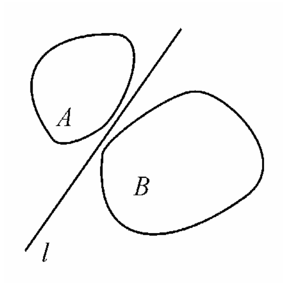
第 14 讲　凸集的隔离定理

教学目的
介绍凸集的隔离定理及其应用。
授课要点
1、　超平面的分析表达。
2、　Minkowski 泛函的定义及属性。
3、　一般隔离定理的证明。
4、　紧凸集的严格隔离定理。
5、　Helly 的第一、第二矩量定理。

凸集的隔离定理又称为 Hahn－Banach 定理的几何形式，它在规划论，控制论与 Banach 空间几何理论上有重要的应用。

首先让我们考虑平面上的情况，

设 A, B 是平面 R^2 上两个不相交凸集，则一定可以用一条直线将二者隔离开来，即存在直线 $l: ax_1 + bx_2 = c$，使得对于 A 中的每个点 (x_1, x_2)，$ax_1 + bx_2 \le c$，对于 B 中每个点 (x_1, x_2)，$ax_1 + bx_2 \ge c$.（见图）



对于一般线性空间中的凸集，我们有理由提出类似的问题. 但是有两个更基本的问题需要解决：用什么将一般线性空间的凸集隔开？怎样才算将两个凸集隔开？

定义 1　设 X 是线性空间，$E \subset X$ 是某个集合.

（1）　称 E 是线性流形，若 $E = x_0 + M$，其中 $x_0 \in X$，M 是 X 的某个线性子空间.

（2） 称 E 是 X 的极大真子空间，若对于 X 的任一线性子空间 M，当 $E \subset M$，$E \neq M$ 时，$M = X$.

（3） 称 E 为 X 的超平面，若 $E = x_0 + M$，其中 $x_0 \in X$，M 是 X 的极大真子空间.

X 上的线性泛函全体记为 X'（X' 中元不必连续），显然就点集的包含关系来讲，$X^* \subset X'$. 有时称 X' 为 X 的代数共轭，称 X^* 为 X 的拓扑共轭.

定理 1 （1）E 是 X 的极大真子空间当且仅当存在 $f \in X'$，$f \neq 0$，$E = N(f)$，$N(f)$ 是 f 的 0 空间.

（2）E 是 X 的超平面当且仅当存在 $f \in X'$，$f \neq 0$，$E = \{x; f(x) = c\}$，其中 c 是某个常数.

证明 1° 若 $f \in X'$，$f \neq 0$，考虑子空间 $N(f) = \{x; f(x) = 0\}$，若 W 是线性子空间并且 $N(f) \subset W, N(f) \neq W$，取 $x_0 \in W \setminus N(f)$，显然 $f(x_0) \neq 0$。$\forall\ x \in X$，令 $y = x - \dfrac{f(x)}{f(x_0)} x_0$，则 $f(y) = 0$，$y \in N(f)$，$x = y + \dfrac{f(x)}{f(x_0)} x_0$，从而 $X = \operatorname{span}\{x_0, N(f)\} \subset W$，即 $W = X$. $N(f)$ 是极大真子空间.

反之，若 E 是极大真子空间，取 $x_0 \notin E$，则 $X = \operatorname{span}\{x_0, E\}$. $\forall\ x \in X$，$x = x_1 + a x_0$，其中 $x_1 \in E$，$a \in \Phi$，此表达式是唯一的. 定义 $f(x) = a$，若 $x = x_1 + a x_0$，显然 $E = N(f)$.

2° 若 E 是超平面，则 $E = x_0 + M$，W 是极大真子空间，由 1°，

存在 $f \in X'$，$f \neq 0$，$W = N(f)$，从而 $x \in E$ 当且仅当 $f(x) = f(x_0) = c$ 或 $E = \{x; f(x) = c\}$，

若 $E = \{x; f(x) = c\}$，$f \in X'$，$f \neq 0$，任取 $x_0 \in E$，则 $f(x_0) = c$，令 $y = x - x_0$，则 $f(y) = 0$．由 1°，$N(f)$ 是极大真子空间，$E = x_0 + N(f)$，E 是超平面.

