

管内振荡流中轴向有效扩散系数的确定

叶晓峰

(上海交通大学机械与动力工程学院, 上海 200030)

摘要: 将管内振荡流中物质扩散系统近似地作为一维非稳态系统, 分析了用脉冲注射法确定振荡流中轴向物质扩散系数时, 扩散物初始分布的两种形态—正态分布和矩形分布对有效扩散系数测定精度的影响. 分析结果表明, 如果浓度测定点与注入点间的距离大于扩散物初始分布宽度的10倍, 计算误差将小于1%. 实验所用圆管长2.5 m, 内径6 mm, 扩散系统的Schmidt数3590, 流体振动幅度30~200 mm, Womersley数2.38~10.64. 实验结果与理论计算结果具有良好的一致性.

关键词: 振荡流; 管内流; 强化扩散; 有效扩散系数

中图分类号: TQ021.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-606X(2003)04-0302-06

1 前言

如果把具有分子扩散能力的物质投入到管内振荡流中, 那么它将在管轴方向以很快的速度扩散. 理论研究^[1,2]表明, 被扩散物在管内振荡流中的快速扩散或传播是 Taylor 扩散^[3]和流体往复运动相互作用的结果, 其综合轴向扩散速度可以比扩散物的分子扩散系数高几个数量级. 质扩散和热扩散在数学物理特征上是一致的, 因此振荡流对扩散的增强作用也体现在热量的扩散上^[4]. 振荡流的这种对扩散的增强作用在生命维持系统、化工、高效传热领域都得到了应用^[5-7].

质量(或热量)在管内振荡流中的轴向综合扩散能力通常是以振荡周期平均的轴向扩散系数来衡量的. 扩散系数的测量精度对于正确评价振荡激励型扩散装置至关重要. 迄今为止, 不少研究者提出了各种等效轴向扩散系数的计算和测量方法^[8-10], 但这些方法都不同程度地存在着测量时间长、操作复杂和测量精度低的缺点. 本研究将管内振荡流中物质扩散系统近似地作为一维非稳态系统, 采用脉冲注入法测定扩散物在轴线方向的综合扩散系数. 脉冲注入测定法虽然快速简便, 但对扩散物的注入要求比较高, 扩散物注入后的初始分布形态将影响扩散系数的计算精度. 本文分析了几种典型的扩散物初始分布形态所对应的浓度信号变化特征及测量和计算精度与浓度信号采集点配置的关系, 为实验系统的设计和优化提供理论依据.

2 等效轴向扩散系数的确定

2.1 脉冲注入测定法的原理

脉冲注入测定法就是以极快的速度向振荡流体内注入少量扩散物(即示踪剂), 记录管道内扩散物浓度的变化信号, 经数学处理求得等效轴向扩散系数. 这种方法类似于模态分析中确定传递函数的单位脉冲法.

当管道长度远远大于管径时, 扩散物在管道内的分布可以近似看作是一维的. 这时振荡流中管截面上平均浓度的基本扩散方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u(t) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (1)$$

其中, K 代表 Taylor 扩散和分子扩散的综合结果.

在对称往复振荡流中, $u(t)$ 为平均值为零的周期性变化函数. 如果以周期平均的角度来考虑其中的扩散过程, 那么它与通常的静态扩散在数学特征上是一样的. 通过引入有效扩散系数 D_{eff} , 模型方程可简化为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_{\text{eff}} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (2)$$

式(2)与无限大物体一维非稳态导热过程的数学方程式类似, 可以用变量分离法求解^[11].

对于初始条件 $C(x, t=0)=f(x)$ 和边界条件 $C(x=\pm\infty)=0$, 式(2)的解为

$$C(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_{\text{eff}} t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D_{\text{eff}} t}} d\xi, \quad (3)$$

根据式(3)可求出在各种初始条件下管内扩散物浓度的分布及变化情况.

