2001年4月
第31卷第2期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Apr. 2001
Vol. 31 No. 2

# 变分不等式问题的遗传解法

曹建荣[1],邢志栋[1],曾云辉[2]

(1.西北大学 数学系,陕西 西安 710069; 2.山东省计算中心,山东 济南 250100)

**摘要**:将遗传算法用于求解变分不等式的数值方法,避免了求解过程的求导运算,且为全局最优解,并给出了算法描述及数值例子。

**关 键 词**:变分不等式;遗传算法;法方程

**中图分类号**:O224 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2001)02-0093-03

遗传算法是一类借鉴生物界自然选择和自然遗传机制随机化的一种搜索算法。其主要特点在于群体搜索策略和群体个体之间的信息交流,搜索过程不依赖于梯度信息,因此是近些年来信息科学、计算科学研究的热点领域之一。Hollstien 首先将遗传算法用于纯数学问题的函数优化,Hamaifar 等人研究了用遗传算法求解约束优化问题。本文讨论这类算法在变分不等式数值求解问题中的应用。

## 1 问题和动机

设 $X$ 为 $n$ 维欧氏空间 $R^n$ 中的非空闭凸集,映射 $F:R^n \to R^n$ 为连续可微映射,标准的变分不等式问题(VIP$(X,F)$)是:求 $x \in X$,使

$$F(x)^T(y-x) \geqslant 0, \quad \forall y \in X。 \qquad (1)$$

对式(1)的求解可化为下面各种形式的等价的优化问题:

1) 基于间隙函数的鞍点算法

文献[1]提出间隙函数

$$L(x,y) = f(x) - f(y) + [F(x) - \nabla f(y)]^T(x-y),$$

其中 $f:R^n \to R$ 为下半连续的凸函数,且在 $X$ 上,$f \in C^1$。取

$$G(x) = \sup_{y \in X} L(x,y), \quad \forall x \in X。$$

$G(x)$ 为凸的约束规划。若 $X$ 为有界集,则 $G(x)$ 在 $X$ 上有限;若 $f=0$,则

$$G(x) = \sup F(x)^T(x-y), \quad \forall x \in X$$

当 $X$ 为一多面体时,$G(x)$ 为一线性规划。

2) 按文献[2]中的简单约束优化方法

若 $X = \{x \in R^n | Ax = b, x \geqslant 0\}$,则作

$$\begin{cases} \min f(x,y,z) := \| F(x) - A^T y - \\ \qquad z\|^2 + \rho_1 \| Ax - b\|^2 + \rho_2 (x^T z)^p, \\ \qquad x \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 $\rho_1, \rho_2$ 及 $p \geqslant 0$ 为常数。

若 $X = \{x \in R^n | g(x) \leqslant 0; Ax = b, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geqslant 0\}$,其中 $g_i$ 为 $C^2$ 的凸函数。则作

$$\begin{cases} \min f(x,y,z,u,v) := \\ \| F(x) + g'(x)^T y + A^T u - (v,0)' \|^2 + \\ \rho_1 \| z + g(x) \|^2 + \rho_2 \| Ax - b \|^2 + \\ \rho_3 [(y^T z)^p + (x^T v)^p]。 \\ \qquad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, z \geqslant 0, v \geqslant 0。 \end{cases}$$

其中 $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ 及 $p \geqslant 0$ 为常数;$g'(x) = (\nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \cdots, \nabla g_n(x))^T$,$(v,0)' = (v^T, 0^T)^T$。

若全局极小满足 $f(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*) = 0$,则 $x^*$ 为 VIP$(X,F)$ 的解。

3) 利用 K-K-T 方程组,构造优化目标函数,要求约束条件满足一定的约束品性,依文献[3],作无约束优化问题

$$\min_{x \in R^n, z \in R^m} M(x,z) = \frac{1}{2} \| F(x) - \nabla c(x) z \|^2 + \sum_{i=1}^{m} \Phi(c_i(x), z_i)。$$

