# 有界三次系统（Ⅱ）

李 林 党新益
（北京石油化学专科学校） （西北大学）

**摘 要**

本文是《有界三次系统〔Ⅰ〕》的继续，用讨论三次系统无穷远奇点的方法，得到了无穷远处只有一个奇点时，由三次系统的系数直接给出了判断该三次系统有界性的充分条件。

**关键词**：有界系统；无穷远奇点；庞加莱变换。

## 0 引 言

我们知道，微分系统有界性的讨论，不仅有其理论价值，而且有十分重要的应用价值。文〔2〕，〔3〕中对二次微分系统的有界性进行了研究，文〔1〕讨论了三次系统的有界性。本文是继续文〔1〕的讨论，考虑无穷处只有一个奇点的情况下该三次系统的有界性问题，获得了一系列可由方程右端系数直接判断该系统有界性的准则。

考虑三次微分系统：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + \sum\limits_{2\leq i+j\leq 3} a_{ij}x^iy^j \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + \sum\limits_{2\leq i+j\leq 3} b_{ij}x^iy^j. \end{cases} \tag{$E_3$}$$

作 Poincaré 变换

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{u}{z}, \qquad dt = z^2 d\tau.$$

得到

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \varphi_1(u)z^2 + \varphi_2(u)z + \varphi_3(u) \\ \dfrac{dz}{d\tau} = -\psi_1(u)z^3 - \psi_2(u)z^2 - \psi_3(u)z. \end{cases} \tag{1}$$

本文1989年6月5日收到。

其中

$$\begin{cases}\varphi_1(u)=c+(d-a)u-bu^2\\ \varphi_2(u)=b_{20}+(b_{11}-a_{20})u+(b_{02}-a_{11})u^2-a_{02}u^3\\ \varphi_3(u)=b_{30}+(b_{21}-a_{30})u+(b_{12}-a_{21})u^2+(b_{03}-a_{12})u^3-a_{03}u^4;\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}\psi_1(u)=a+bu\\ \psi_2(u)=a_{20}+a_{11}u+a_{02}u^2\\ \psi_3(u)=a_{30}+a_{21}u+a_{12}u^2+a_{03}u^3.\end{cases}\tag{3}$$

再作变换

$$x=\frac{v}{z},\qquad y=\frac{1}{z},\qquad dt=z^2d\tau,$$

$(E_3)$成为

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{d\tau}=\overline{\varphi_1}(v)z^2+\overline{\varphi_2}(v)z+\overline{\varphi_3}(v)\\ \dfrac{dz}{d\tau}=-\overline{\psi_1}(v)z^3-\overline{\psi_2}(v)z^2-\overline{\psi_3}(v)z\ .\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$\begin{cases}\overline{\varphi_1}(v)=b+(a-d)v-cu^2\\ \overline{\varphi_2}(v)=a_{02}+(a_{11}-b_{02})v+(a_{20}-b_{11})v^2-b_{20}v^3\\ \overline{\varphi_3}(v)=a_{03}+(a_{12}-b_{03})v+(a_{21}-b_{12})v^2+(a_{30}-b_{21})v^3-b_{30}v^4,\end{cases}\tag{5}$$

$$\begin{cases}\overline{\psi_1}(v)=cv+d\\ \overline{\psi_2}(v)=b_{20}v^2+b_{11}v+b_{02}\\ \overline{\psi_3}(v)=b_{30}v^3+b_{21}v^2+b_{12}v+b_{03}\ .\end{cases}\tag{6}$$

由 (1) 知，$E_3$ 的无穷远奇点的坐标必须满足 $\varphi_3(u)=0$. 再由 (2) 知其为一元四次代数方程，显然我们需讨论以下两种情况：$\varphi_3(u)=0$ 无实根，而$\overline{\varphi_3}(0)=0$；$\overline{\varphi_3}(0)\neq 0$，而 $\varphi_3(u)=0$ 只有一个实根。

