

具有一般组合结构的 circle packing 的 Schwarz 引理

黄小军^{①*}, 刘劲松^②, 沈良^②

① 重庆大学数理学院, 重庆 400044

② 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100190

E-mail: hxj@cqu.edu.cn, liujisong@math.ac.cn, shenl@amss.ac.cn

收稿日期: 2007-11-06; 接受日期: 2009-03-31; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10701084, 10501046) 和重庆市自然科学基金 (批准号: CSTC2008BB0151) 资助项目

摘要 对于六边形组合结构的 circle packing, Rodin (1987 年) 证明了一个类似于解析函数的 Schwarz 引理. 本文中, 对于一般组合结构的 circle packing, 我们证明了同样的 Schwarz 引理, 而且, 我们的方法比 Rodin 的方法更为简单. 同时, 我们得到了关于一般组合结构的 circle packing 的一个刚性性质.

关键词 circle packing 离散极值长度 最大值原理 双曲几何

MSC(2000) 主题分类 52C15, 30C35, 30C62, 30G25

1 引言

本文中, 一个 disk packing 指的是复平面 \mathbb{C} , 或 Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 中一族闭的几何圆盘, 且两两圆盘间无公共内点. 一个 interstice 是指 disk packing P 的补集的一个有界连通分支, 若它的闭包恰好与 P 中的三个闭圆盘相交, 则称之为 triangular interstice. 而 P 的支撑集, 记为 $\text{supp}(P)$, 定义为 P 中所有闭圆盘和 P 的所有有界 interstice 的并集.

设 P 和 \tilde{P} 为复平面 \mathbb{C} 中圆盘个数有限的两 disk packing. 若存在一保向同胚 $h: \text{supp}(P) \rightarrow \text{supp}(\tilde{P})$ 满足 $h(P) = \tilde{P}$, 则称 P 和 \tilde{P} 是同构的. 显然, 一个同构 h 诱导了一个 P 和 \tilde{P} 圆盘之间的双射. 同构本质上是一个组合概念. 如果两 disk packing 是同构的, 我们可以通过圆盘之间的相切方式决定其组合结构.

为了符号上的方便, 特引入以下指标集: 一个索引的 disk packing $P = \{P(v) : v \in V\}$ 指它的每个圆盘与某个指标集 V 相对应. $P = \{P(v) : v \in V\}$ 的网, 或相切图 $G = G(P)$ 是指由顶点集 V 生成的一个图, 其中 $[u, v]$ 是一条边的充要条件是圆盘 $P(v)$ 和 $P(u)$ 相交 (即相切). 若一个图为闭拓扑圆盘的三角剖分 T 的一维骨架, 则称该图为闭拓扑圆盘的三角剖分图.

一个重要的基本事实是 Circle Packing 定理^[1], 该定理证明了对每个有限平面图 $G = (V, E)$, 都存在一个复平面 \mathbb{C} 上的 disk packing $P = (P(v) : v \in V)$, 它的相切图恰好是 G . 更

引用格式: 黄小军, 刘劲松, 沈良. 具有一般组合结构的 circle packing 的 Schwarz 引理. 中国科学 A, 2009, 39(9): 1147-1160
Huang X J, Liu J S, Shen L. Schwarz's lemma for the circle packings with the general combinatorics. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0125-4

进一步, 当图 G 是球面 S^2 的三角剖分的一维骨架时, packing 在模去 Möbius 变换意义下是唯一的. 关于 circle packing 定理的后续证明参见文献 [2-5].

现在假定 $P = (P(v) : v \in V)$ 为 \mathbb{C} 中的一个圆盘个数有限的 disk packing. P 中的圆盘若与它的支撑集的边界相交, 则称之为边界圆盘, 并用 ∂V 记所有的边界顶点, 即 $v \in \partial V$ 当且仅当 $P(v)$ 是边界圆盘. 根据 circle packing 定理结论, 存在一个同构的 disk packing \tilde{P} , 它包含在闭的单位圆盘 \bar{U} 中, 满足 \tilde{P} 的所有边界圆盘都内切于单位圆周 ∂U .

