第 20 讲　正交投影

教学目的：掌握正交投影算子和正交分解的基本性质。

讲解要点：

1　投影定理以及投影算子的初步性质。

2　投影算子的特征及其运算。

3　空间的正交分解。

定义 1　设 H 是内积空间，$E \subset H$ 是线性子空间，$x \in H$. 若存在分解 $x = x_1 + x_2$，其中 $x_1 \in E$，$x_2 \perp E$，则称 x_1 为 x 在 E 上的投影，记为 $P_E x = x_1$.

定理 1　设 H 是内积空间，$E \subset H$ 是线性子空间，$x \in H$，$x_1 \in E$，则以下诸条件等价：

（1）$P_E x = x_1$.

（2）$\|x - x_1\| = \inf\limits_{z \in E} \|x - z\|$,　　(4-2-1)

（3）$\forall z \in E$，实变量函数 $f(\lambda) = \|x - x_1 + \lambda z\|^2$ 在 $\lambda = 0$ 有最小值。

证明　$(1) \Rightarrow (2)$　x 有分解 $x = x_1 + x_2$，其中 $x_1 \in E$，$x_2 \perp E$，则 $\forall z \in E$，$x_1 - z \in E$，$x_2 \perp x_1 - z$，于是

$$\|x - z\|^2 = \|x_1 - z + x_2\|^2 = \|x_1 - z\|^2 + \|x_2\|^2 \ge \|x_2\|^2 = \|x - x_1\|^2$$

注意到 $x_1 \in E$，故 $\|x - x_1\| = \inf\limits_{z \in E} \|x - z\|$。

$(2) \Rightarrow (3)$　注意 $f(\lambda)$ 是 λ 的连续函数并且 $x_1 - \lambda z \in E$，$f(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 的最小性即（4-2-1）.

$(3)\Rightarrow(1)$ $\forall z\in E$，取 λ 为实变量，则

$$f'(0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x-x_1+\lambda z\|^2-\|x-x_1\|^2}{\lambda}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\Big((x-x_1,z)+(z,x-x_1)+\lambda\|z\|^2\Big)$$

$$=2\,\mathrm{Re}\,(x-x_1,z). \tag{4-2-2}$$

$f(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 是可微的．由于 $\lambda=0$ 是最小值点，故 $\mathrm{Re}\,(x-x_1,z)=0$. 同样地，将 z 换为 iz 得出 $\mathrm{Im}\,(x-x_1,z)=0$，从而 $(x-x_1,z)=0$. $z\in E$ 是任意的，最后得出 $x-x_1\perp E$．故 $P_E x=x_1$。

定理 2（投影定理） 设 H 是 Hilbert 空间，$E\subset H$ 为是线性子空间，则 $\forall x\in H$，$P_E x$ 存在且唯一。

证明 若 $x\in E$，则 $P_E x=x$．若 $x\notin E$， 取 $x_n\in E$ 使得 $\|y-x_n\|\to\rho(y,E)=d$，由于

$$\|x_m-x_n\|^2=\|(x-x_n)-(x-x_m)\|^2$$

$$=2(\|x-x_n\|^2+\|x-x_m\|^2)-4\left\|x-\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2$$

$$\le 2(\|y-x_n\|^2+\|y-x_m\|^2)-4d^2\to 0,$$

$\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列。不妨设 $x_n\to x_0$，E 闭，所以 $x_0\in E$．现在

$$\|x-x_0\|=\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|=d=\inf_{z\in E}\|x-z\|,$$

由定理 1，$P_E x=x_0$。

由于 Hilbert 空间是严格凸的，x_0 是唯一的最佳逼近元。

其实为了得到最佳逼近元，定理 2 中的集合 E 可以是任一闭凸子集，x_0 的存在唯一性结论及其证明都不改变。定理 2 和定理 1 还说明空间一点到闭子空间（闭凸集）的投影，恰恰是这一点关于闭子空间