其中 $\Phi: R^2 \to R^1$ 为 NCP 函数

$$\Phi(s,t) = \frac{1}{2}(\sqrt{s^2+t^2} - s - t),$$

**收稿日期**:1999-06-02

**基金项目**:陕西省教委专项基金资助项目(99JK096)

**作者简介**:曹建荣(1964-),女,山东潍坊人,西北大学讲师,从事逼近与优化方向研究。

$\nabla c(x) = (\nabla c_1(x), \nabla c_2(x), \cdots, \nabla c_m(x))$。

若全局极小满足 $M(x^*, x^*) = 0$，则 $x^*$ 为 VIP$(X,F)$ 的解。

2)，3) 均欲求优化问题的全局极小点，按照传统的优化方法需求得驻点，再进一步判定。

4) 基于梯度投影思想，建立投影收缩方法

取 $\beta > 0$ 为常数，构造函数 $e(u,\beta) := u - P_X(x - \beta F(u)), \forall u \in R^n$，则由变分不等式的等价关系：$u^*$ 为 VIP$(X,F)$ 的解 $\Leftrightarrow e(u^*,\beta) = 0$，可作

$$\min_{u \in X} \| e(u,\beta) \|, \tag{2}$$

若其极小值为 0，则对应的 $x^*$ 为 VIP$(X,F)$ 的解，当 $F(x)$ 为不连续函数时，目标函数 $\| e(u,\beta) \|$ 亦为不连续函数，因而求解困难。

注意到生物的进化过程是从简单的低级生物逐渐发展为复杂的高级生物，其间经过了选择、变异等一系列的过程。如果将最优化的过程视为生物的整个进化过程、将最优化问题的解空间视为若干种群，每一个可行解视为种群中一个个体，根据目标函数构造对应个体的适应函数。依照"物竞天演，适者生存"的规律，让种群模仿进化过程直至满足算法的终止准则。

## 2 算法的描述和过程

依据文献[4]，遗传算法描述如下：

```
begin
    k: = 0;
    初始化 P(k);
    计算 P(k) 的适应值;
    while(不满足停止准则)do
        begin
            k: = k + 1
            从 P(k - 1) 中选择 P(k);{复制算子}
            重组 P(k);{杂交和变异算子}
            计算 P(k) 的适应值;
        end
end
```

对应于算法的具体过程：

1) 给出可行域 $X$ 上的点的编码，每一个点的编码由一个二进制串构成。

2) 选择 $N$ 作为群体规模的参数，在 $X$ 上随机地选取 $N$ 个点 $x(i,0)(i = 1,2,\cdots,N)$，由这些点组成初始群体 $P(0) = \{x(1,0),\cdots,x(N,0)\}$。

3) 计算群体 $P(k)$ 中每个个体 $x(i,k)$ 的适应值 $F(x(i,k))$，$k$ 表示代数，适应函数 $F(x)$ 可取为

$$F(x) = \begin{cases} C_{\max} - f(x), & f(x) < C_{\max}; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

4) 计算每个个体 $x(i,k)$ 的生存概率 $p_i^k$

$$p_i^k = \frac{F(x(i,k))}{\sum_{i=1}^{N} F(x(i,k))}$$

5) 利用选择策略从群体 $P(k)$ 中选择进行繁殖的个体组成父代 $P(k+1)$，然后对 $P(k+1)$ 进行重组，杂交是以概率 $p_c$ 交换两个父代个体间对应的分量完成。杂交完成后再作用变异算子，它是以概率 $p_m$ 改变串上的每一位或某几位。

6) 停止准则。算法循环执行计算适应值、选择复制、应用杂交和变异几个步骤，直到满足某个停止准则。如找到一个能接受的解或已迭代了事先规定的代数。

## 3 计算实例

**例 1** 函数 $F_1(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1x_2 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}$，或

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 1 \\ x_2\sin x_2 \\ x_1x_2x_3 \end{pmatrix}。$$