设 D 为 \mathbb{C} 中的有界单连通区域, p_0 为它的一内点. 对每个 n , 设 P^n 为 D 内的一个 disk packing, 而且它的所有有界 interstice 都是三角的 (或者说 $G(P^n)$ 是一个闭拓扑圆盘的三角剖分图). 假设 δ_n 为一列趋于 0 的正数序列, 满足: (i) P^n 中每个圆盘的半径不超过 δ_n , (ii) P^n 中每个边界圆盘到区域 D 的边界的距离至多是 δ_n . 在 P^n 中选定一个距离点 p_0 最近的圆盘, 记为 P_0^n .

如前所述, circle packing 定理说明存在一个与 P^n 同构的 packing \tilde{P}^n , 其支撑集包含在闭的单位圆盘中且它的所有边界圆盘都与单位圆周 ∂U 相切. 设 $f_n : \text{supp}(P^n) \rightarrow \text{supp}(\tilde{P}^n)$ 为 P^n 与 \tilde{P}^n 之间的同构映射. 通过一个保持单位圆盘 U 不变的 Möbius 变换对 \tilde{P}^n 做正规化处理, 我们让 \tilde{P}^n 中与圆盘 P_0^n 相对应的圆盘 \tilde{P}_0^n 以 0 为圆心.

在 Thurston 的演讲 [6] 中, 他猜想当 P^n 为圆盘半径相同、具有六边形组合结构的无穷 disk packing 的子 packing 时, 序列 f_n 收敛到从 D 到 U 的 Riemann 映射. 该猜想后来被 Rodin 和 Sullivan 证实 [7]. 之后, Rodin 在文献 [8, Theorem 6.2 (p. 286)] 中证明了一个与解析函数类似的 Schwarz 引理: 给定紧子集 $K \subset D$, 则存在绝对常数 M_K 满足: 当 n 充分大时, 对所有满足条件 $P^n(v) \cap K \neq \emptyset$ 的顶点 v , 有 $\text{radius}(\tilde{P}^n(v))/\text{radius}(P^n(v)) \leq M_K$.

在文献 [9] 中, He Zhengxu 和 Oded Schramm 对 Rodin-Sullivan 定理给了一个新的证明, 而且他们的结果去掉了对 P^n 的组合结构的限制. 因此, 有个自然的问题: 对于无组合结构限制的 packing, 类似的 Schwarz 引理是否仍然成立? 本文中, 我们证实了该问题, 得到了如下的定理:

定理 1.1 设 $D, \tilde{D} \subset \mathbb{C}$ 为两单连通区域, p_0 为 D 一内点. 对每个 n , 设 P^n 为 D 内的 disk packing, 且 $G(P^n)$ 是闭拓扑圆盘三角剖分图, 设 \tilde{P}^n 是 \tilde{D} 中与 P^n 同构的 packing.

设 δ_n 为一列趋于 0 的正数序列, 假设 P^n 中每个圆盘的直径不超过 δ_n , 且 P^n 中每个边界圆盘 $P^n(v)$ 到区域 D 的边界的距离至多是 δ_n . 对每个 n , 假设点 p_0 总包含在 P^n 的支撑集中. 设 K 为 D 中任一紧子集, 则对充分大的 $n \in \mathbb{N}$, 当图 $G(P^n)$ 的顶点 v 满足 $P^n(v) \cap K \neq \emptyset$ 时, 有

$$\text{radius}(\tilde{P}^n(v)) \leq M_K \text{radius}(P^n(v)), \tag{1.1}$$

其中 M_K 为一只依赖于紧子集 K 的常数.

