206. arXiv: hep-th/0701002.
- [13] JIANG Qing-quan, WU Shuang-qing, CAI Xu. Hawking radiation from dilatonic black holes via anomalies[J]. Phys Rev D, 2007, 75, 064029. arXiv: hep-th/0701235.
- [14] XIAO Kui, LIU Wen-biao, ZHANG Hong-bao. Anomalies of the Achucarro-Ortiz black hole[J]. Phys Lett B, 2007, 647, 482. arXiv: hep-th/0702199.
- [15] PENG Jun-jin, WU Shuang-qing. Hawking radiation from the Schwarzschild black hole with a global monopole via gravitational anomaly[J]. arXiv: 0705. 1225v3 [hep-th].
- [16] JIANG Qing-quan. Hawking radiation from black holes in de Sitter spaces[J]. arXiv: 0705. 2068 [hep-th].
- [17] WU Shuang-qing, PENG Jun-jin. Anomalies and Hawking radiation from the Reissner-Nordström black hole with a global monopole[J]. arXiv: 0706. 0983 [hep-th].
- [18] BANERJEE R, KULKARNI S. Hawking radiation and covariant anomalies[J]. arXiv: 0707. 2449 [hep-th].
- [19] DE LORENCI V A, FIGUEIREDO N, FLICHE H H. Dyadosphere bending of light[J]. A&A, 2001, 369: 690-693.
- [20] 王晓霞, 杨树正. 一个球对称荷电黑洞的量子隧穿辐射特征[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2006, 28(5): 415-417.
- [21] BERTLMANN R. It anomalies in quantum field theory[M]. London: Oxford Science Publications, 2000.

Hawking radiation from a RN-like black hole via covariance anomalies

LIU Xiong-wei, ZENG Xiao-xiong, YANG Shu-zheng

(Institute of Theoretical Physics, China West Normal University, Nanchong 637002, China)

Abstract: Using the method of anomaly cancellation to a RN-like black hole, it shows that in order to hold general covariance and gauge invariance at quantum level the total flux of charge and energy-momentum in each outgoing partial wave of a charged quantum field in this black hole must be equal to that of a $(1+1)$ -dimensional blackbody at Hawking temperature with the appropriate potential, which supports Robinson and Wilczek's opinion.

Key words: black hole; gauge anomaly; gravitational anomaly; hawking radiation

* * * * *

·简讯·

我校张克勤等 21 人被授予“云南省高等学校教学、科研带头人”称号

近日,从云南省教育厅获悉,我校张克勤等 21 人经省专家组考核,达到云南省高等学校教学、科研带头人培养目标,被授予“云南省高等学校教学、科研带头人”称号,他们是:张克勤教授、董云川教授、李生森教授、甘淑教授、吕宛青教授、张力教授、戴本忠教授、李建平教授、杨临宏教授、牛晓帆教授、罗美娟教授、张学杰教授、谢崇伟教授、陈建华教授、李文均研究员、黄泽教授、曹秋娥教授、梁虹教授、李兵教授、郭建斌教授、许毅副教授。

(摘自云南大学校园网)