

# 颗粒流拟流体的本构关系

边琳, 王立, 刘传平

(北京科技大学机械工程学院, 北京 100083)

**摘要:** 针对慢速密集颗粒流的特点, 采用拟流体的方法, 类比具有屈服应力的非牛顿流体, 给出了适用于慢速密集颗粒流的本构方程表达形式, 建立了用粗糙底面斜槽测量颗粒流当量粘性的数学模型, 并以小麦颗粒为例, 通过粗糙底面斜槽实验得出了小麦颗粒流的屈服应力及其本构方程的关键系数. 将实验得出的小麦颗粒流本构关系系数作为其当量粘性的特征值对斜面流进行解析计算, 体流量的模型预测值与实验值的相对误差在 15% 以内.

**关键词:** 拟流体; 颗粒流; 本构方程; 当量粘性

**中图分类号:** TQ021

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-606X(2007)03-0467-05

## 1 前言

自 1991 年法国科学家德热纳(Pierre Gilles de Gennes)在其诺贝尔获奖演讲中提出软物质(Soft matter)的概念<sup>[1]</sup>后, 颗粒物质作为软物质领域一部分的概念也相应提出. 颗粒物质是广泛存在的物质组态, 与人类的生产、生活有着密切的联系. 从人类认识、改造自然的角度来说, 对泥石流、雪崩等自然现象和灾害的研究十分重要; 从节约能源的角度来说, 当今世界上颗粒的传输和积累要消耗全球总能量的 10%<sup>[2]</sup>, 因此, 对颗粒流的研究具有重要的实际意义.

颗粒流动有慢速流、快速流之分, 也有密集流、稀疏流之分. 具有代表性的是王光谦等<sup>[3]</sup>根据 2 个旋转的同心圆筒间粗颗粒受剪切运动对颗粒流进行的分类. 不同的颗粒流动状况运动机理各不相同, 宜采用不同模型和方法进行描述和分析. 目前, 国内外关于快速颗粒流的研究较多, 主要是实验、理论和数值模拟计算三方面. 颗粒流实验提供了认识颗粒流动机理的基础, 也是检验理论与数值模拟结果正确与否的必要途径. 但实验方法也具有一定的局限性, 目前在二维 Couette 流动条件下(同心圆筒和陡槽)进行测量居多<sup>[3-6]</sup>, 且许多运动参量都无法直接测量到. 计算机模拟可提供颗粒流的细节并弥补实验的不足<sup>[7]</sup>. 颗粒流理论研究在快速颗粒流动方面已有较大发展, 提出了多种模型, 但目前还没有一套公认的通用理论. 具有代表性的有塑性模型、动力学模型、两相流模型等<sup>[6]</sup>. 任何一种理论都有其适合描述的流动状态和场合, 如塑性模型对于慢速密集流比较合适, 基于动力理论的动力学模型适用于稀疏、快速流动. 然而, 要找到一个动力方程来准确地描述速度分布、密

度分布以及压力分布是至今还没有解决的难题, 颗粒流边界条件、复杂材料颗粒性质对颗粒流的影响以及多组分混合颗粒流等方面还有很多问题没有得到解决<sup>[3,6]</sup>. 颗粒流动的本构关系是颗粒流研究的核心内容<sup>[8]</sup>, 王光谦等<sup>[9]</sup>、McTigue 等<sup>[10]</sup>曾通过对无粘颗粒简单剪切流的分析建立了颗粒流一般形式的本构关系, 但是由于颗粒流本构关系的复杂性, 他们的成果都有待于进一步发展.

本工作主要针对慢速密集颗粒流, 基于连续介质假设, 采用拟流体的方法对颗粒(以小麦为例)的流动特性进行了实验研究, 对于颗粒流拟流体的本构关系进行了理论初探, 为慢速密集颗粒流拟流体本构关系的普适化提供参考.

## 2 颗粒流拟流体方法分析

对于颗粒物质的流动, 若找出其当量粘性系数 $\mu'$ , 就有可能用现已发展比较完善的流体力学计算方法来解决颗粒物料流量的计算问题. 颗粒物质与普通流体有许多不同的性质, 颗粒流拟流体方法关键在于把颗粒物质流动性质的众多影响因素归结到一个特定性质——粘性中去.

