第 24 讲　自伴算子的谱论

教学目的：掌握自伴算子谱的特征。

讲解要点：

1　自伴算子数值值域的特征。

2　自伴算子构成的算子方程与共轭算子构成的算子方程解的关系。

3　紧自伴算子的投影算子分解。

本节我们讨论复 Hilbert 空间上的自伴算子.

定理 1　若 H 是 Hilbert 空间，$A \in \mathrm{B}(H)$，A^* 是 A 的共轭算子，则

(1)　$$\rho(A^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \rho(A)\},$$
$$\sigma(A^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\} \qquad (5\text{-}3\text{-}1)$$

(2) 若 x 是 A 的相应于 λ 的特征向量，y 是 A^* 的相应于 μ 的特征向量，$\lambda \neq \overline{\mu}$,则 $x \perp y$.

证明　1° 只须证明第一式，若 $\lambda \in \rho(A)$，$\lambda I - A$ 为正则算子，此时 $(\lambda I - A)^* = \overline{\lambda} I - A^*$ 正则，故 $\overline{\lambda} \in \rho(A^*)$，$\{\overline{\lambda} : \lambda \in \rho(A)\} \subset \rho(A^*)$. 但 $(A^*)^* = A$，于是 $\{\overline{\lambda} : \lambda \in \rho(A^*)\} \subset \rho(A^{**}) = \rho(A)$，两端取复共轭得到 $\rho(A^*) \subset \{\overline{\lambda} : \lambda \in \rho(A)\}$，从而得到等式.

2°　若 $(\lambda I - A)x = 0, (\mu I - A^*)y = 0$，$x \neq 0$，$y \neq 0$，则

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) = (Ax, y) = (x, A^* y)$$
$$= (x, \mu y) = \overline{\mu}(x, y).$$

于是 $(\lambda - \overline{\mu})(x, y) = 0$，$\lambda \neq \overline{\mu}$，故 $(x, y) = 0$. 从而 $x \perp y$.

定理 2　设 H 是 Hilbert 空间，$A \in \mathrm{B}(H)$ 是自伴算子.

(1) A的谱点都是实数,特别地A的特征值都是实数.

(2) 对应于不同特征值的特征向量彼此正交.

(3) $\sigma_r(A)=\varnothing$.

证明 1° $\forall\lambda\in C$, $x\in X$, 由自伴性,

$$
\begin{aligned}
((\lambda I-A)x,x)-(x,(\lambda I-A)x)&=\lambda\|x\|^2-(Ax,x)-\overline{\lambda}\|x\|^2+(x,Ax)\\
&=2i\operatorname{Im}\lambda\|x\|^2
\end{aligned}
$$

这里$\operatorname{Im}\lambda$是λ的虚部. 于是

$$2|\operatorname{Im}\lambda|\|x\|^2\le|((\lambda I-A)x,x)|+|(x,(\lambda I-A)x)|\le 2\|(\lambda I-A)x\|\|x\|$$

或者

$$\|(\lambda I-A)x\|\ge|\operatorname{Im}\lambda|\|x\|.$$

由此知当$\operatorname{Im}\lambda\ne 0$时$\lambda I-A$是一一的. 此外令$(\lambda I-A)x=y$, 则

$$\|(\lambda I-A)^{-1}y\|\le|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}\|y\|,$$

$(\lambda I-A)^{-1}$是有界的. 此时$\lambda I-A$的共轭$\overline{\lambda}I-A$也是一一的, 由第四章§3 定理 6 $\overline{R(\lambda I-A)}=H$. 根据$(\lambda I-A)^{-1}$的有界性, $R(\lambda I-A)=H$. 于是$\lambda I-A$是正则的. 矛盾即说明$\operatorname{Im}\lambda=0$, $\sigma(A)\subset R$.

2° A是自伴算子, $A^*=A$, 若x,y是相应于λ,μ的特征向量, 由1°, λ,μ为实数, $\lambda\ne\overline{\mu}$, 既是 $\lambda\ne\mu$. 由定理 1(2)即得到所要的结论.

3° 若$\lambda\in\sigma_r(A)$, 由1°, λ是实数, 从而$(\lambda I-A)^*=\lambda I-A$. 由于$\overline{R(\lambda I-A)}\ne H$,由第四章§3 定理 6,

$$N(\lambda I-A)=\overline{R(\lambda I-A)}^{\perp}\ne\{0\},$$

于是$\lambda\in\sigma_p(A)$, 矛盾.

为了更精细地考察自伴算子谱点的特性，我们引进下面概念.