（闭凸集）的最佳逼近元。不仅如此，在 Hilbert 空间上我们还可以定量地计算出一点到最佳逼近元的距离。

例 1 设 H 是 Hilbert 空间，$E\subset H$ 是线性子空间，$\dim E=n$，$e_1,\cdots,e_n$ 是 E 的一组规范正交基，则 $\forall x\in H$，$P_E x=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$ 并且

$$d(x,E)=\ (\|x\|^2-\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2)^{1/2}. \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

若 $\{e_n\}$ 是 H 中的规范正交集，$E=\overline{span}\{e_n\}$，则 $P_E x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$ 并且

$$d(x,E)=(\|x\|^2-\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2)^{1/2}. \qquad (4\text{-}2\text{-}4)$$

实际上，令 $x_1=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$，$x_2=x-x_1$，则 $x_1\in E$，$\forall z\in E$，$z=\sum_{i=1}^{n}(z,e_i)e_i$，实际计算得到

$$(x_2,z)=(x-x_1,z)=(x,z)-(x_1,z)=0$$

故 $x_2\perp E$，从而 $P_E x=x_1=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$. 由投影定理

$$d(x,E)=\|x-x_1\|=(\|x\|^2-\|x_1\|^2)^{1/2}=\ (\|x\|^2-\sum_{j=1}^{n}|(x,e_j)|^2)^{1/2}.$$

思考题 若 $e_1,e_2,\cdots$ 是 E 的规范正交基，证明类似的结论成立.

推论 1 设 H 是 Hilbert 空间，$E\subset H$ 是闭线性子空间，记从 H 到 E 的投影算子是 P，则

(1) $P:H\to E$ 是线性算子.

(2) $\|P\|\le 1$. 若 $E=\{0\}$，则 $P=0$; 若 $E\ne\{0\}$，则 $\|P\|=1$.

(3) $E=R(P)=N(I-P), N(P)=R(I-P)$.

称 E 是 P 的投影子空间.

证明 1° 设 $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$，其中 $x_1, y_1 \in E$，$x_2, y_2 \perp E$，则

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2),$$

其中 $\alpha x_1 + \beta y_1 \in E$，而 $\forall z \in E, (x_2, z) = 0, (y_2, z) = 0$，故

$$(\alpha x_2 + \beta y_2, z) = \alpha(x_2, z) + \beta(y_2, z) = 0.$$

所以 $\alpha x_2 + \beta y_2 \perp E$，于是

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha Px + \beta Py.$$

P 是线性的.

2° $\forall x \in H$，若 $x = x_1 + x_2$ 是正交分解，则 $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$. 从而

$$\|Px\|^2 = \|x_1\|^2 \le \|x\|^2,\ \|Px\| \le \|x\|,\ \|P\| \le 1.$$

若 $E = \{0\}$，则 $\forall x \in H$，$Px = 0$，故 $P = 0$.

若 $E \ne \{0\}$，则有 $x_1 \in E$，$\|x_1\| = 1$ 使得 $Px_1 = x_1$，$\|P\| \ge \|Px_1\| = \|x_1\| = 1$，从而 $\|P\| = 1$.

3° 由于 $y \in R(P)$ 当且仅当 $y = x_1 + x_2$ 时 $x_2 = 0$，此即 $y - Py = 0$ 从而 $y \in N(I - P)$，反过来也一样，另一式子可同样证明.

定理 3 设 H 是 Hilbert 空间，$E \subset H$ 是线性子空间，记 $E^{\perp} = \{x \in H, x \perp E\}$，则

(1) $E^{\perp}$ 是 H 的闭线性子空间.

(2) 若 E 是闭的，则 $E^{\perp\perp} = E$.

(3) 若 E 是闭的，则 $H = E \oplus E^{\perp}$，即

$$H = E + E^{\perp}, E \cap E^{\perp} = \{0\}. \tag{4-2-5}$$

(4) 若 E 是闭的，$P: H \to E$ 是投影算子，则 $E^{\perp} = N(P)$.