类似流体的粘性, 要得出颗粒流的粘性, 需寻求其本构方程. 颗粒物质表现出的特性与牛顿流体有较大差别, 因此用拟流体方法可将颗粒流归结到非牛顿流体中进行研究.

通过对颗粒流动现象的实验观察, 可证明颗粒流具有屈服应力, 不具有韦森堡效应<sup>[11]</sup>, 且是时间独立性的. 按照时间独立性流体<sup>[11]</sup>粘度与剪切速率有关、与剪切时间无关、剪切应力与剪切速率成单值关系的特点, 拟流体颗粒物质本构方程可以写成如下通式:

收稿日期: 2006-01-16, 修回日期: 2006-09-12

基金项目: 科技部农业科技成果转化重大基金资助项目(编号: 04EFN217100386)

作者简介: 边琳(1982-), 女, 江西省德兴市人, 硕士研究生, 主要从事颗粒流拟流体研究; 王立, 通讯联系人, Tel: 010-62334425, E-mail: liwang@me.ustb.edu.cn.

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n, \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0, \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\tau$ 为剪切应力(Pa),  $\tau_0$ 为屈服应力(Pa),  $\dot{\gamma}$ 为剪切变形速率( $s^{-1}$ ),  $k$ 为粘度的度量[ $kg/(m \cdot s^{2-n})$ ],  $k$ 越大, 粘度越大,  $n$ 为非牛顿性的度量, 是无量纲参数,  $n$ 偏离1越远, 非牛顿性越显著. 对于同一种颗粒流体,  $k$ 和 $n$ 是常量<sup>[12]</sup>, 二者综合体现了颗粒流的当量粘度.

拟非牛顿流体的颗粒流本构关系表明, 当内部剪切应力小于颗粒流的屈服应力时, 表现为颗粒静止或者堵塞流, 此时 $\dot{\gamma}=0$ ; 而内部剪切应力大于屈服应力时, 颗粒流内部的剪切速率不为0, 此时的本构方程表达形式正是本工作要通过实验研究的问题.

本工作颗粒流拟流体的思想是要通过实验确定颗粒流本构方程的关键系数, 得出颗粒流的当量粘性, 从而获得更加通用的计算颗粒流动的方法.

### 3 数学模型

本工作通过粗糙底面斜槽中颗粒慢速密集剪切流的实验进行颗粒流当量粘性的研究.

颗粒在粗糙斜面上流动, 当斜面处于某一个倾角时, 沿斜面向下的重力与颗粒自身粘滞力平衡, 颗粒呈现出均匀、平衡、稳定的流动<sup>[13]</sup>. 此时, 颗粒流体处于力平衡状态, 为密集流, 正是粘度测量的最佳状态. 下面对此情况下颗粒流的数学模型进行描述和分析.

图1所示为颗粒物质在倾斜角为 $\alpha$ 的斜槽中流动的剖面示意图, 对数学模型作假设如下: (1) 把颗粒物质作为连续介质考虑, 并且认为是不可压缩的; (2) 保证流动是慢速, 认为流动是层流; (3) 斜槽的宽度远远大于流层厚度, 可以忽略斜槽宽度方向的影响; (4) 流动是稳定流动; (5) 斜槽足够长, 且宽度方向流动均匀; (6) 底壁面无滑移.

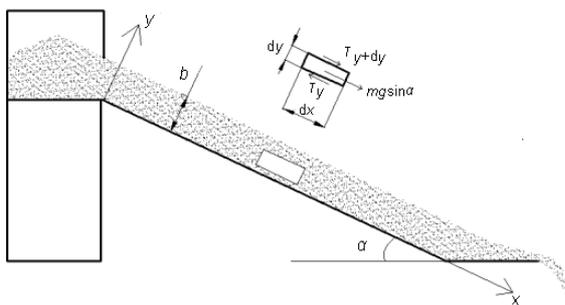


图1 颗粒在粗糙底面斜槽中流动

Fig.1 Granules flowing down along a rough inclined chute

设斜槽的宽度为 $l$ , 流层厚度为 $b$ , ( $l \gg b$ ), 斜槽倾角为 $\alpha$ , 沿斜面向下为 $x$ 方向, 垂直斜面向上为 $y$ 方向,

垂直纸面方向为 $z$ 方向, 颗粒物料在重力作用下沿斜面向下稳定流动. 基于以上假设, 只考虑 $y$ 方向有速度梯度. 取图1中所示的颗粒流微团体, 对其进行 $x$ 方向受力分析.