如果在 $x=0$ 处向振荡的流体中快速注入总量为 M 的扩散物, 那么就相当于建立了一个以注入时刻为零时刻的脉冲型初始浓度分布, 即 $f(x)=C(x, t=0)=M\delta(x)$, 代入式(3)得:

$$C(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_{\text{eff}} t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D_{\text{eff}} t}} d\xi, \quad (4)$$

这是一个以 $x=0$ 为中心的正态分布函数, 其方差 $[\sigma(t)]^2=2D_{\text{eff}}t$ 随时间不断增大.

在距注入点 x 处的管内扩散物浓度变化如图 1 所示. 在 $t_m=x^2/2D_{\text{eff}}$ 时刻浓度曲线出现峰值, 据此可得到

$$D_{\text{eff}} = \frac{x^2}{2t_m}, \quad (5)$$

式(5)表明, 在某一给定的位置, 根据浓度变化曲线峰值出现的时刻就可确定有效轴向扩散系数 D_{eff} . 为了减小时间测量值的相对误差, 提高式(5)的计算精度, 测量点应尽可能远离注入点. 将 $t_m=x^2/2D_{\text{eff}}$ 代入式(4), 得到浓度变化曲线的峰值

$$C_m = C(x, t = t_m) = \frac{M}{\sqrt{2\pi e}} \frac{1}{x}, \quad (6)$$

它与测点距离 x 成反比. 因此, 为保证浓度的测量精度, 应提高浓度传感器的分辨率.

2.2 扩散物初始分布形态的影响

用脉冲注入法确定有效扩散系数是以扩散物注入后呈脉冲状分布为前提的, 而脉冲函数是一种理想函数, 实际上无法真正实现, 而且每次注射后得到的扩散物初始分布缺乏一致性. 因此, 讨论扩散物初始分布形态对测量精度的影响是有实际意义的.

为了减小扩散物的初始分布宽度, 采用自动注射装置将扩散物在流体振荡的死点(左死点或右死点)快速注入, 但扩散物注入到管内后其分布总是有一定宽度的. 由于扩散物注入后的分布形态难有重现性, 因此以下对正态分布和矩形分布的情况进行讨论. 可以认为实际初始分布对测量的影响与这两种典型分布有同一量级.

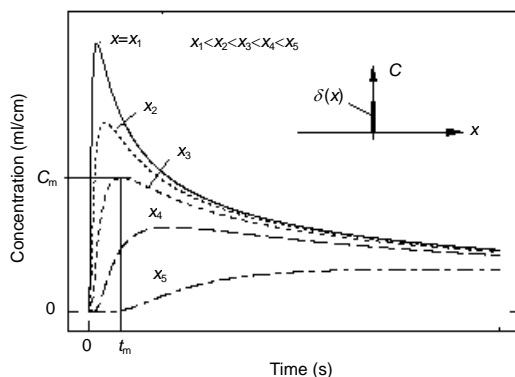


图 1 管轴方向不同位置处对脉冲注入的响应
Fig.1 Responses of concentration at different axial locations to pulsed injection

(1) 方差为 σ_0^2 的正态分布:

$$f(x) = C(x, t = 0) = \frac{M}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}$$

(2) 宽度为 $2a$ 的矩形分布:

$$f(x) = C(x, t) = \begin{cases} \frac{M}{2a} & (|x| \leq a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

上述两种情况所对应的管内浓度变化和浓度曲线峰值出现的时刻分别如表 1 所示. 从表中可以看到, 对于方差为 σ_0^2 的正态初始浓度分布, 浓度曲线上的峰值比理想情况(初始分布函数为脉冲函数)在时间上早 $\sigma_0^2/2D_{\text{eff}}$ 出现. 而对于总宽度为 $2a$ 的矩形分布, 浓度曲线上峰值时刻的误差随着注入点-测点间距的增大而减小. 当 $a/x \rightarrow 0$ 时, $t_m \rightarrow x^2/2D_{\text{eff}}$. 上述两种初始分布所导致的计算误差如图 2 所示. 从图中看到, 对于相同的注入点-测点距离 x , 矩形初始浓度分布对扩散系数计算的影响小于正态分布. 但是, 只要 x/a 或 $x/\sigma_0 > 10$, 两者的计算误差都将小于 1%.