通常称 $E^{\perp}$ 是 E 的正交补空间. 由于(4-2-5)，称 H 是 E 与 $E^{\perp}$ 的

直和. 换句话说, (3) 表明 Hilbert 空间的每个闭子空间存在正交补空间.

证明 1° 若 $x, y \in E^{\perp}$, 则 $\forall z \in E$, $x \perp z$, $y \perp z$, 从而

$$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z)=0,$$

故 $\alpha x+\beta y \in E^{\perp}$, $E^{\perp}$ 是线性子空间.

若 $x_n \in E^{\perp}, x_n \to x$, 则 $\forall z \in E$, $(x_n, z)=0$. 由内积关于变元的连续性, $(x, z)=\lim\limits_{n \to \infty}(x_n, z)=0$, 故 $x \perp z$, $x \in E^{\perp}$, $E^{\perp}$ 是闭的.

2° 设 E 是闭的, 则由 $E \perp E^{\perp}$ 知道 $E \subset E^{\perp\perp}$. 另一方面, 若 $x \in E^{\perp\perp}$, 则 $x \perp E^{\perp}$. 若 $x=x_1+x_2$, $x_1 \in E$, $x_2 \perp E$, 则 $x_2 \in E^{\perp}$, 从而 $(x, x_2)=0$. 于是

$$(x_2, x_2)=(x_1+x_2, x_2)=(x, x_2)=0,$$

故 $x_2=0$, $x=x_1 \in E$, 即 $E^{\perp\perp} \subset E$. 最后 $E=E^{\perp\perp}$.

3° 由定理 2, $\forall x \in H$, $x=x_1+x_2$, 其中 $x_1 \in E$, $x_2 \perp E$. 即 $x_2 \in E^{\perp}$ 从而 $H=E+E^{\perp}$. 另一方面 $E \cap E^{\perp}=\{0\}$. 故 $H=E \oplus E^{\perp}$.

4° $\forall x \in H$, $x=x_1+x_2$ 其中 $x_1 \in E$, $x_2 \perp E$. 故 $x \in E^{\perp}$ 当且仅当 $x_1=0$, 即 $Px=0$ 或 $x \in N(P)$. 从而 $E^{\perp}=N(P)$.

思考题 若 H 是内积空间, $M, N \subset H$.

（1） 若 $M \perp N$, 则 $M \subset N^{\perp}$, $N \subset M^{\perp}$.

（2） 若 $M \subset N$, 则 $M^{\perp} \supset N^{\perp}$.

（3） $M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}$.

定义 2 (1) 称线性算子 $T: X \to X$ 是幂等的, 若 $T^2=T$.

(2) 设 H 是内积空间, 称 $T \in B(H)$ 是自伴算子, 若

$$(Tx, y)=(x, Ty), \forall x, y \in H. \tag{4-2-6}$$

定理 4 设 H 是 Hilbert 空间, $P \in B(H)$, 则下列诸条件等价:

(1) P是投影算子.

(2) $P^2=P$并且P是自伴的.

(3) $P^2=P$并且$N(P)\perp R(P)$.

(4) 若H是复空间, 以上条件还等价于

$$(Px,x)=\|Px\|^2,\forall x\in H. \tag{4-2-7}$$

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 首先设P是从H到闭线性子空间E上的投影算子, $\forall x\in H$, $Px\in E$, 故$P^2x=P(Px)=Px$. 于是$P^2=P$. 其次, $\forall x,y\in H$, $x=x_1+x_2, y=y_1+y_2, x_1,y_1\in E, x_2,y_2\perp E$, 则

$$\begin{aligned}(Px,y)&=(x_1,y_1+y_2)=(x_1,y_1)\\&=(x_1+x_2,y_1)=(x,Py).\end{aligned}$$

P自伴.

(2)$\Rightarrow$(3). 若$x\in N(P)$, 则$Px=0$, 若$y\in R(P)$则$\exists x_1\in H$, $y=Px_1$. 于是

$$(x,y)=(x,Px_1)=(Px,x_1)=0$$

即$N(P)\perp R(P)$.

