

文章编号:1000-6788(2005)09-0083-06

## 四阶累积量用于最小嵌入维数估计的新方法

孟庆芳<sup>1</sup>,张强<sup>2</sup>,潘金凤<sup>1</sup>

(1. 山东大学信息科学与工程学院,山东 济南 250100;2. 济南市半导体元件实验所,山东 济南 250014)

**摘要:** 用能反映非线性结构的四阶累积量函数代替相关函数构造矩阵,对奇异值分解法进行改进.对比分析了用四阶累积量函数构造矩阵的多种方法,得到两种较好的构造矩阵的方法.其中当四阶累积量函数的两个变量分别在矩阵的对角线方向和偏离对角线方向取值并且第三个变量取零时,得到的矩阵的分析效果最好.并用此方法分析由 Henon 映射、Lorenz 模型生成的混沌时间序列.实验结果表明了改进后方法的有效性及稳定性,并且改进后方法适合小数据量的情况且计算效率高.

**关键词:** 最小嵌入维数;四阶累积量;估计;奇异值分解

**中图分类号:** O322

**文献标识码:** A

## New Method for Determining the Minimum Embedding Dimension Based on Four-order Cumulant

MENG Qing-fang<sup>1</sup>, ZHANG Qiang<sup>2</sup>, PAN Jin-feng<sup>1</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Shandong University, Ji nan 250100, China; 2. Institute of Jinan's Semiconductor Element Experimentation, Ji nan 250014, China)

**Abstract:** Singular value decomposition is essentially a linear method based on the covariance matrix which reflects the linear dependence. Numerical experience led several researchers to express some doubts about the reliability of SVD. In this paper the matrix constructed by four-order cumulant function instead of correlation function is used to improve the method of SVD. Methods used four-order cumulant function to construct matrixes is studied and the best two methods are found. When two parameters of four-order cumulant function choose values of the diagonal direction and the off-diagonal direction of the matrix and the third parameter is zero, we can get the best matrix. In this paper we illustrate this method to analyze chaotic time series from Henon attractor and Lorenz model. Simulation results show the validity and the stability of the improved method. And this method is fit for the small set nonlinear time series and is computationally efficient.

**Key words:** the minimum embedding dimension; four-order cumulant; estimation; singular value decomposition

### 1 引言

相空间重构是用动力系统方法分析非线性时间序列的基础, Takens<sup>[1]</sup>证明了用延迟坐标重构的动力轨迹相空间与原动力系统保持微分同胚,即单变量时间序列在无限长且无噪声的情况下,延迟时间取任意值都能重构原系统相空间.但实际上,实测时序是有限长的,且不可避免的被噪声污染,因此延迟时间取任意值不能重构原系统相空间,嵌入定理也没有提供嵌入维数的选取方法.因此实测时序相空间重构的关键是其参数的选取.

最小嵌入维数不仅是相空间重构的一个重要参数而且是混沌时间序列预测器定阶问题的重要参数.目前最小嵌入维数的选取方法主要有三种:饱和关联维数法、伪邻近点法和奇异值分解法.饱和关联维数

收稿日期:2004-09-21

作者简介:孟庆芳(1979-),女,山东临沂人,博士研究生,研究方向:混沌时序重构、建模、预测及其工程应用.

法<sup>[2]</sup>对噪声非常敏感、不适合小数据量、计算量大、判定准则主观性强;伪邻近点法<sup>[3]</sup>的判定准则主观、要求延时已知、计算量大且对噪声敏感;奇异值分解法(Singular Value Decomposition,简称SVD法)<sup>[4]</sup>根据奇异值区分出信号成分及噪声平台,从而确定最小嵌入维数,它所用的由二阶矩函数组成的协方差阵,反映的是线性相关,因此该方法本质上是一种线性方法,其可靠性受到质疑<sup>[5,6]</sup>。

高阶统计作为一种非线性信号处理工具,能反映非线性结构.文献[7,8]把高阶统计应用于非线性时间序列分析得到较好效果。

用四阶累积量函数代替二阶矩函数构造矩阵,改进SVD法.分析了用四阶累积量函数构造矩阵的多种方法,得到两种较好的构造矩阵的方法.实验结果表明了改进后方法的有效性及其稳定性。