定义 设 H 为 Hilbert 空间, $A\in\mathrm{B}(H)$, 称集合

$$\omega(A)=\{(Ax,x):x\in H,\|x\|=1\} \qquad (5\text{-}3\text{-}2)$$

为 A 的数值值域. 称 $R_A = \sup\limits_{\mu\in\omega(A)} |\mu|$为算子 A 的数值半径.

定理 3 设 H 是 Hilbert 空间，$A\in \mathrm{B}(H)$是自伴算子，则

(1) $\sigma(A)\subset\overline{\omega(A)}$，特别地$\sigma(A)$，$\omega(A)$都由实数构成.

(2) $\sup\limits_{\mu\in\omega(A)} |\mu| = \|A\|$.

证明 1° 注意 (Ax,x) 是实数，我们证明若 $\lambda \bar{\in} \overline{\omega(A)}$，则 $\lambda\bar{\in}\sigma(A)$. 设 $d=\rho(\lambda,\overline{\omega(A)})=\inf\limits_{\mu\in\omega(A)}|\lambda-\mu|$, 则 $d>0$. $\forall x\in H$，$x\neq 0$ 时

$$d\|x\|^2 \le \left|\lambda-(A(\frac{x}{\|x\|}),\frac{x}{\|x\|})\right|\|x\|^2$$
$$=|\lambda(x,x)-(Ax,x)|$$
$$=|((\lambda I-A)x,x)|$$
$$\le \|(\lambda I-A)x\|\|x\|.$$

于是

$$d\|x\|\le\|(\lambda I-A)x\| \qquad (5\text{-}3\text{-}3)$$

若 $y_n\in R(\lambda I-A)$，$y_n\to y_0$. 不妨设 $y_n=(\lambda I-A)x_n$，这里 $x_n\in X$. 由式（5-3-3）$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，H 完备，不妨设 $x_n\to x_0$. 由 $\lambda I-A$ 的连续性得到 $y_0=(\lambda I-A)x_0$, 故 $y_0\in R(\lambda I-A)$，$R(\lambda I-A)$ 是闭子空间.

$\lambda I-A$ 是到上的. 若不然由 Riese 表现定理，存在 $y\in H, \|y\|=1$ 使得 $\forall x\in H$，$((\lambda I-A)x,y)=0$. 特别地，$((\lambda I-A)y,y)=0$，于是

$$\lambda=\lambda\|y\|^2=(Ay,y)\in\omega(A),$$

与所设矛盾. 于是 $\lambda I-A$ 既是一一的,又是到上的，由逆算子定理，$(\lambda I-A)^{-1}$ 是有界的. 所以 $\lambda\in\rho(A)$. (1)成立.

2° $\forall\mu\in\omega(A)$，存在 $x\in H$，$\|x\|=1$，$\mu=(Ax,x)$. 于是

$$|\mu|=|(Ax,x)|\le\|A\|\|x\|^2=\|A\|,$$

故 $\sup\limits_{\mu\in\omega(A)}|\mu|\le\|A\|$.

另一方面，设 $a=\sup\limits_{\mu\in\omega(A)}|\mu|$，则 $|(Ax,x)|\le a\|x\|^2$.由极化恒等式知

$$4\operatorname{Re}(Ax,y)=(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)$$

于是

$$\begin{aligned}|4\operatorname{Re}(Ax,y)|&\le|(A(x+y),x+y)|+|(A(x-y),x-y)|\\&\le a\|x+y\|^2+a\|x-y\|^2\\&=2a(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

后者利用了内积空间的平行四边形公式.

若 $Ax\ne 0$,取 $\|x\|=1$, $y=\dfrac{Ax}{\|Ax\|}$　则

$$\begin{aligned}\|Ax\|&=(Ax,\frac{Ax}{\|Ax\|})=\operatorname{Re}(Ax,\frac{Ax}{\|Ax\|})\\&\le\frac{a}{2}(\|x\|^2+\frac{\|Ax\|^2}{\|Ax\|^2})=a\end{aligned}$$

当 $Ax=0$ 时，此式自然成立，故 $\|A\|\le a=\sup\limits_{\mu\in\omega(A)}|\mu|$.

定理得证.

定理 4　设 H 是 Hilbert 空间，$A\in\mathrm{B}(H)$ 是自伴算子，则 $M,m\in\sigma(A)$，其中

$$M=\sup_{\mu\in\omega(A)}\mu,\quad m=\inf_{\mu\in\omega(A)}\mu,$$

证明　这里仅证明 $M\in\sigma(A)$，对于 $m\in\sigma(A)$ 可类似证之.