表 1 两种类型初始浓度分布形态所对应的浓度峰值时刻

Table 1 Concentration variations and peak-time for two initial tracer distribution

Initial mode of distribution	Distribution and variation of concentration	Peak time
Normal distribution	$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_0^2 + 2D_{\text{eff}}t}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_0^2 + 2D_{\text{eff}}t)}}$	$t_m = \frac{x^2}{2D_{\text{eff}}} \left[1 - \left(\frac{\sigma_0}{x} \right)^2 \right]$
Rectangular distribution	$C(x, t) = \frac{M}{2\sqrt{\pi}a} \int_{-(a+x)/2\sqrt{D_{\text{eff}}t}}^{(a-x)/2\sqrt{D_{\text{eff}}t}} e^{-\eta^2} d\eta$	$t_m = \frac{ax}{D_{\text{eff}}} \left[\ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right) \right]^{-1}$

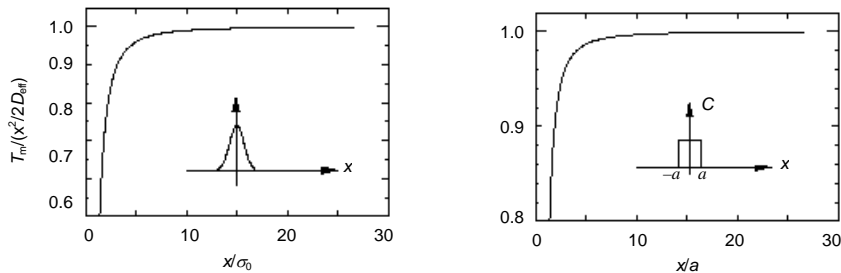


图 2 初始浓度分布形态对 t_m 的影响

Fig.2 Effects of initial tracer concentration distributions on t_m

3 实验

3.1 实验装置

图 3 是实验系统的简图. 实验用直管为长 2.5 m、内径 6 mm 的有机玻璃透明管, 管内流体由作简谐运动的活塞驱动. 扩散物用微机控制的自动注射装置注入, 在本实验中扩散物的注入时刻为流体运动的左死点(此时管内流体的左向位移最大, 断面平均流速为零). 管内扩散物的浓度用光电传感器(型号: BS500B, SHARP Co. Ltd)测得. 扩散物注入点和浓度传感器分别距直管两端 $1/3$ 管长, 目的是尽量减小管道端部效应的影响.

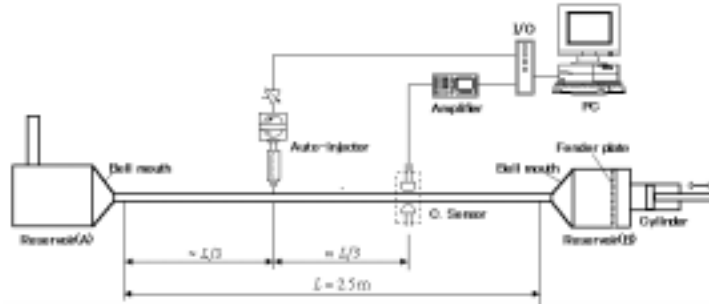


图 3 实验装置简图

Fig.3 Schematic diagram of experimental apparatus

实验中用分子扩散系数为 $2.78 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ 的水溶性染料作为示踪剂，测定时每次的注入量为 0.25 ml. 实验条件如图 4 所示，流体振荡幅度 $\Delta x = 30 \sim 200 \text{ mm}$ ，振动频率 $f = \omega/2\pi = 0.1 \sim 2.0 \text{ Hz}$ (间隔 0.2 Hz)，无量纲振动角频率 $\alpha = 2.38 \sim 10.64$. 图中 $Re_\delta = Re/(2^{0.5}\alpha)$ 是以 Stokes 边界层厚度为代表长度的雷诺数. 层流稳定性的相关实验结果表明，当 $Re_\delta < 535$ 时流体速度显示出层流特征^[12].