## 2 方法

### 2.1 相空间重构与奇异值分解

为了研究未知系统的动力特性,人们需要从测量数据重构原系统相空间.通常混沌系统可用低阶微分方程描述,假设原混沌系统的动力方程是由  $n$  个一阶微分方程组成的方程组,该方程组通过求导和消元可化为一个只含一个变量的  $n$  阶微分方程,所以,决定系统长期演化的任一变量的时间序列均包含了系统所有变量长期演化的信息,因此,可以通过决定系统长期演化的任一单变量时间序列来研究系统的混沌行为.假设已知序列  $\{x_i\}$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ ,根据 Takens 嵌入定理可得延迟矢量及轨迹矩阵为:

$$X = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \dots \\ X_{N_T}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_{1+d} & \dots & x_{1+(d-1)} \\ x_2 & x_{2+d} & \dots & x_{2+(d-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N_T} & x_{N_T+d} & \dots & x_{N_T+(d-1)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中  $d$  为嵌入维数,  $\tau$  为延迟时间,  $N_T = N - (d - 1)$ 。

对  $X$  进行奇异值分解,可以得到  $d$  个不增序排列的奇异值  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_d 0$ ,奇异值的分布与系统有关,奇异值的平方称为奇异谱,它代表对应方向能量分布,其百分比即代表系统能量百分比.一般而言,在系统的奇异谱中只有前面的若干个具有较大的值,它们代表信号成分,其余的值较小,它们代表噪声平台,信号成分对应方向包含了系统绝大部分能量.对于如何区分信号成分及噪声平台,人们提出许多判定准则,但都受一定主观因素影响,而在实际应用中,人们发现对有的系统根据奇异谱根本无法区分出信号成分和噪声平台.这是因为SVD法本质上是一种线性方法,它所用的协方差阵是由仅包含二阶统计信息的相关函数组成的.若  $T_x$  表示  $X$  的协方差阵,即

$$T_x = X^T X = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(\tau) & \dots & R_x[(d-1)\tau] \\ R_x(\tau) & R_x(0) & \dots & R_x[(d-2)\tau] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x[(d-1)\tau] & R_x[(d-2)\tau] & \dots & R_x(0) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其元素为

$$T_x(i, j) = E\{x(n)x[n+(i-j)\tau]\} = R_x[(i-j)\tau], \quad (3)$$

其中  $\tau$  为延迟时间,  $i, j=1, 2, \dots, d$ 。

针对SVD法是线性方法,不适合用来分析非线性系统这一问题,用包含高阶统计信息的四阶累积量函数代替相关函数构造矩阵,从而改进奇异值分解法。

### 2.2 高阶统计量

高阶统计量包括高阶矩、高阶累积量及其谱,这里高阶指二阶以上.高阶统计量应用于信号处理领域的主要动机和目的可归结为:检测、表征信号的非线性特征,识别非线性系统;压制高斯色噪声;提取信号中偏离高斯分布的信息;识别和重构非最小相位信号<sup>[9]</sup>。

随机变量  $x$  的  $k$  阶矩及累积量分别定义为第一特征函数和第二特征函数的  $k$  阶导数在原点的值,即:

$$m_k = \left. \frac{d^k (s)}{ds^k} \right|_{s=0} = E\{x^k e^{sx}\} |_{s=0} = E\{x^k\}, \tag{4}$$

$$c_k = \left. \frac{d^k (s)}{ds^k} \right|_{s=0}, \tag{5}$$

其中  $(s) = \ln (s)$ , 又  $(0) = 1$ , 从而有  $(0) = 0$ , 因此  $(s)$  可展成下面的 Taylor 级数:

$$(s) = c_1 s + \frac{1}{2} c_2 s^2 + \frac{1}{6} c_3 s^3 + \frac{1}{24} c_4 s^4 + \dots + \frac{1}{k!} c_k s^k + \dots \tag{6}$$

在工程上, 对于一个零均值的平稳随机过程  $\{x(n)\}$ , 其高阶累积量定义为:

$$c_{kx}(1, 2, \dots, k-1) = E\{x(n)x(n+1)\dots x(n+k-1)\} - E\{g(n)g(n+1)\dots g(n+k-1)\}, \tag{7}$$

其中  $\{g(n)\}$  是一个与  $\{x(n)\}$  具有相同功率谱密度的高斯过程. 由式 (6) 可看出, 高阶累积量包含了信号的高阶统计信息, 它能表征二阶统计量所不能表征的非线性关系. 由式 (7) 可看出, 高阶累积量表示信号偏离高斯分布的测度, 任意高斯过程的高阶累积量均为零, 即高阶累积量具有盲高斯噪声性, 而高斯噪声又是最普遍的一类噪声, 这非常有利于实际分析.