定理 2 设 X 是线性赋范空间，$E \subset X$ 是极大真子空间，$f \in X'$，$f \neq 0$，E 与 f 的关系如同定理 1，则

（1） E 是闭的当且仅当 $f \in X^*$，

（2） E 是闭的当且仅当 E 不在 X 中稠密.

证明 由于 $E = N(f)$，全部结论可由本章第 1 讲定理 1 得出.

通常称实空间 X 的子集在超平面 $E = \{x; f(x) = a\}$ 的一侧，若 $A \subset \{x; f(x) \leq a\}$ 或 $A \subset \{x; f(x) \geq a\}$，称两个子集 A, B 被超平面 E 隔离，若 A, B 分属于 E 的两侧，称 A, B 被 E 严格隔离，若 $A \subset \{x; f(x) < a\}$，$B \subset \{x; f(x) > a\}$ 或者相反.

前面在证明 Hahn－Banach 延拓定理时，我们事先假定 X 上存在某个正齐性次可加泛函。现在为了证明凸集的隔离定理，我们将要从满足一定条件的凸集上产生出这种泛函来.

定理 3 设 X 是线性赋范空间，$A \subset X$ 是以 0 为内点的凸集，定义 $\mu_A(x) = \inf\{t > 0; x \in tA\}$，则

（1） μ_A在整个 X 上有定义；

（2） 若 $t \geq 0$，$\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$，$\forall x \in X$；

（3） $\mu_A(x+y) = \mu_A(x) + \mu_A(y)$，$\forall x, y \in X$；

（4） $\{x; \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x; \mu_A(x) \leq 1\}$．若 A 是开集，则

$$A = \{x; \mu_A(x) < 1\}.$$

（1),（2),（3）说明 μ_A 是 X 上的正齐性次可加泛函．我们称 μ_A 是集合 A 的 Minowski 泛函．

证明 1° 对于每个 $x \in X$，$\dfrac{x}{n} \to 0$，A° 是 $0 \in X$ 的领域，故存在 $n_0, \dfrac{x}{n_0} A^\circ \subset A$，即 $x \in n_0 A$，所以集合 $\{r > 0; x \in rA\} \neq \varnothing$，$\mu_A(x)$ 有意义．

2° 由于 $x \in rA$ 当且仅当 $tx \in trA$，故

$$t\mu_A(x) = t\inf\{r; x \in rA\} = \inf\{tr; x \in rA\}$$

$$= \inf\{tr; tx \in trA\} = \mu_A(tx).$$

3° 设 $r, s > 0$, 若 $x \in rA$，$y \in sA$，即 $\dfrac{x}{r} \in A$，$\dfrac{y}{s} \in A$，A 是凸集，故 $\dfrac{x+y}{r+s} = \dfrac{r}{r+s} \bullet \dfrac{x}{r} + \dfrac{s}{r+s} \bullet \dfrac{y}{s} \in A$，即 $x + y \in (r+s)A$．从而 $\mu_A(x+y) \leq r+s$，r 与 s 是任意的．故 $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

4° 由 μ_A 的定义容易得到（4）中包含关系成立．例如若 $\mu_A(x) < 1$，则存在 r，$0 < r < 1$，$x \in rA$ 或 $\dfrac{x}{r} \in A$，A 是凸集，$0 \in A$，

从而 $x=(1-r)0+r\bullet\dfrac{x}{r}\in A$，故 $\{x;\mu_A(x)<1\}\subset A$. 现在设 A 是开集，若 $x\in A$，一定有 $\varepsilon>0$ 使得 $(1+\varepsilon)x\in A$ 或 $x\in\dfrac{1}{1+\varepsilon}A$，从而 $\mu_A(x)\le\dfrac{1}{1+\varepsilon}<1$，故 $A\subset\{x;\mu_A(x)<1\}$. 于是 $A=\{x;\mu_A(x)<1\}$.