我们将在 1 中讨论 $\varphi_3(u)=0$ 无实根，$\bar{\varphi}(0)=0$的情况；因四次方程仅有一实根时，它只能是二重的或四重的，因此，在 2 中讨论二重根的情况，3 中讨论四重根的情况。

## 1　$\varphi_3(u)=0$ 无实根

在这一节我们讨论 $\varphi_3(u)=0$ 无实根，而$\overline{\varphi_3}(0)=0$即 (0, 1, 0) 为 $E_3$ 的无穷远奇点的情形. 由 (2)，(4) 及 (5) 知，(0, 1, 0) 为 $E_3$ 的无穷远奇点. $\varphi_3(u)=0$ 无实根当且

仅当 $a_{03}=b_{03}-a_{12}=0$，且$(b_{21}-a_{30})^2+4b_{30}(a_{21}-b_{12})<0$．因此我们有：

定理1　如果 $a_{03}=b_{03}-a_{12}=0$，且$(b_{21}-a_{30})^2+4b_{30}(a_{21}-b_{12})<0$成立，则若下列条件之一被满足，$E_3$为有界系统。

1)　$b_{03}<0$；

2)　$b_{03}=0$，　$a_{02}\neq 0$，　$(b_{12}-a_{21})b_{12}<0$，　$b_{02}\neq 0$；

3)　$b_{03}=0$，　$a_{02}\neq 0$，　$b_{12}=0$，　$a_{21}/a_{02}>0$，　$b_{02}\neq 0$，
　　$a_{02}b_{21}+b_{11}(a_{11}-b_{02})-b_{02}a_{21}\leqslant 0$；

4)　$b_{03}=a_{02}=0$　$\begin{cases} a_{11}^2-4ba_{21}<0 & \text{或} \\ a_{11}=a_{21}=0. \end{cases}$

**证明**　因为$a_{03}=b_{03}-a_{12}=0$，故（0，0）为（4）的奇点，此时（4）成为：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=[a_{02}+(a_{11}-b_{02})v+(a_{20}-b_{11})v^2-b_{20}v^3]z \\ \qquad +\ [b+(a-d)v-cv^2]z^2+(a_{21}-b_{12})v^2+(a_{30}-b_{21})v^3-b_{30}v^4; \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=-(b_{03}+b_{12}v+b_{21}v^2+b_{30}v^3)z-(b_{02}+b_{11}v+b_{20}v^2)z^2 \\ \qquad +(cv+d)z^3. \end{cases} \tag{7}$$

现在讨论（7）的奇点（0，0）的性态，从而清楚$E_3$的无穷远奇点的性态，进而判定$E_3$的有界性．

1）若$b_{03}<0$，则（7）的（0，0）为半鞍半结点；

2）当 $b_{03}=0$，$a_{02}\neq 0$，由（4）第152页的定理7・2知，$a_3=b_{12}(a_{21}-b_{12})>0$．因此，若$b_{02}\neq 0$，则（7）的（0，0）为鞍点（图1），沿V轴方向有轨线进入和走出；