矩和累积量相互之间存在转换公式: 累积量-矩公式 (C-M 公式) 及矩-累积量公式 (M-C 公式), 即:

$$m_x(I) = \sum_{p=1}^q c_x(I_p), \tag{8}$$

$$c_x(I) = \sum_{p=1}^q (-1)^{q-1} (q-1)! \binom{q}{p} m_x(I_p), \tag{9}$$

其中  $\sum_{p=1}^q$  表示在  $I$  的所有分割  $(1 \leq q \leq N(I))$  内求和. 对零均值的平稳实随机过程  $\{x(n)\}$  由 M-C 公式

可得:

$$c_{2x}(1) = E\{x(n)x(n+1)\} = R_x(1), \tag{10}$$

$$c_{3x}(1, 2) = E\{x(n)x(n+1)x(n+2)\} - R_x(1)R_x(2-1), \tag{11}$$

$$c_{4x}(1, 2, 3) = E\{x(n)x(n+1)x(n+2)x(n+3)\} - R_x(1)R_x(2-3) - R_x(2)R_x(3-1) - R_x(3)R_x(1-2). \tag{12}$$

在实际应用中, 人们经常使用高阶累积量而不使用高阶矩, 主要原因如下: 理论上, 高阶累积量的使用可避免高斯有色观测噪声的影响, 而高阶矩却不能; 累积量问题的解具有唯一性, 而矩问题的解不具有唯一性; 两个统计独立的随机过程的累积量等于各个随机过程的累积量之和, 而该结论对于高阶矩却不成立<sup>[10]</sup>.

### 2.3 用四阶累积量估计最小嵌入维数的新方法

用四阶累积量函数代替相关函数构造矩阵  $T_x$ , 由于四阶累积量函数有三个变量, 而矩阵  $T_x$  只有两个变量, 所以矩阵  $T_x$  有多种形式. 为了构造矩阵  $T_x$ , 四阶累积量函数的两个变量分别沿矩阵的两组正交方向取值, 其中一组正交方向为矩阵的横向  $i$  和纵向  $j$ , 另一组正交方向为矩阵的对角线方向  $|i-j|$  和偏离对角线方向  $|i+j-d-1|$ , 第三个变量分别取  $0, |i-j|, |i+j-d-1|$ , 那么矩阵  $T_x$  元素分别为:

$$\begin{aligned} T_x^1(i, j) &= c_4(i, j, 0), \\ T_x^2(i, j) &= c_4(i, j, |i-j|), \\ T_x^3(i, j) &= c_4(i, j, |i+j-d-1|), \\ T_x^4(i, j) &= c_4(i, j, |i+j-d-1|), \\ T_x^5(i, j) &= c_4(|i-j|, |i+j-d-1|, 0), \\ T_x^6(i, j) &= c_4(|i-j|, |i+j-d-1|, |i-j|), \\ T_x^7(i, j) &= c_4(|i-j|, |i+j-d-1|, |i+j-d-1|), \\ T_x^8(i, j) &= c_4(|i-j|, |i+j-d-1|, |i+j-d-1|). \end{aligned}$$

其中  $\tau$  为延迟时间,  $i, j = 1, 2, \dots, d$ . 实验结果表明矩阵  $T_x^1$  的分析效果明显好于矩阵  $T_x^2, T_x^3, T_x^4$ ; 矩阵  $T_x^5$  的分析效果明显好于矩阵  $T_x^6, T_x^7, T_x^8$ . 由此可得出结论: 两个变量取正交方向后, 第三个变量取为零的四阶累积量函数构成的矩阵已充分反映了数据内在关系, 第三个变量取其它值反而使得数据间的相关性减弱. 还考虑了上面几个矩阵和(如  $T_x^1 + T_x^3$ )的分析效果, 实验表明矩阵和的分析效果无实质性变化.

分别对矩阵  $T_x^1$  和  $T_x^5$  进行奇异值分解, 得到奇异谱, 取奇异谱百分比大于阈值的个数为最小嵌入维数, 记作  $m$ , 该分析方法分别称作 H-SVD 和 HD-SVD.