定理 4 设 X 是（实或复）线性赋范空间，A,B 是 X 中的非空凸集，$A^\circ\ne\varnothing$，$A^\circ\cap B=\varnothing$. 则存在非零线性泛函 $f\in X^*$ 和实数 r 使得

$$A\subset\{x;\operatorname{Re}f(x)\le r\},\quad B\subset\{x;\operatorname{Re}f(x)\ge r\}$$

其中 $\operatorname{Re}f(x)$ 表示 $f(x)$ 的实部.

证 明 不妨设 $0\in A^\circ$，因为若 f,r 满足上面条件，则 $\forall x_0\in X$

$$x_0+A\subset\{x;\operatorname{Re}f(x)\le\operatorname{Re}f(x_0)+r\},$$

$$x_0+B\subset\{x;\operatorname{Re}f(x)\ge\operatorname{Re}f(x_0)+r\}.$$

特别地取 $x_0\in A^\circ$ 并且考虑 $A-x_0$，则至多改变 r 的值，结论仍然成立.

我们只须就实空间的情况证明之，因为由第 16 讲定理 2 前面的说明，复空间上的一个实泛函决定了唯一的复泛函并且成为它的实部，此时复泛函连续当且仅当它的实部连续.

现在考虑集合 $C=A^\circ+x_0-B$，其中 $x_0\in B$，则 C 是开凸集并且由于 $A^\circ\ne\varnothing$，$0\in C$. 此外 $x_0\notin C$，否则 $0\in A^\circ-B$ 从而得出 $A^\circ\cap B=\varnothing$，与假设矛盾.

设 μ_C 是集合 C 的 Minkowski 泛函. 由定理 3，μ_C 是在整个空间 X 上有定义的次可加正齐性泛函，并且 $C=\{x;\mu_C(x)<1\}$，由于 $x_0\notin C$，故 $\mu_C(x_0)\ge 1$.

考虑子空间$M=\left\{tx_0;t\in R\right\}$和$M$上的非零线性泛函$f_0\left(tx_0\right)=t$，当$t\geq 0$时

$$f_0\left(tx_0\right)=t\leq t\mu_C\left(x_0\right)=\mu_C\left(tx_0\right),$$

当$t\leq 0$时，由于$\mu_C\left(tx_0\right)\geq 0$，显然$f_0\left(tx_0\right)=t\leq\mu_C\left(tx_0\right)$，根据定理 1，存在$X$上线性泛函$f$，$f$是$f_0$的延拓，并且$f\left(x\right)\leq\mu_C\left(x\right)$，

f是连续的，实际上当$x\in C$时，$f\left(x\right)\leq\mu_C\left(x\right)<1$，若$x\in C\bigcap\left(-C\right)$，同样有$-f\left(x\right)\leq\mu_C\left(-x\right)<1$，从而

$$-1<-\mu_C\left(-x\right)\leq f\left(x\right)\leq\mu_C\left(x\right)<1,\quad\forall x\in C\bigcap\left(-C\right)$$

注意$C\bigcap\left(-C\right)$具有非空内点，故f连续，又由$x_0\in M$知道$f\left(x_0\right)=f_0\left(x_0\right)=1$.

现在$\forall x\in A^\circ$，$y\in B$，则$x+x_0-y\in C$从而

$$f\left(x+x_0-y\right)\leq\mu_C\left(x+x_0-y\right)\leq 1,\quad f\left(x\right)\leq f\left(y\right)$$

记$r=\sup\limits_{x\in A}f\left(x\right)$，则$f\left(x\right)\leq r$，$\forall x\in A^\circ$；同时$r\leq f\left(y\right)$，$\forall\ y\in B$.

由于$A^\circ\subset\left\{x;f\left(x\right)\leq r\right\}$并且后者是闭集，故$\overline{A^\circ}\subset\left\{x;f\left(x\right)\leq r\right\}$，但对于凸集而言，$\overline{A^\circ}=\overline{A}$，故$A\subset\left\{x;f\left(x\right)\leq r\right\}$.