设 $B=MI-A$，则

$$(Bx,x)=M(x,x)-(Ax,x),\quad \forall x\in H.$$

根据 M 的定义,显然 $(Bx,x)\ge 0$ 并且

$$\inf_{\|x\|=1}(Bx,x)=0. \tag{5-3-4}$$

现在,若 t 是任一实数，则

$$(B(tBx+x),tBx+x)\ge 0,$$

即

$$t^2(B^2x,Bx)+t(Bx,Bx)+t(B^2x,x)+(Bx,x)\geq 0$$

由 B 的自伴性得到

$$t^2(B^2x,Bx)+2t(Bx,Bx)+(Bx,x)\geq 0$$

各项系数均为实数,故

$$(Bx,Bx)^2\leq(B^2x,Bx)(Bx,x) \tag{5-3-5}$$

于是

$$\|Bx\|^4=(Bx,Bx)^2\leq\|B\|^3\|x\|^2|(Bx,x)|,$$

由(5-3-4),

$$\inf_{\|x\|=1}\|Bx\|=0 \tag{5-3-6}$$

若 B 是一一的并且到上的，由本章§1 定理 1，存在 $a>0$，使得 $\forall x\in H$，$\|Bx\|\geq a\|x\|$. 从而 $\inf\limits_{\|x\|=1}\|Bx\|\geq a>0$，与(5-3-6)矛盾，故 $M\in\sigma(A)$.

推 论 设 H 是 Hilbert 空间，$A\in\mathrm{B}(H)$ 是自伴算子. 若 r_A 是 A 的谱半径, R_A 是 A 的数值半径，r_{A^*A} 是 A^*A 的谱半径，则

(1) $r_A=R_A=\|A\|$

(2) $r_{A^*A}=\|A\|^2$

证 明 1° 实际上由定理 4，$\max(|M|,|m|)\leq\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|=r_A$，故

$$R_A=\sup_{\mu\in\omega(A)}|\mu|=\max(|M|,|m|)\leq r_A$$

但显然 $r_A=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|\leq\sup\limits_{\mu\in\omega(A)}|\mu|=R_A$. 再由定理 3 得到 $r_A=R_A=\|A\|$.

2° 注意到 A^*A 是自伴算子，由 1° 得到

$$r_{A^*A}=\|A^*A\|=\|A\|^2.$$

后一等式是根据第四章§3 定理 6(4).

例1 设 H 是 Hilbert 空间，$E\subset H$ 是闭子空间，$E\neq\{0\},H$. 考

虑投影算子 $P:H\to E$, 由于 $H=E\oplus E^{\perp},E^{\perp}\neq\{0\}$, 故存在 $x\in E,\|x\|=1$, $(Px,x)=\|Px\|^2=\|x\|^2=1$. 又存在 $x\in E^{\perp}$, $\|x\|=1$, $Px=0,(Px,x)=0$. 于是 $0\le(Px,x)\le1$. 由定理 4,

$$\{0,1\}\subset\sigma(P)\subset[0,1].$$

上述事实也可以写成 $(I-P)x=0$ 或 $Px=0$, 于是 $0,1\in\sigma_p(P)$.

若 $0<\lambda<1, x=x_1+x_2$ 是正交分解, $x_1\in E,x_2\perp E$, 则 $(\lambda I-P)x=0$ 即 $(\lambda-1)x_1+\lambda x_2=0$, 故必有 $x=x_1=x_2=0,\lambda I-P$ 是一一的. 另一方面, $\forall y\in H$, 若 $y=y_1+y_2$ 是到 E 的正交分解, 取 $x=\dfrac{y_1}{1-\lambda}+\dfrac{y_2}{\lambda}$, 则 $(\lambda I-P)x=y$, $\lambda I-P$ 是到上的. 于是 $\lambda\in\rho(P)$. 总之 $\sigma(P)=\sigma_p(P)=\{0,1\}$.

下面我们讨论紧自伴算子的谱.

定理 5 设 H 是 Hilbert 空间, A 是紧自伴算子. M,m 如定理 4, 若 $M\neq0$ (或 $m\neq0$), 则 M (或 m)是 A 的特征值.

证 明 现只证 M, 对于 m 可类似证明之.