在文献 [8] (或文献 [7]) 中, 当 P^n 是六边形组合结构 packing 的子 packing, 且 P^n 中所有圆盘的半径相等时, 与之同构的 packing \tilde{P}^n 的圆盘的半径具有某种刚性性质. 本文中, 我们也获得了如下类似的刚性性质:

定理 1.2 设条件如定理 1 所述. 设 K 为 D 内一紧子集, v_0^n, v_1^n 为图 $G(P^n)$ 中满足 $P^n(v_0^n) \cap K \neq \emptyset$, 且 v_1^n 与 v_0^n 是相邻的两顶点, 则对充分大的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{1}{C} \frac{\text{radius}(P^n(v_1^n))}{\text{radius}(P^n(v_0^n))} \leq \frac{\text{radius}(\tilde{P}^n(v_1^n))}{\text{radius}(\tilde{P}^n(v_0^n))} \leq C \frac{\text{radius}(P^n(v_1^n))}{\text{radius}(P^n(v_0^n))}, \tag{1.2}$$

其中 C 是仅依赖于 K 的常数.

本文中, G 表示一个图, $E = E(G)$ 和 $V = V(G)$ 分别表示图 G 的边和顶点集合. 如果 P 是实现图 G 的 disk packing, 则对顶点集合的每个子集 $W \subseteq V$, 记 $P(W) = \bigcup_{v \in W} P(v)$. 对每个圆 c , 记 $V_c(P)$ 为所有满足 $P(v) \cap c \neq \emptyset$ 的顶点. 任给 $r > 0$, 记 $c(r)$ 为以 0 为心, r 为半径的圆周, 记 $D(r)$ 为以 $c(r)$ 为边界的闭圆盘.

2 拓扑性质

本节给出一个在定理的证明中需要的拓扑性质. 在这里, 我们给出该性质的证明只是为了文章的完整性, 证明本身是初等和众所周知的.

引理 2.1 设 D 为复平面 \mathbb{C} 中的一区域, $z_0 \in D$ 为它的一内点. 设 $D_n \subset D$ 是包含在 D 中的一列子区域, 满足 $z_0 \in D_n$ 且对任一点 $z \in \partial D_n$, 有 $\text{dist}(z, \partial D) < \delta_n$, 其中 $\delta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 则对每个紧子集 $K \subset D$, 当 n 充分大时, 有 $K \subset D_n$.

证明 否则, 存在 D 的紧子集 K_0 以及一列子区域 D_{n_k} 满足 $K_0 \not\subset D_{n_k}$, 即存在点列 $\{z_{n_k}\}$ 满足 $z_{n_k} \in K_0$ 且 $z_{n_k} \notin D_{n_k}$. 不失一般性, 不妨假设 $z_{n_k} \rightarrow z_1 \in K_0$. 我们设 $C_r = \{z \mid \text{dist}(z, z_1) \leq r < |z_0 - z_1|\} \subset D$ 并且选定一条连接点 z_0 和 z_1 的 Jordan 曲线 $J \subset D$. 显然, 当 k 充分大时, $z_{n_k} \in C_r$. 设 $d = \text{dist}(J \cup C_r, \partial D) > 0$. 因为 $z_0 \in D_{n_k}$ 且 $z_{n_k} \notin D_{n_k}$, 我们容易得到点列 $z'_{n_k} \in (\overline{z_{n_k} z_1} \cup J) \cap \partial D_{n_k}$, 其中 $\overline{z_{n_k} z_1}$ 表示连接点 z_{n_k} 和 z_1 的线段. 因此, 我们得到 $\text{dist}(z'_{n_k}, \partial D) \geq d$, 其中 $z'_{n_k} \in \partial D_{n_k}$. 这与条件对任意的点 $z \in \partial D_n$, 有 $\text{dist}(z, \partial D) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 相矛盾. 由此, 引理 2.1 得证.

注记 从上面的引理中不难看出 $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, 它实际上也满足 Carathéodory 域收敛定义.

3 最大值原理

最大值原理的各种形式, 结论或弱或强, 已经被许多学者研究和应用. 本文将给出一种适合我们应用的形式, 对一般的 disk pattern 情形要归功于 He^[10].