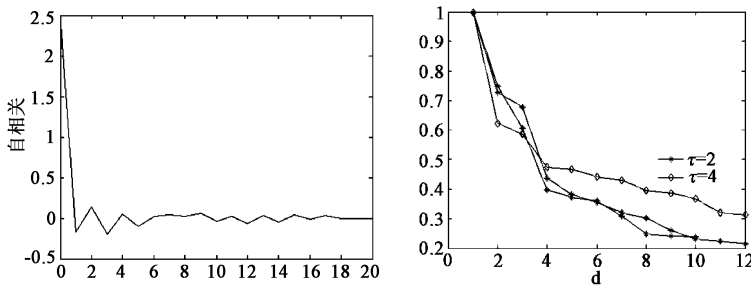
当矩阵的阶数变化时, 该类分析方法将得到不同结果, 因此该类方法必须考虑矩阵阶数的取值问题. 而目前针对矩阵阶数的取值问题文献中讨论的甚少. 根据实验结果, 矩阵阶数可在时间序列自相关函数的第一个极小值所对应的自变量值附近取值, 这是针对该问题的一种方法, 该问题有待进一步解决.

### 3 实验与分析

分析由 Henon 映射的  $x$  分量生成的时间序列:

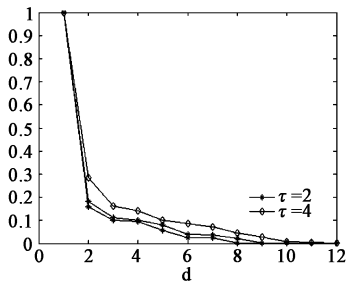
$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (13)$$

其中  $a = 1.4, b = 0.3$ , 该时序的自相关函数类似冲激函数, 只在原点处有较大值, 用于分析的矩阵的阶数值可取较大一点, 如 10、12. 图 1(d) 为延时分别取 2、3, 嵌入维数取 10 及延时分别取 2、4, 嵌入维数取 12 时, HD-SVD 得到的奇异谱的分布图. 从图 1 可看出, 当数据长度为 2000 时, 对不同的延时及嵌入维数, HD-SVD 法得到最小嵌入维数  $m = 2$  (图 1(d)), 且不受高斯白噪声的影响 (图 1(e)), 而 SVD 和 H-SVD 得到的奇异谱却不能反映原系统的维数特征, 但 H-SVD 的效果明显好于 SVD (图 1(b)、(c)). 因此对该时间序列, HD-SVD 法适合小数据量、对不同的延时及嵌入维数稳定、对噪声不敏感.

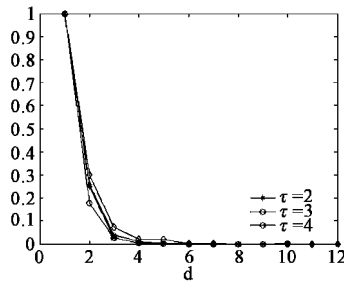


(a) 自相关函数

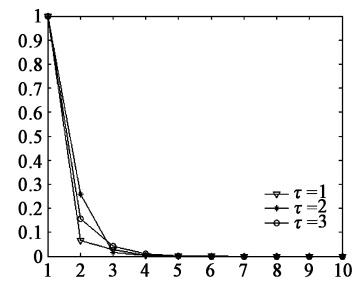
(b) SVD 得到的奇异谱



(c) H-SVD 得到的奇异谱



(d) HD-SVD 得到的奇异谱



(e) SNR = 7dB 时 HD-SVD 得到的奇异谱

图 1 Henon 映射生成时间序列的奇异谱 (用最大值归一化), (b)、(c)、(d)  $d = 10, 12$ , (e)  $d = 10$

分析由 Lorenz 模型的  $x$  分量生成的时间序列:

$$\begin{cases} \dot{x} = (y - x) \\ \dot{y} = x(R - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (14)$$

其中  $R = 16, b = 4, R = 45.92$ , 采样间隔  $t = 0.01s$  时自相关函数在自变量为 32 时第一次达到极小值, 所以该分析矩阵的阶数在 32 左右取值, 采样间隔  $t = 0.025s$  时自相关函数在自变量为 16 时第一次达到极小

值,所以该分析矩阵的阶数在 16 左右取值.从图 2 可看出,当数据长度为 2000 时,对不同的延时及嵌入维数, SVD 法、H-SVD 法和 HD-SVD 法都得到最小嵌入维数  $m = 3$ (图 2(c)、(d)、(e)),其中 HD-SVD 法的结果不受高斯白噪声的影响(图 2(g)).当采样间隔  $t = 0.025\text{s}$  时, HD-SVD 法仍得到最小嵌入维数  $m = 3$ (图 2(f)).因此对该时间序列, HD-SVD 法适合小数据量,对不同的采样间隔、延时及嵌入维数稳定,对噪声不敏感.