在测定管内扩散物浓度之前，进行了自动注射装置的预备性实验. 自动注射装置的动力由一个直径为 35 mm 的气动冲击缸提供，当气源压力为 $2 \times 10^5 \text{ Pa}$ 时，注入过程时间小于 0.1 s，注入后扩散物的分布宽度为 1.2 cm (6 次测定的平均值). 对于图 3 所示的实验系统， $x = 250/3 = 83.3 \text{ cm}$ ，而 $83.3/0.6 \gg 10$ ，根据前面的分析，扩散物初始分布宽度所导致的计算误差 $\ll 1\%$.

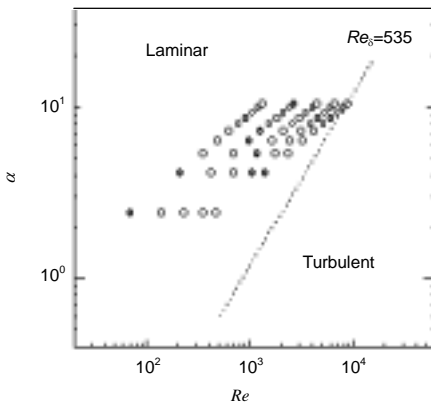


图 4 实验条件图

Fig.4 Map of flow conditions

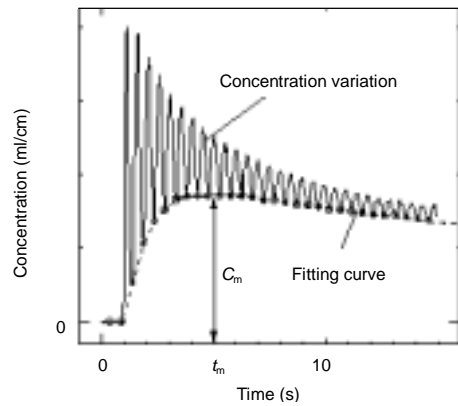


图 5 用最小二乘法确定 D_{eff} 实例

Fig.5 An example of D_{eff} determination by L.S.M. fitting method

3.2 有效扩散系数的计算

式(5)表明，根据管内扩散物浓度曲线的峰值时刻就可以确定扩散物在管内振荡流中的有效轴向扩散系数. 为了提高浓度曲线峰值时刻 t_m 的精度从而减小计算误差，采用曲线回归法确定 t_m .

根据式(4)，用方程

$$C(x,t) = c/\sqrt{t}e^{-b/t}, \tag{7}$$

对扩散物浓度信号进行最小二乘法拟合，式(7)所代表的曲线在 $t_m = 2b$ 处出现峰值. 因此，在用最小二乘法求出 b 值后，可以由下式计算出有效扩散系数

$$D_{\text{eff}} = \frac{x^2}{2t_m} = \frac{x^2}{4b}, \tag{8}$$

式(8)与式(5)的区别在于,式(8)中的 b 值综合了在极值点附近的实验数据占的信息,因而式(8)的计算精度较高.

图 5 所示的是用最小二乘法拟合浓度曲线的实例($\Delta x=74$ mm, $f=2$ Hz, $\alpha=10.64$). 由于如前所述,扩散物的注入时刻[相当于式(4)的零时刻]是在流体振荡的左死点,因此曲线拟合时使用了流体振荡左死点对应的浓度数据.

4 实验结果及讨论

实验按图 4 所示的条件进行,自动注射装置和数据采集系统确保示踪剂的定点注入、浓度信号记录和死点数据的捕捉. 实验结果如图 6 所示,图中纵坐标是无量纲化了的有效轴向扩散系数,它代表振荡流对扩散的增强作用. Watson^[2]对层流振荡流中物质的扩散进行了研究,对其分析结果进行整理可得以下理论公式

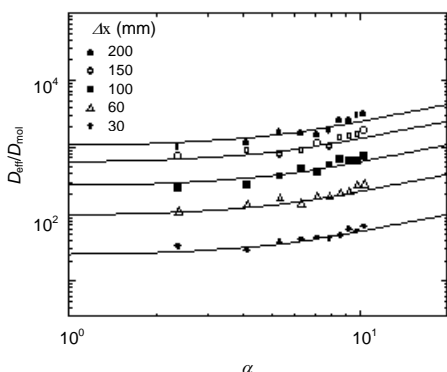


图 6 实验结果与 Watson 理论值的比较
Fig.6 Comparison of experimental results with Watson's theory

$$\frac{D_{\text{eff}}}{D_{\text{mol}}} = 1 + h(\alpha, Sc) \frac{V^2}{R^6}, \quad (9)$$

