③
102-104

气体等熵流运动微分方程组的解析解*

O354

柴华奇[1)]　柴乃彦[2)]

(1)西北工业大学航海工程学院,710072,西安;2)西北大学数学系,710069,西安;第一作者 25 岁,男,硕士生)

A **摘　要**　给出了气体一维不定常等熵运动情形问题的解析解,拓展了此类问题的理论和应用范围。

关键词　等熵;非简单波流;解析解　　气体流动,微分方程组,
分类号　O354.1

对于等比热完全气体,忽略粘性力和质量力的一维不定常等熵运动情形,其运动方程组为:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2a}{k-1}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}=0,\ \frac{p}{\rho^k}=\frac{p_0}{\rho_0^k},\\&\frac{\partial a}{\partial t}+v\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{k-1}{2}a\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ a^2=k\frac{p}{\rho}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中 x 是空间坐标,t 是时间坐标,v 是质点的速度,a 是音速,p_0 是压力,ρ 是密度,p_0 与 ρ_0 分别为某点确定的压力和密度,而 $k=\dfrac{C_p}{C_v}$ 是常数,C_p 是等压比热,C_v 是等容比热。

当流动为非简单波情形时,有

$$J=\frac{\partial(v,a)}{\partial(x,t)}\neq 0。$$

此时将 (v,a) 当作自变量,可以将运动方程线性化,而有一个形式解。当 $\dfrac{1}{2}\dfrac{3-k}{k-1}=n$ 为正整数 $0,1,2,\cdots$ 时,形式解可表示为有限形式:

$$F=\left(\frac{\partial}{a\partial a}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{a}\cdot f_1\left(a+\frac{k-1}{2}v\right)+\frac{1}{a}f_2\left(a-\frac{k-1}{2}v\right)\right],\tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}=\frac{2a}{k-1}t,\tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}=vt-x,\tag{4}$$

式中 f_1,f_2 是待定函数,取记号

$$\begin{cases}\lambda=a+\dfrac{k-1}{2}v,\\ \mu=a-\dfrac{k-1}{2}v。\end{cases}\tag{5}$$

当 $\lambda=\text{const}$ 与 $\mu=\text{const}$ 时,将得到两组特征线。

现在讨论的非简单波流的问题是,如图 1 所示,在非特征线的活塞运动曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 上,给定了 v 与 a 的

* 国家自然科学基金资助课题
收稿日期:1994-01-11

值，求由$\widehat{AB}$与特征线$\widehat{AC}$、$\widehat{BC}$所围成的区域$\widehat{ABCA}$内的解。

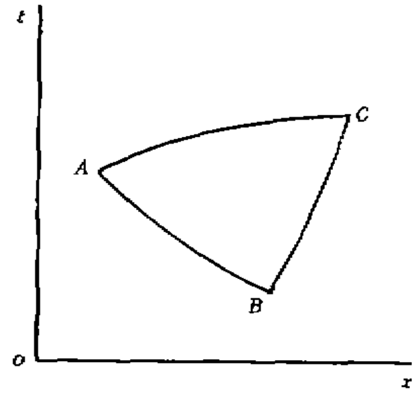

图 1　非简单波流

Fig. 1　Non-simple Wave Flow

设曲线$\widehat{AB}$的方程为

$$x = x(t), \tag{6}$$

其上给定的流动元为：

$$\left.\begin{aligned} v &= v(t), \\ a &= a(t)。\end{aligned}\right\}$$

这里为了保证流动元的单值性，限定$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}a} \neq \frac{k-1}{2}$。于是在活塞面上（即$\widehat{AB}$曲线上），由(3)和(4)有

$$\left(\frac{\partial}{a\partial a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{a^2}\{f'_1(\lambda) + f'_2(\mu) - \frac{1}{a}[f_1(\lambda) + f_2(\mu)]\} = \frac{2t}{k-1}, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial}{a\partial a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{a^2}\{f'_1(\lambda) - f'_2(\mu)\} = \frac{2}{k-1}(vt - x)。 \tag{8}$$

联立解(7)、(8)，即可求得两个未知函数$f_1(\lambda)$、$f_2(\mu)$。对于积分常数的确定，需注意到$f_1(\lambda)$、$f_2(\mu)$与F的关系。因为求解的实质是对F求微分以表达流动元，所以在曲线$\widehat{AB}$上，$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{2at}{k-1}$，$\frac{\partial F}{\partial v} = vt - x$，等式的右边与积分常数无关，于是可取所有积分常数为零。此类方程当$n = 0, 1$情形比较简单，但实际问题中常见的双原子完全气体情形，这时$k = 1.4$，$n = 2$，情形就比较复杂，我们现在讨论它的解。

当$n = 2(k = 1.4)$时，将(2)、(3)、(4)化为

$$F = -\frac{f_1(\lambda) + f_2(\mu)}{a^3} + \frac{f'_1(\lambda) + f'_2(\mu)}{a^2}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = vt - x, \tag{10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 5at。 \tag{11}$$

在曲线$\widehat{AB}$上，$t = \varphi(x)$，$v = v(x)$，$a = a(x)$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}a} \neq \pm\frac{1}{5}$。因此，$\lambda(x) = a(x) + \frac{1}{5}v(x)$；$\mu(x) = a(x) - \frac{1}{5}v(x)$。点$P(P_1, P_2)$包含于区域$\widehat{ABCA}$（图 2），$P_1$、$P_2$是从点$P$出发的特征线$\lambda = \text{const}$与$\mu = \text{const}$同曲线$\widehat{AB}$的交点，$P_1$与$P_2$唯一的决定了点$P$，也就是$\lambda(x)$与$\mu(x)$唯一刻划了区域$\widehat{ABCA}$中的任一点$P$。