(3)$\Rightarrow$(1). 令$E=N(I-P)$, E是H的闭线性子空间, 现在验证P是从H到E上的投影算子.

首先证明$E=R(P)$, 实际上$\forall y\in R(P),\exists x\in H$, $y=Px=P^2x$. 从而$(I-P)(Px)=0$, 即$(I-P)y=0$, $y\in N(I-P)$. 反之$\forall y\in N(I-P)$则$(I-P)y=0$, $y=Py\in R(P)$, 故$R(P)=N(I-P)$.

$\forall x\in H$, 记$x=Px+(x-Px)$. 显然$Px\in R(P)=E$. 又$P(I-P)x=P(x-Px)=0$, 于是$x-Px\in N(P)$. 由$N(P)\perp R(P)$得到$x-Px\perp R(P)=E$. 所以P是从H到E上的投影算子.

现在设H是复空间.

(2)$\Rightarrow$(4). $\|Px\|^2=(Px,Px)=(P^2x,x)=(Px,x)$.

$(4) \Rightarrow (2)$. 对于 H 上的任一线性算子 A，容易验证下面极化恒等式成立：

$$4(Ax,y) = (A(x+y),x+y) - (A(x-y),x-y)$$
$$+i(A(x+iy),x+iy) - i(A(x-iy),x-iy) \qquad (4\text{-}2\text{-}8)$$

若 $\forall x \in H$，$(Px,x) = \|Px\|^2$，则 (Px,x) 是实数．令 $A = P$，实际计算知道：

$$(Px,y) = \overline{(Py,x)} = (x,Py)，$$

P 是自伴的．于是

$$(P^2x,x) = (Px,Px) = (Px,x)，\quad \forall x \in H .$$

令 $A = P^2 - P$，则 $(Ax,x) = 0$，$\forall x \in H$，再利用极化恒等式得到

$$(Ax,y) = 0，\forall x,y \in H .$$

于是 $A = 0$，即 $P^2 = P$，P 是幂等的，（2）成立.

整个定理得证.

若 P 是投影算子，则

$$(Px,x) = (P^2x,x) = (Px,Px) \geq 0，\quad \forall x \in H$$

利用这一点我们可以在投影算子之间建立一种半序关系：若 P_E, P_M 分别是从 H 到闭线性子空间 E 和 M 上的投影算子，并且

$$(P_E x,x) \geq (P_M x,x)，\quad \forall x \in H \qquad (4\text{-}2\text{-}9)$$

则记为 $P_E \geq P_M$（或 $P_M \leq P_E$）.

定理 5 设 P_E, P_M 分别是 Hilbert 空间中的投影算子。则以下诸条件等价：

（1）$P_M \leq P_E$.

（2）$\|P_M x\| \leq \|P_E x\|$，$\forall x \in H$.

（3）$M \subset E$.

（4）$P_E P_M = P_M P_E = P_M$.

（5） $P_E - P_M$ 是投影算子.

证 明 $(1)\Rightarrow(2)$ $\|P_M x\|^2 = (P_M x, x) \le (P_E x, x) = \|P_E x\|^2$. 故 $\|P_M x\| \le \|P_E x\|$，$\forall x \in H$.

$(2)\Rightarrow(3)$ 若 $x \in M$，则 $P_M x = x$，

$$\|P_E x\|^2 \ge \|P_M x\|^2 = \|x\|^2 = \|P_E x\|^2 + \|x - P_E x\|^2$$

故 $x - P_E x = 0$ 或 $P_E x = x$. 即 $x \in E$，所以 $M \subset E$。

$(3)\Rightarrow(4)$ $\forall x \in H$，$P_M x \in M \subset E$，故 $P_E P_M x = P_M x$ 或 $P_E P_M = P_M$. 另一方面，设 $x = P_E x + x_2$，$x_2 \perp E$ 从而 $x_2 \perp M$. 又设 $x = P_M x + x_2'$，$x_2' \perp M$，故 $x_2 - x_2' \perp M$

$$P_E x - P_M x = -(x_2 - x_2') \perp M 。$$

若记 $P_E x = P_M x + (P_E x - P_M x)$，则此式为 $P_E x$ 关于线性子空间 M 的正交分解式，从而 $P_M P_E x = P_M x$ 或 $P_M P_E = P_M$.