微团受力包括表面力和质量力, 在 $x$ 方向, 质量力为微团所受的重力沿斜面向下的分力 $\rho g \sin \alpha dx dy dz$ , 表面力为微团上下表面剪切应力的差值 $(\tau_y - \tau_{y+dy}) dx dz$ , 其中 $\tau_y = \tau_0 + k(du/dy)^n$ .

由力平衡, 有下方程:

$$\rho g \sin \alpha dx dy dz = (\tau_y - \tau_{y+dy}) dx dz = -\tau_y' dy dx dz, \quad (2)$$

$$\tau_y = -\rho g \sin \alpha y + C. \quad (3)$$

分析颗粒流在流层表面的特性可知, 在流层的自由表面处, 速度梯度 $du/dy=0$ , 因此有边界条件:  $y=b$ 时,  $\tau_y = \tau_0$ . 代入式(3)得常数项 $C = b \rho g \sin \alpha + \tau_0$ , 所以

$$\tau_y = -\rho g \sin \alpha y + b \rho g \sin \alpha + \tau_0 = \rho g \sin \alpha (b-y) + \tau_0, \quad (4)$$

$$\text{即} \quad \rho g \sin \alpha (b-y) + \tau_0 = \tau_0 + k(du/dy)^n, \quad (5)$$

$$\text{变形得} \quad du/dy = [(\rho g \sin \alpha / k)(b-y)]^{1/n}.$$

上式两边积分得

$$u = -[(\rho g \sin \alpha / k)^{1/n} / (n(n+1))] (b-y)^{(n+1)/n} + C_1. \quad (6)$$

由壁面无滑移边界条件有 $y=0$ 时,  $u=0$ . 由此得常数项

$$C_1 = (\rho g \sin \alpha / k)^{1/n} (n/n+1) b^{(n+1)/n}.$$

由式(6)可知, 当 $y=b$ 时,  $u=C_1$ , 因此,  $C_1$ 等于流层的表面速度 $u_b$ .  $u$ 为速度分布函数(m/s),  $u_b$ 为自由表面处速度(m/s),  $n$ 为非牛顿性的度量(无量纲参数),  $k$ 为粘度的度量[ $kg/(m \cdot s^{2-n})$ ],  $\rho$ 为散粒体的堆积密度( $kg/m^3$ ),  $g$ 为重力加速度( $m/s^2$ ),  $\alpha$ 为斜面倾斜角( $^\circ$ ),  $b$ 为流层总厚度(m),  $du/dy$ 为速度梯度( $s^{-1}$ ).

以上各量中,  $k$ ,  $n$ 和 $\tau_0$ 是表示颗粒流动能力的关键参数, 可通过实验测量得出的数据来确定, 是本实验研究的主要对象.

### 4 实验

本工作构造了颗粒物质在粗糙底面斜槽中流动的实验装置. 整个实验装置主要由供料漏斗、堆料箱、斜槽等组成. 装置的最上端为供料漏斗, 其下为堆料箱, 堆料箱的作用是保证颗粒料位在实际测试过程中保持一定. 斜槽与堆料箱呈一定夹角安装, 通过合页连接在一起, 夹角可通过斜槽下的支撑部件进行调节, 调节范围为 $10^\circ \sim 60^\circ$ . 堆料箱与斜槽之间设计了插板, 作用是调节颗粒的流量并保证初始颗粒流层厚度均匀. 堆料箱、插板以及斜槽两侧壁均是光滑的有机玻璃材料, 目的是

将边壁对流动的影响减少到最低. 同时, 斜槽的宽度大于颗粒粒径的 20 倍以上, 以保证颗粒在斜槽中流动可忽略宽度方向的影响<sup>[14]</sup>. 为了避免颗粒流在底面产生的滑移, 斜槽的底面处理成粘有实验颗粒的粗糙底面, 粘的实验颗粒在粗糙底面上随机排列. 斜槽侧壁与底面平行和垂直方向均标有精确到 1 mm 的刻度, 以便在颗粒流动的过程中观察并记录颗粒流层的厚度. 从该实验装置可以得到不同斜槽倾角下不同流层厚度的颗粒稳定流动的质量流量及其流动速度分布.