定理 5　设X是（实或复）线性赋范空间，A,B是X中的非空凸集，$A\bigcap B=\varnothing$，若A是紧集，B是闭集，则存在$f\in X^*$，实数r_1,r_2，$r_1<r_2$，使得

$$A\subset\left\{x;f\left(x\right)\leq r_1\right\},\quad B\subset\left\{x;\mathrm{Re}\,f\left(x\right)\geq r_2\right\}.$$

证 明　同样的，只须对于实空间证明结论成立.

我们已经知道此时$a=d\left(A,B\right)=\inf\limits_{x\in A,y\in B}d\left(x,y\right)>0$，于是$A+O\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$为开凸集并且$\left(A+O\left(0,\dfrac{a}{2}\right)\right)\bigcap B=\varnothing$. 根据上面定理 4，存在连续线性泛函$f$和$r_2\in R$，使得

$$A+O\left(0,\frac{a}{2}\right)\subset\left\{x;f\left(x\right)\le r_2\right\},\quad B\subset\left\{x;f\left(x\right)\ge r_2\right\}.$$

注意 A 是紧集，f 连续，故 f 在 A 上可达到上确界. 不妨设 $x_0\in A$，$f\left(x_0\right)=\sup\limits_{x\in A}f\left(x\right)=r_1$，由于 f 不是 0 泛函，于是 f 在 $O\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上不可能全取 0 值。不失一般性，设有 $x'\in O\left(0,\frac{a}{2}\right)$，$f\left(x'\right)>0$，则 $x_0+x'\in A+O\left(0,\frac{a}{2}\right)$，从而

$$\sup_{x\in A}f\left(x\right)=r_1<r_1+f\left(x_0\right)=f\left(x_0+x'\right)\le r_2,$$

定理得证.

最后，作为 Hahn－Banach 定理和隔离定理的应用，让我们看一下 Helly 第一和第二矩量定理.

定理 6（Helly） 设 X 是线性赋范空间，$\left\{x_n\right\}\subset X$ 是一列元素，$a_n\in\Phi$，$\beta>0$. 则存在 $f\in X^*$ 满足 $\|f\|\le\beta$，$f\left(x_n\right)=a_n$（$\forall n\ge1$）的充要条件是

$$\left|\sum_{i=1}^{n}k_i a_i\right|\le\beta\left\|\sum_{i=1}^{n}k_i x_i\right\|,\quad k_i\in\Phi,\quad n\ge1 \qquad (1)$$

证 明 1° 若满足所说条件的 $f\in X^*$ 存在，则

$$\left|\sum_{i=1}^{n}k_i a_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}k_i f\left(x_i\right)\right|\le\|f\|\left\|\sum_{i=1}^{n}k_i x_i\right\|$$

$$\le\beta\left\|\sum_{i=1}^{n}k_i x_i\right\|,\quad \forall n,k_i\in\Phi$$

2° 若所说的不等式成立，设 $E=\mathrm{span}\left\{x_n,n\ge1\right\}$，令

$$f_0\left(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i\text{，}\quad \forall x=\sum_{i=1}^{n} k_i x_i$$

这里$\{x_n\}$未必是线性无关的，但若另有$\forall x=\sum_{i=1}^{n} k_i' x_i'$，则$(1)$表明

$$\left|\sum_{i=1}^{n} k_i a_i-\sum_{i=1}^{n} k_i' a_i'\right|\le \beta\left\|\sum_{i=1}^{n} k_i x_i-\sum_{i=1}^{n} k_i' x_i'\right\|=0\text{，}$$

由此知道，$f_0(x)$有确定的意义，此外显然$\|f_0\|\le\beta$.

由保范延拓定理，存在$f\in X^*$，$\|f\|=\|f_0\|\le\beta$，在E上

$f(x)=f_0(x)=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i$，特别地$f(x_n)=a_n$，$\forall n\ge 1$.

定理证毕.