其中

$$h(\alpha, Sc) = \frac{\alpha^3}{4\pi^2(1-Sc^{-2})} \frac{T_3(\alpha) - \frac{T_2(\alpha)T_3(\alpha Sc^{0.5})}{S^{0.5}T_2(\alpha Sc^{0.5})}}{\alpha^2 T_1(\alpha) - 4\alpha T_4(\alpha) + 4T_2(\alpha)},$$

而

$$T_1(\xi) = \text{ber}^2 \xi + \text{bei}^2 \xi, \quad T_2(\xi) = (\text{ber}' \xi)^2 + (\text{bei}' \xi)^2,$$

$$T_3(\xi) = \text{ber} \xi \text{ber}' \xi + \text{bei} \xi \text{bei}' \xi, \quad T_4(\xi) = \text{ber} \xi \text{bei}' \xi - \text{ber}' \xi \text{bei} \xi,$$

式中的 ber 和 bei 分别是贝塞尔函数 $J_0(\xi i^{0.5})$ 的实部和虚部, 即

$$J_0(\xi i^{0.5}) = \text{ber} \xi + i \text{bei} \xi.$$

式(9)右边的“1”代表扩散物本身的分子扩散,一般情况下它与扩散的增强倍数 $D_{\text{eff}}/D_{\text{mol}}$ 相比可略去不计,因此可以认为层流振荡流对扩散的增强作用与流体振幅的平方成正比. $h(\alpha, Sc)$ 是 Womersley 数 α 和 Schmidt 准数 Sc 的函数,它实际上反映了流体振荡周期和扩散物在管道径向扩散的时间常数之间的相互关系,是对扩散增强系统进行优化的重要依据.

图 6 中的实线即是式(9)的理论计算值. 总的来看,实验数据与理论值具有较好的一致性,这验证了轴向扩散系数与流体振幅的平方确实是成正比的. 这种比例关系也可以从振荡流强化扩散的原理上得到解释. 在流体静止的情况下,扩散物在管轴方向只能通过狭小的管道截面由高浓度区向低浓度区扩散,对于大多数扩散物来说,其扩散的速度是极低的. 而在层流振荡流的情况下,管内流体的流速分布呈抛物面形,高浓度区和低浓度区的接触面被扩大了,显然其扩大的比例与流体的振幅成正比. 另一方面,由于扩散面被轴向拉长,扩散将更多地是在管径方向上进行,这种形式扩散的结果是流体在半个振荡周期后回到原来的位置,而扩散物的分子微粒将“遗留”在新的位置,亦即在轴向被迁移了某段距离,这种距离也显然是与流体的振幅成正比的. 由此来看,振荡强化扩散实质上是对分子扩散能力的“放大”,如果被扩散物本身不具备分子扩散能力,那么振荡流也是无法发挥作用的.

从图 6 也可以看到,随着流体振幅和频率的增大,有些数据与理论值有较大的偏差. 这可能与流体中开始产生条件性弱乱流有关^[13].