设 $M\neq0$, 记 $B=MI-A$, 由定理 4 的证明知道 (5-3-6) 成立. 故存在 $x_n\in H$, $\|x_n\|=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|Bx_n\|=0$. A 紧, 于是有子列 x_{n_k}, $Ax_{n_k}\to x_0$. 由 $Bx_n=Mx_n-Ax_n$ 知 $Mx_{n_k}\to x_0$, 于是 $Ax_0=\lim\limits_{n_k\to\infty}MAx_{n_k}=Mx_0$. 又 $\|x_0\|=\lim\limits_{k\to\infty}M\|x_{n_k}\|=M\neq0$, 故 M 是 A 的特征值, $M\in\sigma_p(A)$.

定理 6 设 H 是 Hilbert 空间, A 是紧自共伴算子.

(1) 存在有限或无穷非零实数序列 $\{\lambda_n\},\lambda_n$ 是 A 的特征值,

$$|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge\cdots\cdots.$$

若 $\{\lambda_n\}$ 是无穷的, 则 $\lambda_n\to0$. 相应地存在规范正交序列 $\{e_n\}$, 使得 $Ae_n=\lambda_ne_n$ 并且对于每个 $x\in H$,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n \qquad (5\text{-}3\text{-}7)$$

(2) 若 P_n 是 H 到由 e_n 张成的线性子空间上的投影算子,则

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \qquad (5\text{-}3\text{-}8)$$

(3) 若 0 不是 A 的特征值, 则 $\{e_n : n \geq 1\}$ 是 H 的正交基.

证明 1° 不妨设 $A \neq 0$, 若 $\lambda_1 = \max\{|M|,|m|\} = \|A\|$,由定理 5, λ_1 是特征值.设 e_1 是相应的特征向量, $\|e_1\| = 1$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$.令 $Q_1 = span\{e_1\}$, $H_1 = \{x \in H : x \perp e_1\}$,则 Q_1, H_1 是 H 的闭线性子空间,并且 $A(H_1) \subset H_1$. 实际上,若 $x \in H_1$, 则

$$(Ax, e_1) = (x, Ae_1) = \lambda_1 (x, e_1) = 0.$$

所以 $Ax \in H_1$.

于是 H_1 仍然为 Hilbert 空间.定义 $A_1 = A|_{H_1}$, 显然 A_1 仍是在 H_1 上的紧自共轭算子.若 $A_1 = 0$, 则 $\forall x \in H$, 根据投影定理, $x = q_1 + h_1$, 其中 $q_1 \in Q_1, h_1 \in H_1$. 此时

$$\begin{aligned} Ax &= Aq_1 + Ah_1 = \lambda_1 q_1 + 0 \\ &= \lambda_1 (q_1, e_1) e_1 = \lambda_1 (x, e_1) e_1 \end{aligned}$$

若 $A_1 \neq 0$, 则 $\|A_1\| \neq 0$. 取 $\lambda_2 = \|A_1\| > 0$, 此时 $|\lambda_1| = \|A\| \geq \|A|_{H_1}\| = \|A_1\| = |\lambda_2|$,由定理 5, λ_2 为特征值. 不妨设 $e_2 \in H_1, \|e_2\| = 1$, $A_1 e_2 = \lambda_2 e_2$,

$$Q_2 = span\{e_1, e_2\}, H_2 = \{x \in H : x \perp Q_2\},$$

此时同样有 $A(H_2) \subset H_2$. 若 $A_2 = A_1|_{H_2} = 0$, 类似于上面的证明

$$Ax = \lambda_1 (x, e_1) e_1 + \lambda_2 (x, e_2) e_2, \ \forall x \in H,$$

若 $A_2 \neq 0$, 继续以上过程作出 $A_3, \cdots$, 如果在有限次之后,有 $A_n = 0$, 则

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i) e_i \qquad (5\text{-}3\text{-}9)$$

定理 6(1)成立． 否则，$\{\lambda_n\}$是无穷的，并且 $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots$． 由$Q_n$与$H_n$的定义，对应的特征向量$\{e_n\}$两两正交,其中$Ae_n=\lambda_n e_n$．此时必有$\lambda_n\to 0$．若不然，例如$|\lambda_n|\geq\delta>0$对于无穷多个$n$成立，由于$Ae_n\perp Ae_m(n\neq m)$，则

$$\begin{aligned}\|Ae_n-Ae_m\|^2&=\|Ae_n\|^2+\|Ae_m\|^2\\&=|\lambda_n|^2+|\lambda_m|^2\geq 2\delta^2>0\end{aligned}$$

与A的紧性矛盾.