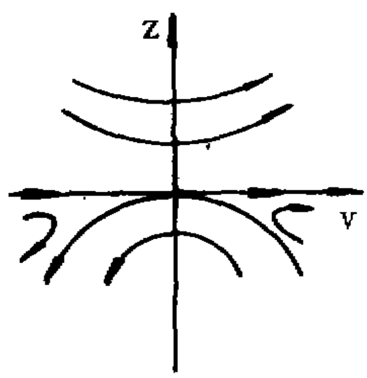


图1　鞍点

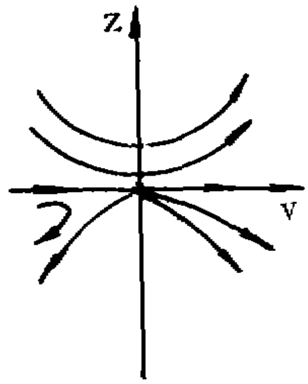


图2　鞍结点

3）$b_{03}=0$，$a_{02}\neq 0$．由（4）的第152页的定理7・3知当$b_{12}=0$时，

$a_4=\frac{a_{21}}{a_{02}}(a_{02}b_{21}+b_{11}(a_{11}-b_{02})-b_{02}a_{21})<0$，因此若 $b_{02}\neq 0$ 以及 $\frac{a_{21}}{a_{02}}>0$时，(7) 的 (0, 0) 为鞍结点（图 2）；

4) $b_{03}=a_{02}=0$，此时考虑奇点 (0, 0) 的特殊方向

$G(\theta)=-\sin\theta(b\sin^2\theta+a_{11}\cos\theta\sin\theta+a_{21}\cos^2\theta)$，

$H(\theta)=\cos\theta(b\sin^2\theta+(a_{11}-b_{02})\cos\theta\sin\theta+(a_{21}-b_{12})\cos^2\theta)-\sin\theta(b_{02}\sin^2\theta+b_{12}\cos\theta\sin\theta)$.

$H(0)=a_{21}-b_{12}\neq 0$，$H(\pi)=b_{12}-a_{21}\neq 0$。而 $a^2-4ba_{21}<0$ 或 $a_{11}=a_{21}=0$ 保证了无其他特殊方向，且 $\theta=0$，$\theta=\pi$ 为 $G(\theta)=0$ 的奇重根，故沿该二方向进出的轨线只有一条。

对以上各种情况的讨论，清楚了 (7) 的奇点 (0, 0) 的性态。注意变换 $dt=z^2d\tau$ 以及 $E_3$ 只有一个无穷远奇点 (0, 1, 0)，便知道定理 1 的结论为真。

## 2　$\varphi_3(u)=0$ 有一个二重根

先假定 $\varphi_3(u)=0$ 的那个二重根为 $u_0=0$ 有

**定理 2**　若 $b_{30}=0=b_{21}-a_{30}$，$(b_{03}-a_{12})^2+4a_{03}(b_{12}-a_{21})<0$（即 $u=0$ 是 $\varphi_3(u)=0$ 二重唯一的一个根）。且若下列条件之一成立，则 $E_3$ 成为有界的。

1) $a_{30}<0$;

2) $a_{30}=0$，$b_{20}\neq 0$，$a_{20}\neq 0$，$a_{21}(b_{12}-a_{21})>0$;

3) $a_{30}=0$，$b_{20}\neq 0$，$a_{20}\neq 0$，$a_{21}=0$，$b_{12}/b_{20}>0$，$b_{20}a_{12}+a_{11}(b_{11}-a_{20})-a_{20}b_{12}<0$;

4) $a_{30}=0=b_{20}$　$\begin{cases} b_{11}^2-4b_{12}c<0 & 或 \\ b_{11}=b_{12}=0 . \end{cases}$

**证明**　类似于定理 1 的证明，先来讨论 $E_3$ 的奇点 (1, 0, 0)．为此必须先来考虑 (1)，在该定理条件下 (1) 成为

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau}=[c+(d-a)u-bu^2]z^2+[b_{20}+(b_{11}-a_{20})u+(b_{02}-a_{11})u^2 \\ \qquad -a_{02}u^3]z+(b_{12}-a_{21})u^2+(b_{03}-a_{12})u^3-a_{03}u^4 \\ \frac{dz}{d\tau}=-(a+bu)z^3-(a_{20}+a_{11}u+a_{02}u^2)z^2 \\ \qquad -(a_{30}+a_{21}u+a_{12}u^2+a_{03}u^3)z . \end{cases} \tag{8}$$