给定图 $G = (V, E)$. 称图 G 中的顶点 v_0 是内部顶点, 是指与 v_0 相邻的顶点集合 v_1, v_2, \dots, v_l 能形成一条闭链. 否则, 称它为边界顶点. 如果图 G 是某个闭拓扑圆盘的三角剖分的一维骨架, 则一个顶点是内部顶点恰好与它是闭拓扑圆盘的内点等价.

引理 3.1 (最大值原理) 设 G 是有限图. 设 P 和 \tilde{P} 是复平面 \mathbb{C} 中实现图 G 的两个 disk packing. 则 $\rho(\tilde{P}(v))/\rho(P(v))$ 的最大值 (或最小值) 只能在边界顶点达到.

证明 设 v_0 是一内部顶点. 设 $v_1, v_2, \dots, v_l, v_{l+1} = v_1$ 是与 v_0 相邻的顶点集合形成的闭链. 设 Q 是实现图 G 的 disk packing. 我们用 A_j 记圆盘 $Q(v_j)$ 的圆心, $1 \leq j \leq l+1$. 设 β_k 是角度 $\angle A_k A_0 A_{k+1}$ (见图 1). 因为 v_0 是内部顶点, 所以我们有 $\sum_{k=1}^l \beta_k = 2\pi$. 另一方面, $\beta_k = \arccos(g(\rho(Q(v_0)); \rho(Q(v_k)), \rho(Q(v_{k+1}))))$, 其中

$$g(x; y, z) = \frac{(x+y)^2 + (x+z)^2 - (y+z)^2}{2(x+y)(x+z)}.$$

通过简单的计算, 不难看出 β_k 是一个关于 $\rho(Q(v_k))$ (或关于 $\rho(Q(v_{k+1}))$) 的单调非减函数. 因此, $\sum_{k=1}^l \beta_k$ 是关于 $\rho(Q(v_k))$ 的严格递增函数. 由此, 最大值原理立即可得到.

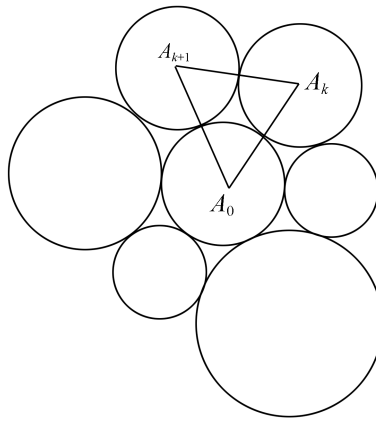


图 1 圆盘 $Q(v_j)$ 的结构图

disk packing 的最大值原理在双曲圆盘 U 中的改写形式仍然成立. 对于 U 中的闭圆盘 D , 用 $\rho_{\text{hyp}}(D)$ 表示它的双曲半径. 设 D_0 是 U 中以 0 为圆心的闭圆盘, D_1 是与 D_0 外相切的闭圆盘. 对任意的实数 γ 和任意的圆盘 D , 我们定义 $\gamma D = \{\gamma z \mid z \in D\}$. 有了这些记号, 我们有:

性质 3.2 $\rho_{\text{hyp}}(D_1)$ 是 $\rho(D_1)$ 的严格递增函数, 并且对任意的实数 $0 < \gamma < 1$, 有:

$$\frac{\rho_{\text{hyp}}(\gamma D_1)}{\rho_{\text{hyp}}(\gamma D_0)} < \frac{\rho_{\text{hyp}}(D_1)}{\rho_{\text{hyp}}(D_0)}.$$