现在设$Q_\infty=\overline{span}\{e_n:n\geq 1\}$, $H_\infty=\{x\in H:x\perp Q_\infty\}$,则$A|_{H_\infty}=0$．实际上若$x\in H_\infty$，$x\perp Q_\infty$ 从而 $x\perp Q_n$， $x\in H_n(n=1,2,\cdots)$，则$A(H_n)\subset H_n$,

$$(Ax,x)((A|_{H_\infty})x,x)\leq\|A|_{H_n}\|\|x\|^2=|\lambda_n|\|x\|^2\to 0.$$

于是$\forall x\in H_\infty,(Ax,x)=0$．将$A$看成 Hilbert 空间$H_\infty$上的自共轭算子,直接应用极化恒等式得到 $A|_{H_\infty}=0$．$\forall x\in H$，令$x=q_\infty+h_\infty$，其中$q_\infty\in Q_\infty,h_\infty\in H_\infty$，则

$$\begin{aligned}Ax&=Aq_\infty+Ah_\infty\\&=A(\sum_{n=1}^{\infty}(q_\infty,e_n)e_n)+0\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(q_\infty,e_n)Ae_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(q_\infty,e_n)e_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n\end{aligned}$$

2°　设P_n是从H到由e_n张成的线性子空间上的投影算子，则

$$P_n x=(x,e_n)e_n.$$

若$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为有限多个，由式(5-3-9)

$$Ax=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,e_i)e_i=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i)x,$$

于是

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i.$$

若$\{\lambda_n\}$是无穷的，则

$$\begin{aligned}\| A-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i \|^2 &= \sup_{\|x\|=1}\| Ax-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i x \|^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1}\| \sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i (x,e_i)e_i \|^2 \\ &\le \sup_{\|x\|=1}\sum_{i=n+1}^{\infty}|\lambda_i|^2|(x,e_i)|^2 \\ &\le |\lambda_{n+1}|^2 \sup_{\|x\|=1}\sum_{i=n+1}^{\infty}|(x,e_i)|^2 \\ &\le |\lambda_{n+1}|^2 \to 0\end{aligned}$$

故

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i .$$

3° 若 0 不是 A 的特征值，A 是一一映射. $\forall x\in H$，若 $x\perp e_n (n=1,2,\cdots)$，则 $Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n (x,e_n)e_n=0$，由此得到 $x=0$. 由第四章§1 定理 6，$\{e_n : n\ge 1\}$是H的正交基.

例2 对于第二型 Fredholm 积分方程

$$x(t)=\lambda\int_0^1 K(t,s)x(s)ds+y(t) \tag{5-3-10}$$

其中K作为二元函数在$a\le t,s\le b$上平方可积，$y\in L^2[a,b]$，$\lambda\ne 0$. (5-3-10)可以简单地记为

$$(I-\lambda A)x=y \tag{5-3-11}$$

(或($\lambda^{-1}I-A)x=\lambda^{-1}y$))，其中

$$Ax(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds ,\quad \forall x\in L^2[a,b]$$

即使第二型 Fredholm 积分算子. 由第三章§3 的知识，A是紧算子. 当$K(s,t)=\overline{K(t,s)}$ 时，A是自伴算子. 现在假定A是非 0 自伴算子.

由于A是紧的，根据上节的知识，要么(5-3-11)对于任何$y\in L^2[a,b]$有唯一解，要么齐次方程$(I-\lambda A)x=0$有非 0 解. 在前一

种情况，根据自伴性，存在至多可列个实数 $\lambda_n \neq \lambda$， λ_n 是 A 的特征值，以及相应的特征向量 φ_n，利用正交化方法，不妨设 $\{\varphi_n; n \geq 1\}$ 就是规范正交系，显然 $\{\varphi_n; n \geq 1\}$ 还是正交基. 于是由定理 6

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty}(Ax, \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x, \varphi_n)\varphi_n, \quad \forall x \in L^2[a,b]$$

其中级数按照 L^2 中范数收敛. 将(5-3-11)两端关于 φ_n 取内积得到

$$(1-\lambda\lambda_n)(x,\varphi_n) = (y,\varphi_n) \quad 或 \quad (x,\varphi_n) = (1-\lambda\lambda_n)^{-1}(y,\varphi_n)$$

所以

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi,\varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\lambda\lambda_n)^{-1}(y,\varphi_n)\varphi_n$$

是(5-3-11)的解.

在第二种情况，对应地有若干个 $\lambda_n\lambda = 1$，而相应地 $(y,\varphi_n) = 0$，直接验证表明形如

$$\varphi = \sum_{\lambda\lambda_n=1} c_n\varphi_n + \sum_{\lambda\lambda_n\neq 1}(1-\lambda\lambda_n)^{-1}(y,\varphi_n)\varphi_n$$

的函数都是(5-3-11)的解，其中 c_n 是任意常数.