1) $a_{30}<0$ 时，(8) 的奇点 (0, 0) 为鞍结点；

2) $a_{30}=0$，$b_{20}\neq 0$，由[4]第 152 页定理 7·2 知 $a_3=a_{21}(b_{12}-a_{21})>0$，故 $a_{20}\neq 0$ 时 (8) 的 (0, 0) 为鞍点（图 1）；

3) $a_{30}=0$，$b_{20}\neq 0$，由[4]第152页定理7·3知$a_4=\frac{b_{12}}{b_{20}}$〔$b_{20}a_{12}-a_{20}b_{12}+a_{11}(b_{11}-a_{20})$〕$<0$，故$\frac{b_{12}}{b_{20}}>0$ 且$a_{20}\neq 0$时，(8)的(0，0)为鞍结点（图2）；

4) 考虑(0，0)的特殊方向，$G(\theta)=-\sin\theta(b_{12}\cos^2\theta+b_{11}\cos\theta\sin\theta+c\sin^2\theta)$，不难算出$H(0)=b_{12}-a_{21}\neq 0$，$H(\pi)=a_{21}-b_{12}\neq 0$，而条件$b_{11}^2-4b_{12}c<0$或$b_{11}=b_{12}=0$保证了无其他特殊方向，且$\theta=0$，$\theta=\pi$为$G(\theta)=0$的奇重根．故沿$\theta=0$，$\theta=\pi$进出的轨线只能有一条．这样便清楚了$E_3$的无穷远奇点(1，0，0)的性态，再注意到变换$dt=z^2d\tau$即知定理2成立．

一般地$u_0\neq 0$，此时只须作变换使得(1)的奇点$(u_0,\ 0)$成为变换后方程的(0，0)即可证明．与定理2平行，可直接得到：

**定理3**　若$u_0$为$\varphi_3(u)=0$的二重根，且若下列条件之一成立，则$E_3$是有界系统．

1) $\psi_3(u_0)<0$；

2) $\psi_3(u_0)=0$，$\varphi_2(u_0)\neq 0$，$\psi_3'(u_0)\varphi_3''(u_0)<0$，$\psi_2(u_0)\neq 0$；

3) $\psi_3(u_0)=0\neq\varphi_2(u_0)$，$\psi_2(u_0)\neq 0$，$\varphi_3''(u_0)/\varphi_2(u_0)>0$，$\psi_3'(u_0)=0$，
$\varphi_2(u_0)\psi_3''(u_0)+\psi_2'(u_0)\varphi_2'(u_0)-\psi(u_0)\varphi_3''(u_0)<0$；

4) $\psi_3(u_0)=\varphi_2(u_0)=0$

$$\begin{cases}[\varphi_2'(u_0)+\psi_2(u_0)]^2-4[\varphi_3''(u_0)+\psi_3'(u_0)]\varphi_1(u_0)<0\text{或}\\ \psi_3'(u_0)+\varphi_3''(u_0)=0,\quad \varphi_2'(u_0)+\psi_2(u_0)=0\ .\end{cases}$$

其中函数右上角的撇号表示导数，下同．

## 3　$\varphi_3(u)=0$有四重根

由于$\varphi_3(u)=0$有四重根，所以根为$\bar{u}=\frac{b_{03}-a_{12}}{4a_{03}}$且$\varphi_3(\bar{u})=\varphi_3'(\bar{u})=\varphi_3''(\bar{u})=0$．对(1)作变换$x=u+\bar{u}$，$z=z$，则有

$$\begin{cases}\frac{dx}{d\tau}=\varphi_1(\bar{u})z^2+\varphi_1'(\bar{u})xz^2+\varphi_1''(\bar{u})x^2z^2+\varphi_2(\bar{u})z+\varphi_2'(\bar{u})xz\\ \qquad+\varphi_2''(\bar{u})x^2z+\varphi_2'''(\bar{u})x^3z+\varphi_3^{(4)}(\bar{u})x^4\\ \frac{dz}{d\tau}=-\psi_1(\bar{u})z^3-\psi_1'(\bar{u})xz^3-\psi_2(\bar{u})z^2-\psi_2'(\bar{u})xz^2-\psi_2''(\bar{u})x^2z^2\\ \qquad-\psi_3(\bar{u})z-\psi_3'(\bar{u})xz-\psi_3''(\bar{u})x^2z-\psi_3'''(\bar{u})x^3z\ .\end{cases}\tag{9}$$