本实验实验材料为小麦种子, 当量粒径 5.3 mm, 球形度 0.78, 堆积密度 696.5 kg/m<sup>3</sup>, 自然堆积角 31°.

#### 4.1 小麦颗粒流屈服应力的测量

将斜槽倾斜角设定为不同的值, 分别反复测出当颗粒停滞不流时的流层厚度  $b_c$ (滞留层厚度), 代入公式  $\tau_0 = b_c \rho g \sin \alpha_0$  得到屈服应力值<sup>[11]</sup>, 如表 1 所示.

表 1 小麦颗粒屈服应力测量及计算值

Table 1 Measurements and calculation of the yield stress of wheat granules

Inclined angle, $\alpha$ (°)	Thickness, $b_c$ (m)	Bulk density, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Yield stress, $\tau_0$ (Pa)
35	0.013	696.5	50.90
38	0.012	696.5	50.42
			Average 50.7

#### 4.2 小麦颗粒斜槽流速分布的测量

平衡、稳定的密集剪切流是测量颗粒流本构关系的最佳状态. 因此, 本工作首先进行了小麦颗粒流动与斜槽倾角关系的初步实验, 来确定小麦颗粒在粗糙底面斜槽中达到平衡、稳定流动的斜槽倾斜角条件. 初步实验表明, 斜槽倾斜角度由小变大时, 小麦颗粒流动由密集的摩擦流动发展成稀疏的碰撞流. 在进行小麦颗粒慢速密集剪切流实验时, 为达到接近匀速的运动状况, 选取斜槽倾斜角为 35° 最佳.

将斜槽倾斜角置于 35°, 调节插板开口, 使流层总厚度为 0.045 m. 在斜槽出口处与斜槽平行放置一块厚 0.5 mm 的光滑薄板, 分别测量当薄板置于距斜槽底面距离为 0.013, 0.018, 0.023, 0.028, 0.033, 0.038 m(各测点位置相差 0.005 m)时流过薄板的颗粒质量流量. 将得到的质量流量依次相减即得到总流层厚度为 0.045 m 时的每 0.005 m 厚流层的平均质量流量  $\bar{m}$  (kg/s), 之后根据  $\bar{m}$  计算得到每 0.005 m 厚流层的平均速度. 每个位置的数据均经多次(5 次以上)测量取平均值, 其中表面速度用示踪粒子法测得. 底壁面处由于粘有一层实验颗粒, 可认为底壁面处速度为 0. 速度沿流层厚度方向的分布曲线如图 2 所示.

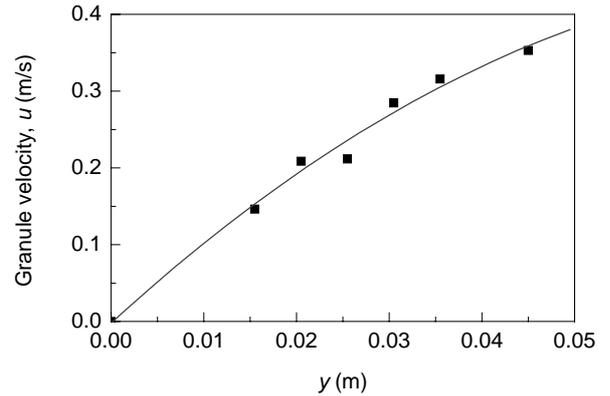


图 2 斜槽倾角 35°、流层总厚度 0.045 m 时的速度分布曲线  
Fig.2 Velocity profile with inclined angle of 35° and total flow layer thickness of 0.045 m

由图 2 可知, 小麦颗粒在粗糙斜面上流动, 其速度沿流层厚度方向的分布曲线略呈上凸型, 速度梯度沿 y 方向从流层底部到流层表面呈减小趋势, 但不明显. 小麦颗粒流速度分布曲线与牛顿流体在斜面上速度分布曲线的弯曲方向相同.