证明 性质 3.2 结论的第 1 部分是显然的, 因此我们只证明结论的第 2 部分. 不失一般性, 不妨假设 D_1 的圆心位于实轴上. 当 $u \in [0, 1)$ 时, 设 $p(u) = \ln \frac{1+u}{1-u} - \frac{2u}{1+u^2}$. 关于变量 u 微分 $p(u)$, 我们得到 $p'(u) = [\frac{2}{1-u^2} - \frac{2}{(1+u^2)^2}] + \frac{2u^2}{(1+u^2)^2} > 0$, 其中 $0 \leq u < 1$. 因为 $p(0) = 0$, 故当 $0 < u < 1$ 时有 $p(u) > 0$. 设 $h(u) = \frac{1-u^2}{u} \ln \frac{1+u}{1-u}$. 通过简单的计算, 我们能得到 $h'(u) = \frac{2}{u} - \frac{u^2+1}{u^2} \ln \frac{1+u}{1-u}$. 注意到 $p(u) > 0$, 立即可得 $h'(u) < 0$ ($0 < u < 1$). 这说明函数 $h(u)$ 在区间 $0 < t < 1$ 上是严格递减函数. 设

$$f(t) = \frac{\int_0^t \frac{2dx}{1-x^2}}{\int_0^{\gamma t} \frac{2dx}{1-x^2}}, \quad 0 < \gamma < 1, 0 < t < 1.$$

在等式两边关于变量 t 微分, 得到

$$\frac{\int_0^{\rho_0+2\rho_1} \frac{2dx}{1-x^2}}{\int_0^{\gamma(\rho_0+2\rho_1)} \frac{2dx}{1-x^2}} > \frac{\int_0^{\rho_0} \frac{2dx}{1-x^2}}{\int_0^{\gamma\rho_0} \frac{2dx}{1-x^2}} \Rightarrow \frac{\int_{\rho_0}^{\rho_0+2\rho_1} \frac{2dx}{1-x^2}}{\int_0^{\rho_0} \frac{2dx}{1-x^2}} > \frac{\int_{\gamma\rho_0}^{\gamma\rho_0+2\gamma\rho_1} \frac{2dx}{1-x^2}}{\int_0^{\gamma\rho_0} \frac{2dx}{1-x^2}},$$

即

$$\frac{2\rho_{\text{hyp}}(D_1)}{\rho_{\text{hyp}}(D_0)} > \frac{2\rho_{\text{hyp}}(\gamma D_1)}{\rho_{\text{hyp}}(\gamma D_0)}.$$

故性质 3.2 得证.

结合性质 3.2 和引理 3.1, 我们推导出:

引理 3.3 (双曲平面的最大值原理) 设 G, P 和 \tilde{P} 如引理 3.1 所设. 假设 P 和 \tilde{P} 的圆盘都包含在 U 中. 则:

(a) $\rho_{\text{hyp}}(\tilde{P}(v))/\rho_{\text{hyp}}(P(v))$ 的最大值, 如果 > 1 , 不可能在内部顶点达到;

(b) 特别地, 如果不等式 $\rho_{\text{hyp}}(\tilde{P}_v) \leq \rho_{\text{hyp}}(P_v)$ 对每个边界顶点成立, 则该不等式对 G 的所有顶点成立.

证明 结论 (b) 直接可由结论 (a) 得到, 因此我们只证明结论 (a) 部分. 如果结论 (a) 不成立, 则存在一个内部顶点 $v_0 \in V(G)$ 使得

$$\frac{\rho_{\text{hyp}}(\tilde{P}(v_0))}{\rho_{\text{hyp}}(P(v_0))} = \max_{v \in V(G)} \frac{\rho_{\text{hyp}}(\tilde{P}(v))}{\rho_{\text{hyp}}(P(v))} > 1.$$