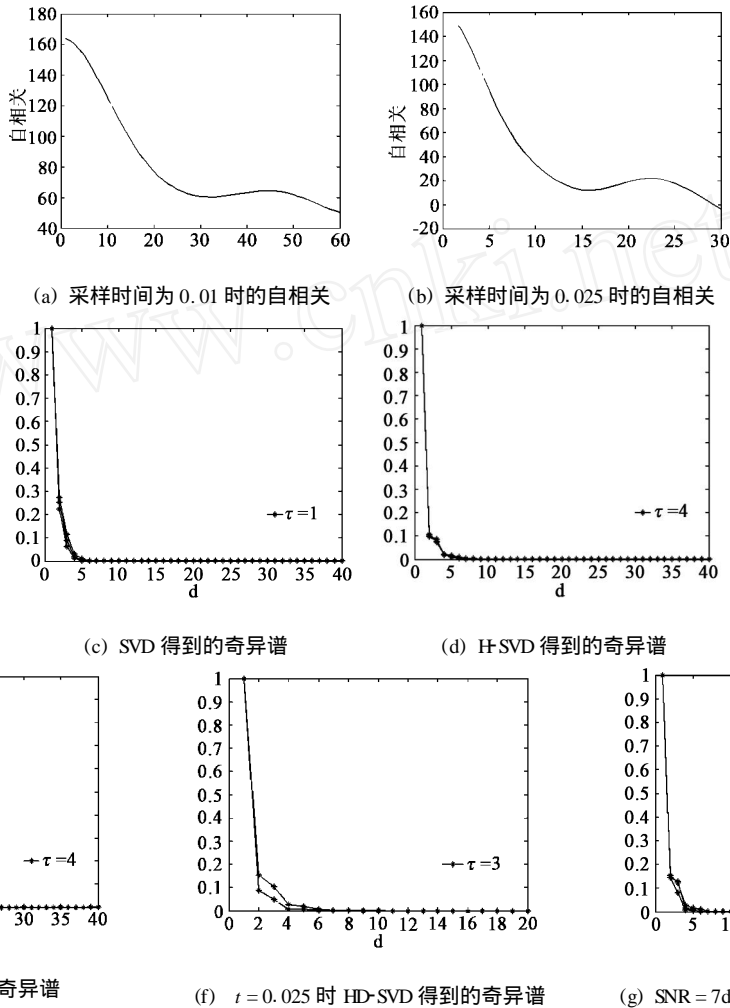


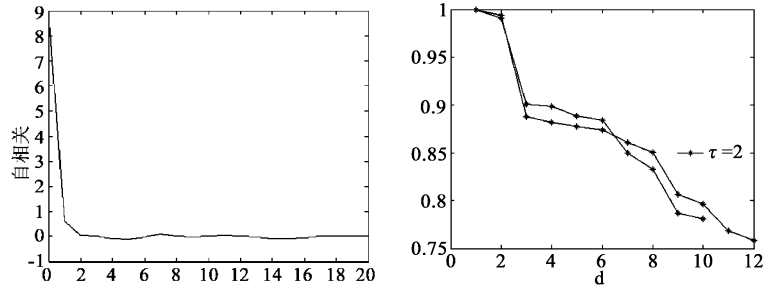
图 2 Lorenz 模型生成时间序列的奇异谱(用最大值归一化), (c)、(d)、(e)、(g)  $d = 30, 35, 40$ , (f)  $d = 15, 20$

分析由下面映射生成的时间序列:

$$x_{n+4} = \sin(x_n + 5) + \sin(2x_{n+1} + 5) + \sin(3x_{n+2} + 5) + \sin(4x_{n+3} + 5) \quad (15)$$

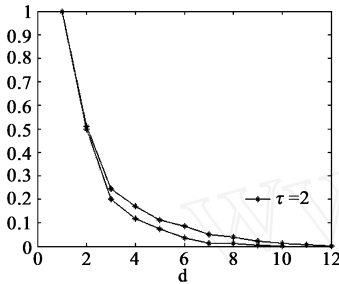
由式(15)可知该时间序列的最小嵌入维数为 4. 该时序的自相关函数类似冲激函数,其分析矩阵阶数取 10、12. 从图 3 可看出,当数据长度为 2000 时,对不同的延时及嵌入维数, HD-SVD 法得到最小嵌入维数  $m = 4$ (图 3(d)),且不受高斯白噪声的影响(图 3(e)),而 SVD 和 H-SVD 得到的奇异谱却无法反映原系统的维数特征(图 3(b)、(c)). 因此对该时间序列, HD-SVD 法适合小数据量、对不同的延时及嵌入维数稳定、对噪声不敏感.