设函数$\lambda = \lambda(x)$，$\mu = \mu(x)$的反函数为$x = x(\lambda)$与$x = x(\mu)$。因为$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}a} \neq \pm\frac{1}{5}$，所以这两个反函数仍为单值函数，并注意到仅当$P$点落在曲线$\widehat{AB}$上时，才有$x(\lambda) = x(\mu) = x$。

由(9)、(10)、(11)有：

$$3[f_1(\lambda) + f_2(\mu)] + 3a[f'_1(\lambda) + f'_2(\mu)] + a^2[f''_1(\lambda) + f''_2(\mu)] = 5a^2t, \tag{12}$$

$$-[f'_1(\lambda) - f'_2(\mu)] + a[f''_1(\lambda) - f''_2(\mu)] = 5a^2(vt - x), \tag{13}$$

取

$$f_1(\lambda) = \Phi_1[x(\lambda)] + \lambda\Phi_2[x(\lambda)] + \lambda^2\Phi_3[x(\lambda)], \tag{14}$$

$$f_2(\mu) = -\Phi_1[x(\mu)] + \mu\Phi_2[x(\mu)] - \mu^2\Phi_3[x(\mu)], \tag{15}$$

在曲线$\widehat{AB}$上有$x(\lambda) = x(\mu) = x$，将(14)与(15)对x求导数，则得

$$\left.\begin{aligned} f'_1 &= \Phi_2 + 2\lambda\Phi_3 - Y_1 \\ f''_1 &= 2C + Z_1 \end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

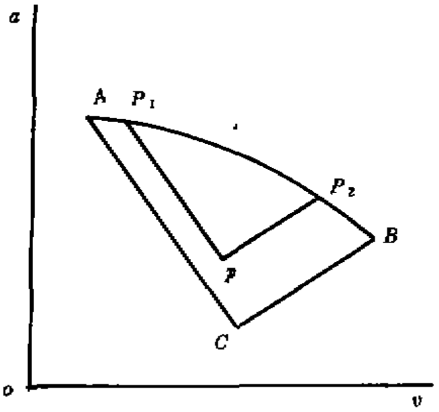

图 2 双原子完全气体

Fig. 2 Biatomic Perfect Gas

$$\left.\begin{aligned} f'_2 &= \Phi_2 - 2\mu\Phi_3 + Y_2 \\ f''_2 &= -2\Phi_3 + Z_2 \end{aligned}\right\}, \tag{17}$$

其中
$$Y_1\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = \Phi'_1 + \lambda\Phi'_2 + \lambda^2\Phi'_3, \tag{18}$$

$$Z_1\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = Y'_1 + \Phi'_2 + 2\lambda\Phi'_3, \tag{19}$$

$$Y_2\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = -\Phi'_1 + \mu\Phi'_2 - \mu^2\Phi'_3, \tag{20}$$

$$Z\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = Y'_2 + \Phi'_2 - 2\mu\Phi'_3。 \tag{21}$$

为了确定 $f_1(\lambda)$ 与 $f_2(\mu)$，不失一般性，可以给定 $Y_1 = Y_2 = Y$。则在曲线 $\widehat{AB}$ 上有 $Y = \frac{25}{2}a^2F$，而 F 在 $\widehat{AB}$ 上可以看做是已知函数(若允许相差一个常数)。而由(18) ~ (21) 方程可直接解得

$$\begin{aligned} \Phi'_1 = &-\frac{1}{4}\{[25a^2 - 3v^2]F - 5a^2[v^2 - 25a^2]\varphi(x)\}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \\ &+ \frac{25}{4}a\{[v\varphi(x) - x](v^2 - 25a^2) - 2vF\}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\Phi'_2 = \frac{25}{2}a[F - v^5\varphi(x) + v(x)]\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}, \tag{23}$$

$$\Phi'_3 = \frac{25}{4}a[v\varphi(x) - x]\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{4}[3F + 5a^2\varphi(x)]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}。 \tag{24}$$

解上述 3 个方程便得到 Φ_1,Φ_2,Φ_3。因为 $\frac{\partial F}{\partial a} = 5at$ 与 $\frac{\partial F}{\partial v} = vt - x$，均与积分常数无关，故可取其为零，于是 Φ_1,Φ_2,Φ_3 便可完全确定。将 Φ_1,Φ_2,Φ_3 中的 x 分别以 $x(\lambda)$ 与 $x(\mu)$ 代之，相应地再代入(14) 与(15)，便得到 $f_1(\lambda)$ 与 $f_2(\mu)$ 的表达式，再由(9) 便完全确定了函数 $F(\lambda,\mu)$。若需回到物理平面时，也只需用(10) 与(11) 即可实现。

参 考 文 献

1 柴乃序．激波和简单波的相互作用．北京大学学报(自然科学版)，1964，10(2)：158～164

2 柴乃序．气体的非简单波流．西北大学学报(自然科学版)，1981，11(2)：21～28

责任编辑 张素敏

The Analytical Solution of Differential Movement Equations of the Isoentropic Gas Flow

Chai Huaqi[1)] Chai Naixu[2)]

(1)Department of Navigation, Northwestern Polytechnical University, 710072, Xi'an;

2)Department of Mathematics, Northwest University, 710069, Xi'an)

Abstract For one-dimentional unsteady gas flows, isoentropic movements are more complicate than isothermal movements. The analytical solution of isoentropic movement equations is obtained. Then a great step is made in scope of theories and applications of isoentropic movements.

Key words isoentropic; unsimple-wave gas flow; analytical solutions