因此, 通过一个保持单位圆盘 U 不变的刚体运动 (它也保持双曲距离不变), 不妨假设圆盘 $P(v_0)$ 和 $\tilde{P}(v_0)$ 都以 0 为圆心. 显然, 圆盘 $P(v_0)$ 的欧氏半径不超过圆盘 $\tilde{P}(v_0)$ 的欧氏半径. 设 $\gamma = \rho(P(v_0))/\rho(\tilde{P}(v_0)) < 1$ ($0 < \gamma < 1$), 并且考虑 P 和 $\gamma\tilde{P}$ 的圆盘. 假设 v_1 是任意一个与顶点 v_0 相邻的顶点. 根据顶点 v_0 的假设和性质 3.2, 有

$$\frac{\rho_{\text{hyp}}((\gamma\tilde{P})(v_0))}{\rho_{\text{hyp}}((\gamma\tilde{P})(v_1))} > \frac{\rho_{\text{hyp}}(\tilde{P}(v_0))}{\rho_{\text{hyp}}(\tilde{P}(v_1))} \geq \frac{\rho_{\text{hyp}}(P(v_0))}{\rho_{\text{hyp}}(P(v_1))}.$$

结合 $\rho((\gamma\tilde{P})(v_0)) = \rho(P(v_0))$, 性质 3.2 的第一部分结论以及引理 3.1 的证明, 我们立即可得矛盾.

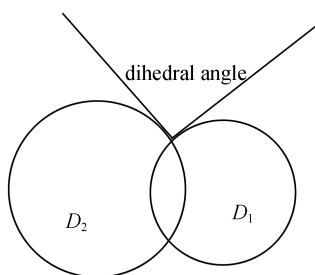


图 2 dihedral angle 的示意图

为了推广引理, 我们对 \mathbb{C} 中与 U 相交的闭圆盘 D 的双曲半径 $\rho_{\text{hyp}}(D)$ 作如下定义. 一对相交的圆盘 D_1 和 D_2 的 dihedral angle 定义为取值在 $[0, \pi]$ 的两条射线的夹角, 其中一条关于 ∂D_1 顺时针相切于 $\partial D_1 \cap \partial D_2$ 的交点之一, 另一条关于 ∂D_2 逆时针相切于同一交点 (见图 2). 如果 D 包含在 U , 我们定义 $\rho_{\text{hyp}}(D)$ 为如前定义的双曲半径. 如果 D 与 $\hat{\mathbb{C}} - U$ 相交, 设 $\alpha = \pi - \beta(D) \in [0, \pi]$, 其中 $\beta(D)$ 表示 D 与 U 之间的 dihedral angle. 我们定义 $\rho_{\text{hyp}}(D)$ 为符号 ∞^α . 特别地, 如果 D 内相切于单位圆周 U , 则 $\rho_{\text{hyp}}(D) = \infty^0$. 为了方便起见, 对任意的角度 $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq 0$ 和任意的实数 a , 我们定义 $\infty^{\alpha_2} \geq \infty^{\alpha_1} > a$ 且 $\infty^{\alpha_1}/a = 0$. 用同样的证明方法, 我们有:

引理 3.4 设 G 是有限图. P 和 \tilde{P} 是实现图 G 的两个 disk packing, P 的所有圆盘与 U 都有非空的交集而 \tilde{P} 的所有圆盘都包含在 U 中. 如果不等式 $\rho_{\text{hyp}}(\tilde{P}(v)) \leq \rho_{\text{hyp}}(P(v))$ 对每个边界顶点 v 成立, 则该不等式对 G 的所有顶点都成立.

定理 1.1 的证明 设 K 是 D 中的一紧子集, v 为 $G(P^n)$ 中满足 $P^n(v) \cap K \neq \emptyset$ 的一个顶点. 假设 $d = \text{dist}(K, \partial D) > 0$, σ 是以 $P^n(v)$ 的圆点为圆心, $d/2$ 为半径的圆盘. 显然, 对充分大的 n 有 $\sigma \subseteq K^*$, 其中 $K^* = \{z \in D \mid \text{dist}(z, K) \leq (3d)/4\}$ (因为 $\rho(P^n(v)) < \delta_n$). 故根据引理 2.1, 对充分大的 n 有 $\sigma \subset \text{supp}(P^n)$. 设 $M = \text{diameter}(\tilde{D})$. 明显地, \tilde{P}^n 的所有圆盘都包含在以 $\tilde{P}^n(v)$ 的圆点为圆心, $2M$ 为半径的圆盘 $\tilde{\sigma}$ 中.

