1997年10月 西北大学学报(自然科学版) Oct. 1997
第27卷第5期 Journal of Northwest University(Natural Science Edition) Vol. 27 No. 5

④ 385-388

长程关联的仿射 Toda 理论*

0413.3

赵少游 赵 柳

(西北大学现代物理研究所,710069,西安;第一作者25岁,男,硕士研究生)

摘 要 给出了一种长程关联的Toda场模型,并讨论这种模型与标准近邻作用仿射Toda场模型的联系。

关键词 可积体系;仿射Toda场;近邻作用;长程关联

分类号 O413.3

70年代,M. Toda[1]提出了含近邻指数作用的Toda力学链,随后二维完全可积体系的共形Toda场模型和有质量的仿射Toda场模型成了人们普遍关注的精确可解模型[2~4],这些模型研究的都是近邻相互作用。在本文中,我们给出一种非近邻长程关联的仿射Toda场模型,并讨论这种模型与标准的近邻作用仿射Toda模型的联系。

1 标准近邻Toda模型

在可积体系的研究中,Lax pair是重要的工具。Tada力学中,Lax pair定义如下[5]:

$$L = \sum_i \dot{q}_i H_i + \sum_\alpha e^{\alpha\cdot q}(E_\alpha + E_{-\alpha}),$$
$$M = \sum_\alpha e^{\alpha\cdot q}(E_\alpha - E_{-\alpha})。\tag{1}$$

式中,α为任一李代数的素根,$E_{\pm\alpha}$为$\pm\alpha$所对应的本征矢,H_i为李代数的Cartan子代数,对i的求和取遍Cartan子代数。

在Toda场中Lax pair则有下面的表达式

$$A_+ = \frac{1}{2}\partial_+ \Phi + \exp(-\frac{1}{2}d\Phi)\mu_+,$$
$$A_- = -[\frac{1}{2}\partial_- \Phi + \exp(\frac{1}{2}ad\Phi)\mu_-]。$$

式中$\Phi = \sum_i \phi\alpha_i \cdot H$;$\mu_\pm = \pm\sum_i E_{\pm\alpha_i}$。这里的$\alpha$,$H$和$i$的取值和式(1)中的相同。

以典型李代数A_r为例,我们说明力学和场论的的Toda模型。对于普通李代数A_r其秩为r,而仿射李代数$A_r^{(1)}$其秩为$r+1$,当$r\to\infty$时,Toda模型的Toda链是一个无穷长开链,当r有限时,其Toda链是闭的循环链,而在场论模型中,普通李代数A_r对应的是共形场模型。$A_r^{(1)}$仿射代数则对应于有质量场模型。在本文中,我们研究的是有质量场的长程关联,故我们将选用$A_r^{(1)}$型仿射李代数。

这样由式(1)我们可等价地得到方程

$$\frac{\partial}{\partial t}L = [L, M],\tag{3}$$

同时由式(2)我们可推出零曲率条件:

$$\partial_- A_+ - \partial_+ A_- + [A_+, A_-] = 0。\tag{3'}$$

---

* 国家攀登计划项目资助课题

收稿日期:1997-06-20

2 长程关联的 Toda 场模型

为了得到长程关联的有质量的 Toda 场模型，同样，我们引入 Lax pair：

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{\beta}{2}\partial_+\Phi + m\exp(-\frac{\beta}{2}ad\Phi)\mu_+, \\ A_- &= -[\frac{\beta}{2}\partial_-\Phi + m\exp(\frac{\beta}{2}ad\Phi)\mu_-]。\end{aligned} \tag{4}$$

其中：$\Phi = \sum_{i=0}^{r}\varphi^i\alpha_i\cdot H$；$\mu_\pm = \sum_{\pm ht\alpha = k} E_{\pm\alpha}$；$\beta, m$ 为常数。为了明确起见，对于仿射型李代数 $A_r^{(1)}$，这时高度为 k 的根矢量 α 具有标准形：$\pm\alpha = \pm\alpha_i \pm \alpha_{i+1} \pm \alpha_{i+2} \pm \cdots \pm \alpha_{i+k-1}$，其中 α_i 为素根，且令 $\alpha_{r+l} \equiv \alpha_l (l \leqslant r)$，这样其所对应的 Toda 链将是循环链。

零曲率条件可由 Lax pair 的相容性条件求得：

$$\partial_- A_+ - \partial_+ A_- + [A_+, A_-] = 0。 \tag{5}$$

把式(4) 代入式(5)，我们可以得到运动方程如下：

$$\partial_+\partial_-\Phi + \frac{m^2}{\beta}[\exp(-\beta ad\Phi_+)\mu_+, \mu_-] = 0。 \tag{6}$$

