第 18 卷第 4 期 温 州 大 学 学 报 2005 年 8 月
Vol 18, No 4 Journal of Wenzhou University Aug, 2005

利用目标函数的经验均值求解有补偿二阶段问题

许德昌[1]，王晓燕[1]，岳雪芝[2]

（1．江西理工大学机电工程学院；2．江西理工大学理学院，江西赣州 341000）

摘 要：探讨了用目标函数的经验均值代替目标函数求解有补偿二阶段问题的方法，将随机最优化问题转化为容易求解的确定性优化问题．不要求了解所涉及的随机变量的分布函数是该方法的特点．

关键词：随机最优化；二阶段问题；经验均值；收敛性

中图分类号：O221.5 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-309(2005)04-0047-09

在随机最优化领域，有补偿二阶段问题的计算方法，大多是以随机变量的分布为已知条件，进一步寻找最优决策．在实际问题中，随机变量的分布情况往往是通过从母体中抽取部分子样，通过对子样的观测值的分析对母体的分布情况进行估计，因此，在随机变量的子样基础上，来寻求随机最优化问题的最优决策，具有更强的实用性．本文主要探讨了以随机变量的子样为条件，使用目标函数的经验均值逼近法来求解有补偿二阶段问题，并分析了相关的收敛性．

一、问题描述

有补偿二阶段问题的模型为

$$\min[EC(\omega)X+EQ(X,\omega)] \quad s.t \quad DX=F \tag{1}$$

$$Q(X,\omega)=\min q(\omega)y \quad s.t \quad W(\omega)Y=b(\omega)-A(\omega)X$$

$$Y\geq 0$$

其中（$C^{/}$（ω），W（ω），b（ω），$q^{/}$（ω），A（ω））为定义在概率空间（Ω，F，P）上的 v（$v=n+m\times l+m+l+m\times n$）维随机向量，$X\in R^{n}$，$Y\in R^{l}$.

建立以下逼近问题

$$\min(1/N)\,[\sum_{i=1}^{N}C^{i}X+\sum_{i=1}^{N}Q^{i}(X)] \quad s.t \quad DX=F \tag{2}$$

$$Q^{i}(X)=\min[q^{i}Y] \quad s.t \quad W^{i}Y=b^{i}-A^{i}X \tag{3}$$

$$Y\geq 0$$

其中｛（$C^{i/}$，W^{i}，b^{i}，$q^{i/}$，A^{i}）（i=1，2，…，N)｝为维随机向量（$C^{/}$（ω），W（ω），b（ω），$q^{/}$（ω），A（ω））的子样．

收稿日期：2005-04-01

作者简介：许德昌(1969-)，男，江西赣州人，讲师，硕士，研究方向：随机最优化问题

为了分析问题（2）、（3）与问题（1）之间的关系，将问题（1）简述为

$$\min_{x\in\chi} E_\xi[h（X，\xi）] \qquad （4）$$

其中 X∈X，X 为 R^n 的子集，$\xi\in R^v$，记 H（X）= E_ξ[h（X，ξ）]，若问题（4）的最优解为 X^*，则

$$H（X^*）=\min_{x\in\chi} H（X）$$

相应于问题（4）的目标函数的经验均值的最优化问题（即问题（2））为

$$\min_{x\in\chi}（1/N）\sum_{i=1}^{N} h（X，\xi_i） \qquad （5）$$

其中 ξ_i 为 ξ 的子样，记 $H_N（X）=（1/N）\sum_{i=1}^{N} h（X，\xi_i）$，若问题（5）的最优解为 X^*_N，则

有 $H_N（X^*_N）=\min_{x\in\chi} H_N（X）$

二、HN（X*N）的收敛性

在 $\xi_1\xi_2\cdots\xi N$ 独立同分布的情况下，文献[1]得到了下列结论：

定理 1　假设存在 a>0，θ_0>0，η（·）：$R^n\to R^1$ 满足

$|h（X，\xi）|\le a\eta（\xi）$　　$E[e^{\theta\eta（\xi）}]<\infty$

其中 X∈X，$0\le\theta\le\theta_0$，$E[e^{\theta\eta（\xi）}]$为 η（ξ）的矩生成函数，则对于任意 ε>0，存在 α>0，β>0，使得

$P[|H（X^*_N）-H（X^*）|\ge\varepsilon]\le\alpha e^{-\beta N}$

以上结论表明，当 N→∞时，H（X^*_N）按指数速率以概率收敛于 H（X^*）. 然而对于问题（1），由于其目标函数的分析表达式难以写出，其矩生成函数是否有界就难以验证，因此需要证明问题（2）的收敛性.

定理 2　记 K={X：|E_ξ[h（X，ξ）]|＜∞}，假设 {ξ_i}（i=1，2，…，N）为独立同分布取自于 ξ 的子样，则对于任意 X∈K，当 N→∞时，有

$H_N（X^*_N）$以概率收敛于 H（X^*）

证明　由于 {ξ_i}（i=1，2，…，N）为独立同分布的，又由 h（X，ξ）仍为定义在概率空间（Ω，F，P）上的随机变量，所以{h（X，ξ_i）}（i=1，2，…，N）也是独立同分布的，对于任意 X∈K，辛钦大数定理的条件得到满足，因此对任意 ε＞0 有

$$\lim_{N\to\infty} P\{|（1/N）\sum_{i=1}^{N} h（X，\xi_i）-E_\xi[h（X，\xi）]|\ge\varepsilon\}=0$$