考虑所有满足 $P^n(v^*) \cap \sigma \neq \emptyset$ 的顶点 v^* 以及相应的边组成的子图 $G_1^n \subset G^n$. 因为 $\sigma \subset \text{supp}(P^n)$, 因此容易看出如果 v^* 是 G_1^n 的一个边界顶点, 则 $P^n(v^*) \cap \partial\sigma \neq \emptyset$. 故所有的圆盘 $\tilde{P}^n(v^*)$, $v^* \in V(G_1^n)$, 都包含在圆盘 $\tilde{\sigma}$ 的内部. 因此, 不等式 $\rho_{\text{hyp}}((1/\rho(\tilde{\sigma}))\tilde{P}^n(v^*)) \leq \rho_{\text{hyp}}((1/\rho(\sigma))P^n(v^*))$ 对所有的边界顶点都成立. 运用引理 3.4, 我们推断出, 对每个顶点 $v^* \in V(G_1^n)$,

$$\rho_{\text{hyp}}((1/\rho(\tilde{\sigma}))\tilde{P}^n(v^*)) \leq \rho_{\text{hyp}}((1/\rho(\sigma))P^n(v^*)).$$

特别地, 对顶点 v , 有

$$\rho_{\text{hyp}}((1/\rho(\tilde{\sigma}))\tilde{P}^n(v)) \leq \rho_{\text{hyp}}((1/\rho(\sigma))P^n(v)). \quad (3.1)$$

对充分大的 n , 圆盘 $(1/\rho(\tilde{\sigma}))\tilde{P}^n(v)$ 和 $(1/\rho(\sigma))P^n(v)$ 都包含在圆盘 $(1/2)U$ 中 (因为 $\rho(P^n(v)) < \delta_n$), 因此它们的欧氏半径与双曲半径是可比较的. 所以根据 (3.1) 知, 存在一个万有常数 $C_0 > 0$ 使得

$$(1/\rho(\tilde{\sigma}))\rho(\tilde{P}^n(v)) \leq C_0(1/\rho(\sigma))\rho(P^n(v)).$$

注意到 $\rho(\tilde{\sigma}) = 2M$ 和 $\rho(\sigma) = d/2$, 因此

$$\rho(\tilde{P}^n(v)) \leq \frac{C_0(4M)}{d}\rho(P^n(v)).$$

由此, 定理 1.1 得证.

4 离散极值长度

本节将广泛地使用图论中的离散极值长度概念. 这种类似于 Riemann 曲面上曲线族极值长度的想法由 Cannon 和其他学者提出和研究 (见文献 [11-13]). (进一步关于 “transboundary 极值长度” 概念见文献 [14]) 下面我们将介绍一些基本概念及结果. 对于详细介绍, 请参考文献 [13].

设 $G = (V, E)$ 是一个图而 V 是它的顶点集合. 图上的一个顶点度量就是一个函数 $\eta : V \rightarrow [0, +\infty)$. η 度量面积定义为

$$\text{area}(\eta) = \sum_{v \in V} \eta(v)^2. \quad (4.1)$$

图 G 上所有满足 $0 < \text{area}(\eta) < \infty$ 的顶点度量 η 组成的集合记为 $\mathcal{M}(G)$. 任意一个顶点子集称之为顶点曲线. 顶点曲线 γ 的 η -长度定义为:

$$\int_{\gamma} d\eta = \sum_{v \in \gamma} \eta(v). \quad (4.2)$$

设 Γ 是图 G 的一族顶点曲线族. 一个顶点度量 η , 如果对每个 $\gamma \in \Gamma$ 有 $\int_{\gamma} d\eta \geq 1$, 则称之为是 Γ -容许的. Γ 的顶点模定义为

$$\text{MOD}(\Gamma) = \inf \{ \text{area}(\eta) \mid \eta : V \rightarrow [0, +\infty) \text{ 是 } \Gamma\text{-容许的} \}. \quad (4.3)$$