再把 $\Phi, \mu_\pm$ 的表达式代入上式，并考虑 Cartan-weyl 基的生成关系

$$\begin{aligned} &[H_i, H_j] = 0,\ i, j = 0,1,2,\cdots,r, \\ &[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha,\ i = 0,1,2,\cdots,r, \\ &[H_i, E_{-\alpha}] = -\alpha_i E_{-\alpha},\ i = 0,1,2,\cdots,r, \\ &[H_i, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i,\ i = 0,1,2,\cdots,r, \end{aligned} \tag{7}$$

以及 $\qquad (\alpha_j \cdot \alpha_i) = \hat{K}_{ij} = \hat{K}_{ji}。$

其中 $\hat{K}_{ij}$ 为 $A_r^{(1)}$ 李代数的 Cartan 矩阵，并且它满足如下关系：

$$\sum_{i=0}^{r}\hat{K}_{ij} = \sum_{j=0}^{r}\hat{K}_{ij} = 0。$$

由此可得：

$$\partial_+\partial_-\sum_{j=0}^{r}\varphi^j\alpha_j\cdot H + \frac{m^2}{\beta}\sum_{j=0}^{r-k+1}\sum_{n=0}^{k-1}\prod_{l=0}^{k-1}\omega_l\alpha_{j+\lambda}\cdot H = 0。 \tag{8}$$

化简上式，便可得运动方程的分量式：

$$\partial_+\partial_-\varphi^j + \frac{m^2}{\beta}\sum_{n=0}^{k-1}\prod_{l=0}^{k-1}\omega_{l+j-n} = 0。 \tag{9}$$

式中，$\omega_j = \exp(-\beta\sum_{j=0}^{k-1}\varphi^j\hat{K}_{jl})$。

由式(9) 我们可以看出：

$$\partial_+\partial_-\varphi^j = f(\varphi^j, \varphi^{\pm1}, \varphi^{\pm2}, \cdots, \varphi^{\pm(k-1)})。$$

即：$\partial_+\partial_-\varphi^j$ 是 $\varphi^j, \varphi^{\pm1}, \cdots, \varphi^{\pm(k-1)}$ 的函数，所以在定义了 k 为“力程”之后可以得到如下结论：对于相对位置 φ^j 来说，此 Toda 场模型是一种 φ^j 和 $\varphi^{\pm1}, \varphi^{\pm2}, \cdots, \varphi^{\pm(k-1)}$ 均有相互作用的极其复杂的长程作用模型，这种模型很显然是与标准 Toda 场的近邻作用不同的一种模型，但是经仔细研究，发现它们有着相当程度的联系，在下一节里，我们将着重讨论上述二者之间的联系，并将指出其中的不同。

3 长程关联 Toda 场模型和标准近邻作用 Toda 场模型的联系

为了研究长程关联和标准近邻作用，我们引入下面的变换：

$$\varphi^j \to \phi^j = \varphi^j - \varphi^{j-1} \quad ,\quad j = 0,1,2,\cdots,r, \tag{10}$$

其中 $\varphi^{r+l} = \varphi^l \quad (l \leqslant r)$。式(10) 的变换可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^j \\ \vdots \\ \phi^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^j \\ \vdots \\ \varphi^r \end{pmatrix} \tag{11}$$

记(11) 中的方阵为 M,其秩是 $r+1$ 维的。对矩阵 M 取行列式, $\det|M| = 0$。
这样我们发现式(10) 的变换是不可逆的,因此 ϕ^j 不能忠实地反映 φ^j 中的全部信息,然而它的确可以部分地反映原系统的某些特征。

下面,我们讨论经变换后的 ϕ^j。

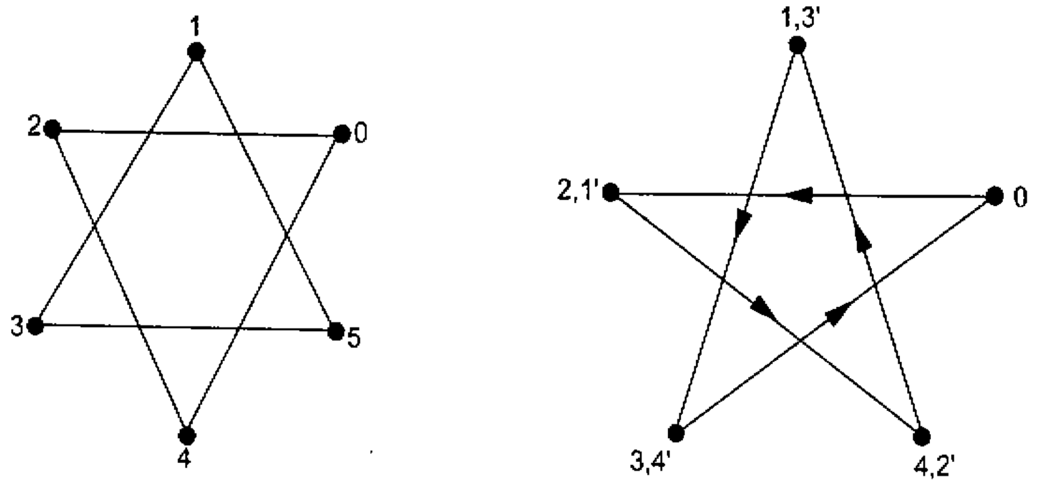
把(10) 式代入(9) 式得:

$$\partial_+ \partial_- \phi^j = \frac{m^2}{\beta}\{\exp[-(\phi_{j-k} - \phi_j)] - \exp[-(\phi_j - \phi_{j+k})]\}。 \tag{12}$$

上式中,当 $k = 1$ 时即是标准的 Toda 方程,这种方程的精确求解已有许多种标准方法,例如,Hirota 的双线性变换法就是其中之一[6~9]。利用完全相同的方法将给出任一长程关联的精确解,这里我们将不再重复。当 $K \geqslant 2$ 时,在 Toda 链上,只有第一个格点和第 k 个格点相互作用,而中间相隔的各个格点的作用被完全抵消,但是经过变换我们可以使这种 Toda 链的长程关联本质的等价于标准 Toda 近邻作用。

当 $2 \leqslant k < \infty$ 且 k 与仿射李代数的秩 $r+1$ 可约时,如附图 a 所示,我们的长程关联可以约化成几个彼此解耦的近邻作用的 Toda 方程;

当 $2 \leqslant k < \infty$ 且 k 与 $r+1$ 互质时,我们做变换,令: $j + nk \to j + n \quad n = 0,1,2,\cdots,j$, j 表征第 j 个格点。则如附图 b 所示,我们的长程关联将本质地变成近邻作用 Toda 方程。



(a)　　　　(b)

附图　长程关联与近邻作用关系

Fig　Relation between Long-range and Nearest Neighbor Interacting

但是,当 $r \to \infty$ 时,由于不存在 Toda 链的循环问题,故我们的长程关联与标准的近邻相互作用 Toda 方程有本质的不同。

在图 1 中 $k = 2, r+1 = 6$,含两个独立近邻作用,在图 2 中 $k = 2, r+1 = 5$,如记格点 2 为 $1'$,4 为 $2'$;1 为 $3'$;3 为 $4'$,则此长程作用本质地等价于近邻作用。

4 结　论

本文我们构造了长程关联的仿射 Toda 场模型,并指出了这种长程关联和标准近邻作用 Toda 模型

的联系,同时,正如文中所述,由于 φ 到 φ' 的变换不可逆,它们之间还存在着不完全等价性,因此对关于 φ' 的复杂的长程关联将是我们以后研究的一个课题,对于其中更深刻的物理背景还有待于进一步地研究。

本文作者之一赵少游感谢石康杰教授所给予的鼓励和支持。

参 考 文 献

1 Toda M. Vibration of a chain with non-linear interaction. J. Phys. Soc. Jpn., 1967,22:431

2 Babelon O, Bonora L. Conformal affine sl(2) Toda field theory. Phys. Lett., 1990, B244:220~226

3 Chao L. Integrable systems and two dimensional gravity from conformally reduced WZNW model. Commun Theory Phys, 1993, 20(2):221~230

4 Hou B Y, Chao L. From integrability to conformal symmetry. Int. J. Mod.Phys., 1993, A8:1 105~1 124;Bosonic supercoformal affine Toda theory. Int. J. Mod.Phys., 1993, A8:3 773~3 790

5 Lax P D. Integrals of non-linear equation of evolution and solitary waves. Comm. Pure Appl. Math, 1968, 21: 467

6 Hirota R. Nonlinear partial diffence equations Ⅱ. discrete-time Toda equation. J. Phys. Soc. Jpn., 1977, 43(6): 2 075

7 Hirota R. Discrete analogue of a generalized Toda equation. J. Phys. Soc. Jpn., 1981, 50(11):3 785

8 Houowood T. Solitions in affine Toda field theories. Nucl. Phys., 1992, B384:269~273

9 王延申,赵柳. 非手征对称的共形 Toda 场的孤立子解. 中国科学(A 辑), 1995(3):268

责任编辑 曾大刚

Long-range Interacting in Affine Toda Theory

Zhao Shaoyou Zhao Liu

(Institute of Moden Physics, Northwest University, 710069, Xi'an)

Abstract A series of generalized Toda field theory involving long-range interacting is given, and the relations between these models and the standard nearest neighbor interacting are discussed.

Key words integrable systems; affine Toda field; nearest neighbor interacting; long-range interacting