对于颗粒在斜面上流动的速度分布曲线的弯曲方向目前尚无定论. 文献[4,15]中得出的速度分布曲线与牛顿流体速度曲线弯曲方向不同, 其中文献[15]得出的速度分布曲线接近直线. 这可能是由于各文献中采用的具体实验颗粒种类不同. 此现象表明速度分布曲线的弯曲方向与颗粒的粒径大小、颗粒群粒度分布、颗粒球形度等均有关系.

#### 4.3 实验数据处理

将  $C_1 = u_b$  代入式(6), 可变形为  $u_b - u = [(\rho g \sin \alpha) / k]^{1/n} [n / (n+1)] (b-y)^{(n+1)/n}$ . 令相对速度  $U = u_b - u$ , 流层距斜槽底面的相对距离  $Y = b - y$ , 则

$$U = [(\rho g \sin \alpha) / k]^{1/n} [n / (n+1)] Y^{(n+1)/n}. \quad (7)$$

将实验数据按式(7)进行处理, 回归成幂函数曲线, 拟合公式为  $U = m_1 Y^{m_2}$ , 则其中幂系数  $m_1$  的值为  $[(\rho g \sin \alpha) / k]^{1/n} [n / (n+1)]$ , 幂指数  $m_2$  的值为  $(n+1)/n$ . 斜槽倾角 35°, 流层总厚度为 0.045 m, 用式(7)修正后的数据结果见图 3.

图 3 中曲线拟合公式为  $U = 43.709 Y^{5119}$ , 相关系数  $R^2 = 0.9665$ . 由此可得到小麦颗粒流本构方程的关键系数  $k$  和  $n$  的值, 如表 2 所示.

因此, 对于本实验的小麦颗粒, 其屈服应力  $\tau_0 = 50.7$  Pa,  $k = 1.089 \text{ kg} / (\text{m} \cdot \text{s}^{0.05})$ ,  $n = 1.95$ . 由此可见, 小麦颗粒流体  $n > 1$ , 与非牛顿流体中塑性膨胀性流体类似, 具有表观粘度随剪切速率增加而增加的特性.

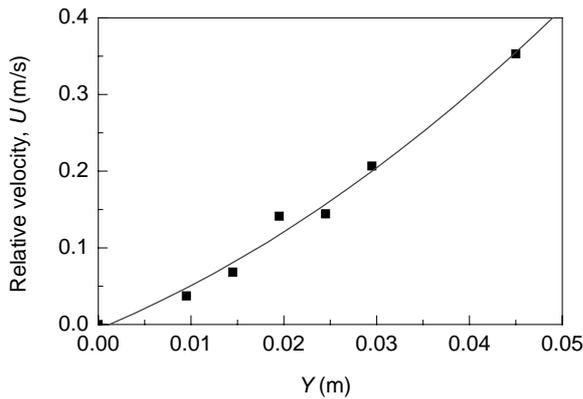


图3 斜槽倾角 35°、流层总厚度为 0.045 m 时相对速度与相对厚度关系曲线

Fig.3 Relative velocity profile vs. relative layer thickness with inclined angle of 35° and total layer thickness of 0.045 m

表2 小麦颗粒流本构方程系数计算值

Table 2 Calculated coefficient of constitutive equation for wheat granules

Bulk density, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Inclined angle, $\alpha$ (°)	$m_1$	$m_2$	$n$	$k$ [kg/(m·s <sup>2-n</sup> )]
696.5	35	43.709	1.5119	1.95	1.089

### 5 用流量数据验证本构关系关键系数的可靠性

由力平衡条件下得出的颗粒斜槽流数学模型可知， $\rho g \sin \alpha dx dy dz = (\tau_y - \tau_{y+dy}) dx dz = -kn(du/dy)^{n-1}(d^2u/dy^2) dx dy dz$ ，整理得  $d^2u/dy^2 = -[(\rho g \sin \alpha)/(kn)](du/dy)^{1-n}$ ，由此可得速度分布

$$u = n^n \left[ -\frac{\rho g \sin \alpha}{kn} \frac{n+1}{n} \right]^{-1} \left( -\frac{\rho g \sin \alpha}{kn} y + C_2 \right)^{\frac{n+1}{n}} + C_3 \quad (8)$$