定义域 $X_1 = \{x \in R^3 | \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \leqslant x \leqslant \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

采用鞍点算法，线性规划子问题用文献[3]中算法 11.5.2。

**例 2** $F_1(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1x_2 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}$。

定义域 $X_2 = \{x \in R^3 | \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \geqslant x_3 + 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 2 \end{pmatrix}\}$

采用简单约束优化方法。

**例 3** $F_1(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1x_2 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}$。

定义域 $X_2 = \{x \in R^3 | \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \geqslant x_3 + 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 2 \end{pmatrix}\}$。

利用 K-K-T 方程组，构造优化目标函数。

**例 4** 函数 $F_3(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 \leqslant x < 0.5; \\ 0, & x = 0.5; \\ x, & 0.5 < x \leqslant 1。 \end{cases}$

函数 $F_4(x)=$

$$
\begin{cases}
1, & x=0; \\
(x-0.6)(1.5-x), & 0<x<0.5; \\
0, & x=0.5; \\
(x-0.4)(1.5-x), & 0.5<x\leqslant 1。
\end{cases}
$$

定义域 $X_3=[0,1]$ 为一维区间。

按照式(2)，取 $\beta=1$。

利用遗传算法计算例 1 ～ 例 4，结果如表 1 所示。

**表 1　遗传算法计算结果**

**Tab. 1　The numerical solutions of examples of genetic algorithm**

| 用例 | 定义 $F$、$X$ | 杂交 $P_c$ | 步长 $q$ | 混沌量 $u'$ | 演化代数 | 精确解 $x^*$ | 近似解 $\tilde{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $F_2,X_1$ | 0.825 | 0.3 | 0.01 | 29 | $\begin{pmatrix}1\\0.5\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1.000\,002\\0.500\,000\\-1.000\,000\end{pmatrix}$ |
| 2 | $F_1,X_2$ | 0.85 | 3.0 | 0.005 | 63 | $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0.004\,570\\0.000\,782\\0.003\,558\end{pmatrix}$ |
| 3 | $F_1,X_2$ | 0.75 | 1.0 | 0.001 | 137 | $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-0.000\,484\\-0.001\,006\\-0.001\,431\end{pmatrix}$ |
| 4 | $F_4,X_3$ | 0.7 | 0.025 | 0.01 | 6 | 0.5 | 0.500 001 |
| 4 | $F_4,X_3$ | 0.7 | 2.5 | 0.01 | 2 | 0 | 0.000 000 |
| 4 | $F_3,X_3$ | 0.9 | 0.1 | 0.000 1 | 4 | 0.5 | 0.500 005 |

说明：①算法中群体规模为 $M=30$、$N=50$，即从生成的 50 个个体中选择 30 个个体进入下一代；②计算中利用混沌变量作扰动来生成新解，步长的变化可得到不同的解。

## 参考文献：


[1] AUCHMUTY G. Variational priciple for variational inequalities[J]. Numer Funct Anal & Optim, 1989, (10): 863-874.

[2] ANDREANI R, FRIEDLANDER A, MARTINEZ J M. Solution of finite-dimensionl variatinal inequalities using smooth optimation with simple bounds[J]. JOTA, 1997, 94: 635-657.

[3] 袁亚湘，孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京：科学出版社，1997.

[4] 刘　勇. 非数值并行算法——遗传算法[M]. 北京：科学出版社，1997.

[5] PENG J M. Global method for monotone variational inequality problems with inequality constraints[J]. JOTA, 1997, 95: 419-430.


（编　辑　曹大刚）

# Genetic algorithm for solving variational inequality problem


CAO Jian-rong[1], XING Zhi-dong[1], ZENG Yun-hui[2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China; 2. Shandong Calculation Centre, Jinan 250100, China)



**Abstract**: Genetic algorithm is used for numerical solution of varitional inequality. In this process operation of derivate is avoided and the solution is a global one. Here the description of this algorithim and numerical examples also are given.


**Key words**: varitional inequality; genetic algorithm; normal equation