对由 Henon 映射和式(15)生成的时间序列 SVD 法得到的奇异谱无法反映原系统的维数特征(图 1(b)、图 3(b)),对由 Lorenz 模型生成的时间序列 SVD 法是成功的(图 2(c)). 而对上述三组时间序列, HD-SVD 法都能得到满意结果,并在不同的延时、嵌入维数、采样间隔及有噪声的情况下表现出较好的鲁棒性.

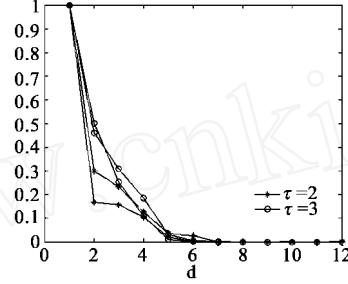


(a) 自相关函数

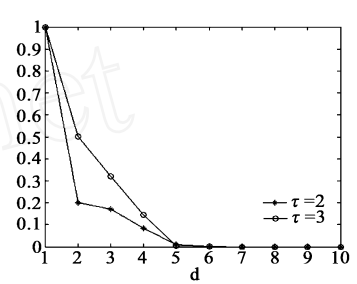
(b) SVD 得到的奇异谱



(c) H-SVD 得到的奇异谱



(d) HD-SVD 得到的奇异谱



(e) SNR = 7dB 时 HD-SVD 得到的奇异谱

图3 式(15)生成时间序列的奇异谱(用最大值归一化),  $d=10, 12$ 

## 4 结论

用四阶累积量函数代替相关函数构造矩阵,改进了估计最小嵌入维数的奇异值分解法.此方法只需要进行矩阵的乘法和奇异值分解运算,所以此方法的计算效率高.用四阶累积量函数估计最小嵌入维数的HD-SVD法与传统的方法相比有以下优点:1)判定准则客观;2)对采样时间及噪声有很好的鲁棒性;3)适合小数据量;4)计算效率高.

### 参考文献:

- [1] Takens F. Detecting strange attractors in fluid turbulence[A]. Rand D, Young L S. Dynamical Systems and Turbulence[C]. Berlin: Springer, 1981: 366 - 381.
- [2] Grassberger P, Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors[J]. Physica D, 1983, 9: 198 - 208.
- [3] Kennel M, Brown R, Abarbanel H D I. Determining embedding dimension for phase reconstruction using a geometrical reconstruction[J]. Phys Rev A, 1992, 45: 3403 - 3411.
- [4] Broomhead D S, King G P. Extracting qualitative dynamics from experimental data[J]. Physica D, 1986, 20: 217 - 236.
- [5] Mees A I, Rapp P E, Jennings L S. Singular-value decomposition and embedding dimension[J]. Phys Rev A, 1987, 36: 340.
- [6] Fraser A M. Reconstructing attractors from scalar time series: a comparison of singular system and redundancy criteria[J]. Physica D, 1989, 34: 391.
- [7] Heidari S, Nikias C L. Characterizing chaotic attractors using fourth-order off-diagonal cumulant slices[A]. 1993 Conference Record of the Twenty-Seventh Asilomar Conference on Signals Systems and Computers[C]. Pacific Grove (CA, USA): IEEE Computer Society Press. 1993, 1: 466 - 470.
- [8] Schittenkopf C, Deco G. Testing nonlinear Markovian hypotheses in dynamical systems[J]. Physica D, 1997, 104: 61 - 74.
- [9] Nikias C L, Mendel J M. Signal processing with higher-order spectra [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1993, 10: 7 - 11.
- [10] 张贤达. 时间序列分析——高阶统计方法[M]. 北京:清华大学出版社, 1996, 23 - 24.  
ZHANG X D. Time Series Analysis - the Method of Higher-order Statistics[M]. Tsinghua University Press, 1996, 3 - 24.