**定理4**　若$\varphi_3(u)=0$有四重根，且若下列条件之一成立，则$E_3$为有界系统

1) $\psi_3(u)<0$；

2) $\psi_3(\bar{u})=0$，　$\varphi_2(u)\neq 0$，　$\psi_2(\bar{u})\neq 0$，　$\psi_3'(u)\varphi_3^{(4)}(u)>0$；

3) $\psi_3(\bar{u})=0$，$\varphi_2(\bar{u})=0$，$\psi_3'(\bar{u})<0$，$\varphi_3^{(4)}(\bar{u})<0$且$[\varphi_2'(u)+\psi_2(\bar{u})]^2-4\psi_3'(\bar{u})\varphi_1(\bar{u})<0$．

**证明** 1) $\psi_3(\bar{u})<0$，而$\varphi_3^{(4)}(u)=-24a_{03}\neq 0$，所以（9）的奇点（0，0）为半鞍半结点；

2) $\psi_3(\bar{u})=0\neq\varphi_2(\bar{u})$，由[4]第152页定理7.2知$a_5=\psi_3'(\bar{u})\varphi_3^{(4)}(\bar{u})>0$，因而$\psi_2(\bar{u})\neq 0$时，（9）的奇点（0，0）为鞍点（图1）；

3) $\psi_3(\bar{u})=\varphi_2(\bar{u})=0$时，考查（9）奇点（0，0）的特殊方向，

$G(\theta)=-\sin\theta\,[\varphi_1(\bar{u})\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta(\varphi_2'(\bar{u})+\psi_2(\bar{u}))+\psi_3'(\bar{u})\cos^2\theta]$，条件3）保证了其仅有$\theta=0$，$\theta=\pi$的特殊方向．对（9）作变换$x=x$，$z=\bar{x}\cdot x$得到

$$\frac{d\bar{x}}{dx}=\frac{-\psi_3'(\bar{u})\bar{x}+\cdots}{\varphi_3^{(4)}(u)x^3+\cdots}. \tag{10}$$

当$\psi_3'(\bar{u})<0$，$\varphi_3^{(4)}(\bar{u})<0$时（10）的奇点（0，0）为鞍点．（9）的奇点（0，0）的性态须把该鞍点映照到u-z平面上，知沿$\theta=0$，$\theta=\pi$方向之一有一条轨线进入奇点，而沿另一方向有一条轨线走出．且进出的轨线条数是唯一的．这样，（1）的奇点（$\bar{u}$，0），即$E_3$的无穷远奇点（1，$\bar{u}$，0）的性态也就清楚了．再注意到只有一个无穷远奇点，以及变换$dt=z^2d\tau$，即知定理4成立．

## 参考文献


1 李 林，党新益.西北大学学报（自然科学版），1989，19（3）：53～60

2 Dickon R J，Perko L M. J.Diff. Equ.，1970，（7）：251～273

3 叶彦谦.极限环论．上海：上海科技出版社，1984.

4 张芷芬等.微分方程定性理论．北京：科学出版社，1985.


# Bounded Cubic System (Ⅱ)


*Li Lin* (Beijing Petrochemical Training School)

*Dang Xinyi* (Northwest University)


## Abstract


This Paper is the coutinuation of the paper of Bounded Cubic System (Ⅰ). By analyzing the singular point at infinity, we obtain some sufficient condition on boundedness of the cubic system with the only one singular point at infinity.


**Key words**: Bounded cubic system; Singular point at infinity; Poincaré translation.