定理 7（Helly） 设X是 Banach 空间，$f_1,\cdots,f_n\in X^*$，$M>0$，$c_1,\cdots,c_n\in\Phi$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in X$使得$\|x_\varepsilon\|\le M+\varepsilon$，$f_i(x_\varepsilon)=c_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 的充要条件是

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right|\le M\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\|\text{，}\quad \forall\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\Phi \qquad (2)$$

证明 必要性 若$\forall\varepsilon>0$，x_ε存在，即$\|x_\varepsilon\|\le M+\varepsilon$，$f_i(x_\varepsilon)=c_i\ (i=1,\cdots,n)$，则$\forall\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\Phi$，

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x_\varepsilon)\right|\le\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\|\|x_\varepsilon\|.$$

ε是任意的，故有$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right|\le M\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\|$.

充分性 不妨设$f_1,\cdots,f_n$彼此线性无关，否则考虑其中的最大线性无关组$f_1,\cdots,f_m$，当对于后者证明了定理的结论时，根据线性相关性的条件，结论对于整个$f_1,\cdots,f_n$ 也一定成立. 此外我们仅就X为实

空间的情况进行证明，对于复空间，只须作细节上的修正.

考虑映射$T:X\to R^n$，$T(x)=\left(f_1(x),\cdots,f_n(x)\right),x\in X$，容易验证$T$是有界线性算子。$T$是到上的，实际上，$T(x)$是$R^n$的线性子空间，若$\dim T(x)<n$，则存在不全为 0 的$n$个数$a_1,\cdots,a_n$，$\sum_{i=1}^{n}a_i f_i(x)=0$，$\forall x\in X$，于是$\sum_{i=1}^{n}a_i f_i=0$。这与$f_1,\cdots,f_n$ 线性无关性矛盾.

X,R^n都是 Banach 空间，于是T是开映射.

$\forall\varepsilon>0$，记$E_\varepsilon=\{x;\|x\|\le M+\varepsilon\}$，则$E_\varepsilon^0=\{x;\|x\|<M+\varepsilon\}$是$0\in X$的领域，于是$T\left(E_\varepsilon^0\right)$是$0\in R^n$的领域，即$0\in R^n$是$T\left(E_\varepsilon\right)$的内点．若不存在$x_\varepsilon\in E_\varepsilon$，使得$f_i\left(x_\varepsilon\right)=c_i\quad(i=1,\cdots,n)$，即$c=\left(c_1,\cdots,c_n\right)\notin T\left(E_\varepsilon\right)$，注意到$T\left(E_\varepsilon\right)$是$R^n$中的凸集，由隔离定理（定理 4）存在$R^n$上的连续线性实泛函$F$和实数$r>0$，使得

$$F(Tx)\le r,\quad \forall x\in E_\varepsilon,\quad F(c)>r.$$

不妨设$F(y)=b_1y_1+\cdots+b_ny_n$，$\forall\left(y_1,\cdots,y_n\right)\in R^n$，其中$b_1,\cdots,b_n\in R$，则$F(Tx)=\sum_{i=1}^{n}b_i f_i(x)$. 注意$x\in E_\varepsilon$当且仅当$-x\in E_\varepsilon$，故必有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_i f_i(x)\right|=\left\|F(Tx)\right\|\le r,$$

于是

$$\sup_{\|x\|\le M+\varepsilon}\left|\sum_{i=1}^{n}b_i f_i(x)\right|=\sup_{\|x\|\le 1}\left|\sum_{i=1}^{n}b_i f_i(x)\right|(M+\varepsilon)$$

$$=(M+\varepsilon)\sup_{\|x\|\le 1}\left\|\sum_{i=1}^{n}b_i f_i\right\|\le r<F(c)=\left|\sum_{i=1}^{n}b_i c_i\right|.$$

$f_1,\cdots,f_n$线性无关，故$\left\|\sum_{i=1}^{n}b_i f_i\right\|\ne 0$，从而

$$M\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i f_i\right\|<\left|\sum_{i=1}^{n}a_i c_i\right|.$$

与定理中所给条件矛盾.

定理得证.

思考题

设 $\alpha_n,\beta_n,(n\ge 1)$ 是两组实数，试给出存在 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数 $x=x(t)$ 使得它关于 $\sin nt,\cos nt$ 的 Fourier 系数是 $\alpha_n,\beta_n,(n\ge 1)$ 的条件.