$(4)\Rightarrow(5)$ 此时 $(P_E - P_M)^2 = P_E{}^2 - P_E P_M - P_M P_E + P_M{}^2 = P_E - P_M - P_M + P_M = P_E - P_M$，$P_E - P_M$ 是幂等的。

由于 P_E, P_M 的自伴性，$\forall\, x, y \in H$

$$\begin{aligned}((P_E - P_M)x, y) &= (P_E x, y) - (P_M x, y)\\ &= (x, P_E y) - (x, P_E y) = (x, (P_E - P_M)y).\end{aligned}$$

$P_E - P_M$ 是自伴的，故 $P_E - P_M$ 是投影算子。

$(5)\Rightarrow(1)$ 由

$$(P_E x, x) - (P_M x, x) = ((P_E - P_M)x, x) = \|(P_E - P_M)x\|^2 \ge 0$$

得之.

定理 6 设 P_E, P_M 分别是 Hilbert 空间中的投影算子。则以下诸条件等价：

（1） $E \perp M$.

（2） $R(P_E) \perp R(P_M)$.

（3） $P_E P_M = 0$（称 P_E 与 P_M 正交）.

（4） $P_E + P_M$ 是投影算子.

证明 $(1) \Rightarrow (2)$ 由 $R(P_E) = E$， $R(P_M) = M$ 得到

$$R(P_E) \perp R(P_M).$$

$(2) \Rightarrow (3)$ $\forall x, y \in H$，$(x, P_E P_M y) = (P_E x, P_M y) = 0$，故 $P_E P_M y = 0$，从而 $P_E P_M = 0$.

$(3) \Rightarrow (4)$ $\forall x \in H$，由 $P_E P_M = 0$ 得 $P_E P_M P_E = 0$，于是

$$\begin{aligned}\|P_M P_E x\|^2 &= (P_M P_E x, P_M P_E x) = (P_E x, P_M{}^2 P_E x) \\ &= (P_E x, P_M P_E x) = (x, P_E P_M P_E x) = 0.\end{aligned}$$

故 $P_M P_E = 0$. 现在

$$(P_E + P_M)^2 = P_E{}^2 + P_E P_M + P_M P_E + P_M{}^2 = P_E + P_M.$$

又 $\forall x, y \in H$，

$$\begin{aligned}((P_E + P_M)x, y) &= (P_E x, y) + (P_M x, y) \\ &= (x, P_E y) + (x, P_E y) = (x, (P_E + P_M) y).\end{aligned}$$

所以 $P_E + P_M$ 是投影算子.

$(4) \Rightarrow (1)$ 由

$$P_E + P_M = (P_E + P_M)^2 = P_E{}^2 + P_E P_M + P_M P_E + P_M{}^2 = P_E + P_E P_M + P_M P_E + P_M$$

知道

$$P_E P_M + P_M P_E = 0 \tag{4-2-10}$$

左乘 P_E，则 $P_E P_M + P_E P_M P_E = 0$.

右乘 P_E，则 $P_E P_M P_E + P_M P_E = 0$.

于是 $P_E P_M = P_M P_E$，由式（4-2-6）， $P_E P_M = P_M P_E$.

$\forall x \in M$， $P_M x = x$，故 $0 = P_E P_M x = P_E x$。 $x \perp E$ 所以 $M \perp E$.

思考题 若 P_1, P_2 是投影算子，则 $P_1 P_2$ 是投影算子当且仅当 $P_1 P_2 = P_2 P_1$.

引理 设 H 是 Hilbert 空间，$\{P_n\}$ 是 H 上的一列投影算子并且 P_n 点点收敛于 P，即 $\forall x \in H$，$\|P_n x - Px\| \to 0$，则 P 是投影算子.