特别地有

$$\lim_{N\to\infty} P\{|H_N（X^*_N）-H（X^*_N）|\ge\varepsilon\}=0 \qquad （6）$$

$$\lim_{N\to\infty} P\{|H_N（X^*）-H（X^*）|\ge\varepsilon\}=0 \qquad （7）$$

由于 $H_N(X^*)-H_N(X^*_N)\geq 0$，$H(X^*_N)-H(X^*)\geq 0$

则 $P\{|H_N(X^*_N)-H(X^*)|\geq\varepsilon\}$

$=P\{H_N(X^*_N)-H(X^*)\geq\varepsilon\}+P\{H(X^*)-H_N(X^*_N)\geq\varepsilon\}$

$\leq P\{H_N(X^*)-H(X^*)\geq\varepsilon\}+P\{H(X^*_N)-H_N(X^*_N)\geq\varepsilon\}$

$\leq P\{|H_N(X^*)-H(X^*)|\geq\varepsilon\}+P\{|H_N(X^*_N)-H(X^*_N)|\geq\varepsilon\}$

再由（6）、（7）可得 $\lim\limits_{N\to\infty} P\{|H_N(X^*_N)-H(X^*)|\geq\varepsilon\}=0$

即 $H_N(X^*_N)$ 以概率收敛于 $H(X^*)$

定理 2 表明，当 $N\to\infty$时，问题（2）的目标函数值偏离问题（1）的目标函数值大于任意正数 ε 的概率趋近于零，既选择问题（2）的最优解在概率意义下可使问题（1）的目标函数值达到最优.

三、H（X*）的估计

由于问题（2）、（3）的求解与离散型随机变量的二阶段问题的解法相似，参考文献[2]可得，问题（2）、（3）等价于下列线性规划问题：

$$\min(1/N)\left(\sum_{i=1}^{N} C^iX+q^1Y^1+q^2Y^2+\cdots+q^NY^N\right)\qquad \text{s.t}\quad DX=F \qquad (8)$$

$A^1X+W^1Y^1=b^1$，$A^2X+W^2Y^2=b^2$，……，$A^NX+W^NY^N=b^N$

$Y^1\geq 0$，$Y^2\geq 0$，…，$Y^N\geq 0$

其中 Y^i（$i=1，2，…，N$）都是 l 维向量，因此，用一般单纯形方法便可对问题（8）求解．设所求得的最优解为（X^*_N，Y^{*1}，Y^{*2}，…，Y^{*N}），最优值为

$$H_N(X^*_N)=(1/N)\left(\sum_{i=1}^{N} C^iX^*_N+q^1Y^{*1}+q^2Y^{*2}+\cdots+q^NY^{*N}\right)$$

则由定理 2 可知，$H_N(X^*_N)$ 是 $H(X^*)$ 的点估计值.

若进一步假设，对于任意 $X\in K$，还有 $0<D_\xi[h(X,\xi)]<\infty$，则用线性逼近法解下列 N 个非线性规划问题：

$P^i(X^*_N)=\min(q^iY)^2 \qquad \text{s.t}\quad W^iY=b^i-A^iX^*_N，Y\geq 0$

其中 $i=1，2，…，N$．设所求得的最优解分别为 Y^{**1}，Y^{**2}，…，Y^{**N}，再计算

$$H^2_N(X^*_N)-(1/N)\left[\sum_{i=1}^{N}(C^iX^*_N)^2+\sum_{i=1}^{N}(q^iY^{**i})^2\right]$$

并令其为 S^2．对于大样本 N，由于 $[H_N(X^*_N)-H(X^*)]/(S/\sqrt{N})$ 近似服从正态分布，因此给定显著性水平 α，从正态分布表查得 $Z_{\alpha/2}$ 后，便可得到 $H(X^*)$ 的置信区间为 $[H_N(X^*_N)-Z_{\alpha/2}(S/\sqrt{N})，H_N(X^*_N)+Z_{\alpha/2}(S/\sqrt{N})]$

四、结束语

本文探讨了已知随机变量的子样的条件下，用使用目标函数的经验均值逼近法来求解有补偿二阶段问题，该方法将随机最优化问题转化为容易编程实现的确定性优化问题，在实际问题中，随着对随机变量的子样观察数据的增加，问题（8）的规模将按线性方式增大，这时线性规划的求解可以选用文献[3]介绍的方法来解，该方法将最优解的搜索限制在完美基可行解集合中．由于该方法不要求了解所涉及的随机变量的分布函数，所以在实际问题中容易得到应用．

参考文献

[1] Dai L, Chen C H, Barge J R. Convergence Properties of Two-Stage Stochastic Programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 106(3): 489-509

[2] 王金德. 随机规划[M]. 南京: 南京大学出版社, 1990

[3] Wets R. Solving stochastic programs with simple recourse [J]. Stochastic, 1983, (10): 112-114

Solving Two-stage Stochastic Programming with Recourse in the Objective Function's Empirical Mean

XU Dechang[1], WANG Xiaoyan[1], YUE Xuezi[2]

(1. Faculty of Mechanical and Electronic Engineering; 2. Faculty of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou, China 341000)

Abstract: This paper discuses a method for two-stage stochastic programming with recourse in which the objective function is replaced by its empirical means. This method converts a stochastic optimization problem into a deterministic one for which many methods are available. The advantage of the method is that there is no requirement on the distribution of the random variables involved.

Key words: Stochastic optimization; Two-stage problem; Empirical means; Convergence property