符号表：

a, b, c	常数	Sc	施密特(Schmidt)准数 ($Sc = \nu/D$)
C	扩散物浓度 (ml/cm^3)	t	时间 (s)
D_{eff}	轴向有效扩散系数 (cm^2/s)	t_m	浓度峰值对应的时刻 (s)
D_{mol}	扩散物的分子扩散系数 (cm^2/s)	$u(t)$	管内流体的截面平均流速 (cm/s)
f	振荡频率 (Hz)	u_m	管内流体截面平均流速的最大值 (cm/s)
$f(x)$	扩散物初始分布函数	V	流体的体积振幅 (cm^3)
$h(\alpha, Sc)$	函数, 见式(9)	X	管轴方向坐标 (cm)
$J_0(\zeta^{0.5})$	零阶贝塞尔函数 ($i = \sqrt{-1}$)	Δx	管内流体的振幅 (cm)
M	注入的扩散物的量 (ml)	α	Womersley 数, $\alpha = R(\omega/\nu)^{0.5}$, 无量纲振动角频率
R	管道半径 (cm)	$\alpha(x)$	单位脉冲函数
Re	雷诺数 ($Re = 2Ru_m/\nu$)	σ_0	方差 (cm)
Re_δ	以 Stokes 边界层为代表长度的雷诺数	ν	流体的运动粘度系数 (cm^2/s)
	$[Re_\delta = Re/(2^{0.5}\alpha)]$	ω	振动角频率 (r/s)

参考文献：

- [1] Chatwin P C. On the Longitudinal Dispersion of Passive Contaminant in Oscillatory Flows in Tubes [J]. J. Fluid Mech., 1975, 71: 513–527.
- [2] Watson E J. Diffusion in Oscillatory Pipe Flow [J]. J. Fluid Mech., 1983, 133: 233–244.
- [3] Taylor G I. Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through a Tube [J]. Proc. R. Soc. Lond. Serial A, 1953, 219: 186–213.
- [4] Kurzweg U H. Enhanced Heat Conduction in Fluids Subjected to Sinusoidal Oscillations [J]. Trans. ASME C: J. Heat Transfer, 1985, 107: 459–462.
- [5] Slutsky A S, Drazen J D, Ingram R H, et al. Effective Pulmonary Ventilation with Small Volume Oscillations at High Frequency [J]. Science, 1980, 209: 609–612.
- [6] Dragon C A, Grotberg J B. Oscillating Flow and Mass Transport in a Flexible Tube [J]. J. Fluid Mech., 1991, 231(10): 135–155.
- [7] Kurzweg U H. Heat Transfer Device for the Transport of Large Conduction Flux Without Net Mass Transfer [P]. US Patent: 4590993, 1986–05–27.
- [8] Joshi C H, Kamm R D, Drazen J M, et al. An Experimental Study of Gas Exchange in Laminar Oscillatory Flow [J]. J. Fluid Mech., 1983, 133: 245–254.
- [9] Paloski W H, Slosberg R B, Kamm R D. Effects of Gas Properties and Waveform Asymmetry on Gas Transport in a Branching Tube Network [J]. J. Appl. Physiol., 1987, 62(3): 892–901.
- [10] Eckmann D M, Grotberg J B. Oscillatory Flow and Mass Transport in a Curved Tube [J]. J. Fluid Mech., 1988, 188: 509–527.
- [11] 杨强生, 浦保荣. 高等传热学, 第二版 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2001. 60–64.
- [12] Ye X F. A Study on Longitudinal Mass-diffusion Enhancement for Oscillatory Tube Flows [D]. Tokyo: Tokyo Univ. Technol., 2000. 76–84.
- [13] Ye X F, Zhang J W. Effect of Turbulence on Taylor Dispersion for Oscillatory Flows [J]. Int. J. Heat and Mass Transfer, 2002, 45(21): 4373–4380.

Determination of Axial Diffusivity in Oscillatory Tube Flows

YE Xiao-feng

(School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: Pulse-injection technique was conducted to determine the effective axial diffusivity for oscillatory flow with the dispersion through a thin-long tube of circular cross-section being treated as a one-dimensional dynamic process. The effects of two kinds of initial tracer distribution — the normal distribution and the rectangular distribution—on the accuracy of effective diffusivity were analyzed. It was found that the error in calculation arisen due to the deviation of actual initial tracer distribution from pulsed one would be less than 1% if the distance between injection point and concentration probe were ten times larger than the width of initial concentration distribution. Experimental measurements were carried out in a test tube of 2.5 m long and 6 mm i.d. with Schmidt number of 3590, tidal displacement of fluid of 30~200 mm and Womersley number of 2.38~10.64. The results of experiment were compared with theoretical predictions and found to be in good agreement.

Key words: oscillatory flow; tube flow; enhanced dispersion; effective diffusivity