表3 体积流量模型预测值与相应实验值比较

Table 3 Volume flow rates calculated from mathematical model compared with corresponding experimental data

$k$ [kg/(m·s <sup>2-n</sup> )]	$n$	Total thickness, $b$ (m)	Inclined angle, $\alpha$ (°)	Bulk density, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Volume flow rate, $q_v$ [m <sup>3</sup> /(s·m)]		Relative error (%)
					Exp.	Cal.	
1.089	1.95	0.038	35	696.5	0.00553	0.00498	9.9
1.089	1.95	0.043	35	696.5	0.00806	0.00712	11.6
1.089	1.95	0.031	31	696.5	0.00312	0.00270	13.6
1.089	1.95	0.035	31	696.5	0.00377	0.00353	6.4
1.089	1.95	0.038	31	696.5	0.00497	0.00451	9.3

### 6 结论

(1) 从颗粒流动的基本现象出发，针对慢速密集颗粒流的特点，借鉴流体粘度测量方法，建立了用粗糙底面斜槽测量颗粒物质当量粘性的数学模型，该数学模型亦适用于其他具有屈服应力的幂律非牛顿流体。

(2) 构建了测量颗粒物质当量粘性的粗糙底面斜槽实验装置，并以小麦颗粒为例进行了实验，得出了小麦

根据边界条件： $y=b$  时， $du/dy=0$ ； $y=0$  时， $u=0$ ，得

$$C_2 = (b \rho g \sin \alpha)/(kn),$$

$$C_3 = -n^n \left[ -\frac{\rho g \sin \alpha}{kn} \frac{n+1}{n} \right]^{-1} \left( \frac{b \rho g \sin \alpha}{kn} \right)^{\frac{n+1}{n}}$$

令  $A = -(\rho g \sin \alpha)/(kn)$ ， $B = C_2 = (b \rho g \sin \alpha)/(kn)$ ，则  $C_3 = -n^{1/n} [A(n+1)/n]^{-1} B^{(n+1)/n}$ ，所以

$$u = n^n \left( A \frac{n+1}{n} \right)^{-1} \left[ (Ay + B)^{(n+1)/n} - B^{(n+1)/n} \right] \quad (9)$$

由式(9)积分得通过单位宽度平板的体积流量：

$$q_v = \int_0^b u dy = n^n \left( A \frac{n+1}{n} \right)^{-1} \left[ (Ab + B)^{\frac{2n+1}{n}} \left( A \frac{2n+1}{n} \right)^{-1} - B^{\frac{2n+1}{n}} \left( A \frac{2n+1}{n} \right)^{-1} - B^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (10)$$

调节斜槽倾角和流层总厚度，分别测出小麦颗粒流动稳定后不同工况的体积流量。将小麦颗粒流本构关系系数  $k$  和  $n$  代入单位宽度体积流量公式(10)，得出的模型计算值与相应流量实验数据进行比较，结果见表3。结果表明当斜槽倾斜角度为 35° 和 31° 时，解析计算数据与实验数据吻合较好，相对误差均小于 15%。误差产生的原因主要有以下两个方面：(1) 实验存在一定的误差，包括入口段误差、速度测量误差、数据拟合误差；(2) 在颗粒流动过程中，流层空隙率会产生变化而造成颗粒的堆积密度产生变化<sup>[4]</sup>，而解析计算中未考虑。

上述结果表明本研究所得小麦颗粒流的本构方程是可靠的，对于慢速密集颗粒流，采用基于连续介质假设的拟流体方法来研究是可行的。

颗粒流的屈服应力及其本构方程的关键系数  $k$  和  $n$ ， $\tau_0 = 50.7$  Pa， $k = 1.089$  kg/(m·s<sup>0.05</sup>)， $n = 1.95$ 。结果表明，小麦颗粒流  $n > 1$ ，与非牛顿流体中塑性膨胀性流体类似，具有表观粘度随剪切速率增大而增大的特性。小麦颗粒在粗糙斜面上流动，其速度分布曲线与牛顿流体速度分布曲线的弯曲方向相同，速度梯度沿斜面垂直方向从流层底部到流层自由表面呈减小趋势，表观粘度从斜槽底面到流层自由表面亦呈减小趋势。