证明 $\forall x \in H$，$\lim\limits_{n\to\infty} P_n x = Px$. 由 Banach-Steinhaus 定理，$P$ 是有界线性算子. 又 $\forall y \in H$，

$$(Px, y) = \lim_{n\to\infty} (P_n x, y) = \lim_{n\to\infty} (x, P_n y) = (x, Py)$$

P 是自伴的. 另一方面

$$\|(P^2 - P)x\| = \|(P^2 - P_n P + P_n P - P_n^2 + P_n - P)x\|$$

$$\le \|(P - P_n)(Px)\| + \|P_n\| \|(P - P_n)x\| + \|(P - P_n)x\| \to 0$$

故 $(P^2 - P)x$ =0，$\forall x \in H$，即 $P^2 = P$. P 是幂等的. .

定理 7 设 H 为 Hilbert 空间.

(1) 若 $\{Q_i\}$ 是一列两两正交 $(Q_i Q_j = 0, i \ne j)$ 的投影算子，则存在投影算子 P 使得 $\sum_{i=1}^{n} Q_i x \to Px$ 点点成立.

(2) 若 $\{E_i\}$ 是一列单调上升($E_i \subset E_j, i \le j$)的闭线性子空间并且 $E = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}$，则 $P_{E_n} x \to P_E x$ 点点成立.

证明 1° 记 $P_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i$，由定理 6，利用数学归纳法不难证明

P_n

是投影算子. 由正交性

$$(Q_i x, Q_j x) = (Q_j Q_i x, x) = 0 \quad (i \ne j)$$

故

$$\|x\|^2 \ge \|P_n x\|^2 = (\sum_{i=1}^{n} Q_i x, \sum_{j=1}^{n} Q_j x)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (Q_i x, Q_j x) = \sum_{i=1}^{n} \|Q_i x\|^2 .$$

所以 $\sum_{i=1}^{\infty} \|Q_i x\|^2 < \infty$. 又

$$\left\|\sum_{i=n+1}^{m} Q_i x\right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} \|Q_i x\|^2 \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

所以 $\sum_{i=1}^{n} Q_i x$ 是 Cauchy 序列. H 完备, 令 $Px = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Q_i x$, 由引理, P 是投影算子.

2° 由定理 6, $P_{E_{i+1}} - P_{E_i}$ 是投影算子并且 $P_{E_i} P_{E_j} = P_{E_i} (i < j)$. 故

$$(P_{E_{i+1}} - P_{E_i})(P_{E_{j+1}} - P_{E_j}) = P_{E_{i+1}} - P_{E_{i+1}} + P_{E_i} - P_{E_i} = 0.$$

又 $P_{E_1}(P_{E_{i+1}} - P_{E_i}) = P_{E_1} - P_{E_1} = 0$. 于是

$$P_{E_1}, P_{E_2} - P_{E_1}, P_{E_3} - P_{E_2}, \cdots$$

是一列两两正交的投影算子序列. 由 1°, $\forall x \in H$,

$$P_{E_n} x = P_{E_1} x + \sum_{i=1}^{n-1} (P_{E_{i+1}} - P_{E_i}) x \to Px .$$

P 为投影算子. 现在验证 $P = P_E$.

记 $P = P_L$. 我们证明 $L = E$. 实际上, $\forall n \ge 1, E_n \subseteq E$. 由定理 5, 对于每个 $x \in H$,

$$\|P_{E_n} x\| \le \|P_E x\|.$$

令 $n \to \infty$, 则

$$\|P_L x\| = \lim_{n\to\infty} \|P_{E_n} x\| \le \|P_E x\|,$$

于是 $L \subset E$.

另一方面, 当 $k \ge n$ 时 $x \in E_k$, 故 $P_{E_k} x = x$. 令 $k \to \infty$, 则

$P_L x = \lim_{k\to\infty} P_{E_k} x = x$. 所以 $x \in L$，从而 $E_n \subset L$. n 是任意的并且 E_n 单调增加，于是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset L$，$L$ 闭，所以 $E = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \subset L$.

总之，$L = E$，故 $P = P_L = P_E$.