(3) 将实验得出的小麦颗粒流本构关系系数  $k$  和  $n$  作为小麦颗粒流当量粘性的特征值对斜面流进行解析计算,并将得出的体积流量模型计算值与相应实验测得的小麦颗粒流体积流量值进行对比分析,相对误差在15%以内.结果表明,对于慢速密集颗粒流,采用基于连续介质假设的拟流体方法来研究是可行的.

#### 参考文献:

- [1] 谢封超,张青岭,刘结平,等. 高分子的软物质特性 [J]. 高分子通报, 2001, (2): 50-55.
- [2] 肖文波,胡林. 颗粒物质的两个典型效应及其研究现状的分析 [J]. 物理实验, 2004, 24(3): 44-46.
- [3] 王光谦,倪晋仁. 颗粒流研究评述 [J]. 力学与实践, 1992, 14(1): 7-19.
- [4] Santomaso A C, Canu P. Transition to Movement in Granular Chute Flows [J]. Chem. Eng. Sci., 2001, 56: 3563-3573.
- [5] Dolgunin V N, Kudy A N, Ukolov A A. Development of the Model of Segregation of Particles Undergoing Granular Flow down an Inclined Chute [J]. Powder Technol., 1998, 96: 211-218.
- [6] Pouliquen O. Dense Flows of Dry Granular Material [J]. Crit. Rev. Phys., 2002, 3: 163-175.
- [7] 傅巍,蔡九菊,董辉,等. 颗粒流数值模拟的现状 [J]. 材料与冶金学报, 2004, 3(3): 172-175.
- [8] Sergio A E, Luis A G. Constitutive Relations for Compressible Granular Materials Using Non-Newtonian Fluid Mechanics [J]. Mech. Sci., 1998, 40(10): 1001-1018.
- [9] 王光谦,熊刚,方红卫. 颗粒流动的一般本构关系 [J]. 中国科学(E辑), 1998, 28(3): 282-288.
- [10] McTigue D F. A Nonlinear Constitutive Model for Granular Materials: Application to Gravity Flow [J]. J. Appl. Mech., 1982, 49(2): 291-296.
- [11] 陈惠钊. 粘度测量, 第2版 [M]. 北京: 中国计量出版社, 2003. 142-147, 165-171.
- [12] 陈文芳. 非牛顿流体的一些本构方程 [J]. 力学学报, 1983, (1): 16-26.
- [13] Silbert L E, Landry J W, Grest G S. Granular Flow down a Rough Inclined Plane: Transition between Thin and Thick Piles [J]. Phys. Fluids, 2003, 15(1): 1-9.
- [14] 刘学武,张州波,陈淑花. 粉粒体慢速斜槽流的实验研究 [J]. 中国粉体技术, 2002, 4(8): 184-186.
- [15] Zhang X, Vu-Quoc L. Simulation of Chute Flow of Soybeans Using an Improved Tangential Force-displacement Model [J]. Mech. Mater., 2000, 32: 115-129.

## Constitutive Relation of Pseudo-fluid Granular Flow

BIAN Lin, WANG Li, LIU Chuan-ping

(School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

**Abstract:** For the slow intensive granular flow, the method of describing the granular flow as a pseudo-fluid flow is employed in this work. By analogy with non-Newton fluid with yield stress, a constitutive equation is put forward for slow intensive granular flow, and a mathematical model of testing granular equivalent viscosity is presented. Based on the experiment of wheat granules flowing down a rough inclined chute, the yield stress and the key coefficients of constitutive equation of the wheat granule flow are calculated. From theoretical analysis of wheat granule chute flow using the coefficients of the constitutive relation from experiment, the relative error of the prediction of the volume flow rate compared with corresponding experimental data is less than 15%.

**Key words:** pseudo-fluid; granular flow; constitutive equation; equivalent viscosity