现在, 我们定义 Γ 的 η -长度为 Γ 中所有顶点曲线的 η -长度的下确界:

$$L_{\eta}(\Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} d\eta. \quad (4.4)$$

最后, Γ 的顶点极值长度定义为

$$\text{VEL}(\Gamma) = \sup_{\eta \in \mathcal{M}(G)} \left\{ \frac{L_{\eta}(\Gamma)^2}{\text{area}(\eta)} \right\}. \quad (4.5)$$

为方便起见, 如果 Γ 是空集, 我们认为它的顶点极值长度为 $+\infty$.

性质 4.1

$$\text{VEL}(\Gamma) = \frac{1}{\text{MOD}(\Gamma)}. \tag{4.6}$$

$$\text{VEL}(\Gamma) = \sup_{\eta \in \mathcal{M}_1} \{\text{area}(\eta)\}, \text{ 其中 } \mathcal{M}_1 = \left\{ \eta \in \mathcal{M}(G) \mid \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} d\eta = \text{area}(\eta) \right\}. \tag{4.7}$$

证明 显然, 如果 η 是 Γ -容许的, 则

$$\frac{L_{\eta}(\Gamma)^2}{\text{area}(\eta)} \geq \frac{1}{\text{area}(\eta)}. \tag{4.8}$$

根据这个不等式, 我们可推断出

$$\begin{aligned} \text{VEL}(\Gamma) &= \sup_{\eta \in \mathcal{M}(G)} \left\{ \frac{L_{\eta}(\Gamma)^2}{\text{area}(\eta)} \right\} \geq \sup \left\{ \frac{L_{\eta}(\Gamma)^2}{\text{area}(\eta)} \mid \eta \text{ 是 } \Gamma\text{-容许的} \right\} \\ &\geq \frac{1}{\inf \{\text{area}(\eta) \mid \eta \text{ 是 } \Gamma\text{-容许的}\}} = \frac{1}{\text{MOD}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

另一方面, 对每个顶点度量 $\eta \in \mathcal{M}(G)$, 如果 $L_{\eta}(\Gamma) > 0$, 我们设 $\eta_1 = \eta/L_{\eta}(\Gamma)$. 则 η_1 是 Γ -容许的, 同时我们有:

$$\frac{L_{\eta}(\Gamma)^2}{\text{area}(\eta)} = \frac{L_{\eta_1}(\Gamma)^2}{\text{area}(\eta_1)} = \frac{1}{\text{area}(\eta_1)} \leq \frac{1}{\text{MOD}(\Gamma)}. \tag{4.9}$$

如果 $L_{\eta}(\Gamma) = 0$, 显然不等式 (4.9) 仍然成立. 因此, $\text{VEL}(\Gamma) \leq 1/\text{MOD}(\Gamma)$ 并且等式 (4.6) 成立. 注意到以下事实: $\mathcal{M}(G)$ 中每个度量乘上一个合适的常数 (该常数依赖于 η) 后, 可成为 \mathcal{M}_1 中的度量. 因此, 等式 (4.7) 容易获得. 在此, 我们把等式 (4.7) 的验证留给读者.

图 $G = (V, E)$ 中的一条道路就是一个有穷或无穷顶点序列 (v_0, v_1, \dots) , 满足对任意的 $i = 0, 1, \dots$, 有 $[v_i, v_{i+1}] \in E$ 成立. 一条道路的所有顶点组成的集合是一条顶点曲线, 为了方便起见, 我们将不区分顶点道路和顶点曲线之间的区别. 我们称一条道路 $\gamma = (v_0, v_1, \dots)$ 是一条 Hamiltonian 道路 (或简单道路), 是指它的顶点 v_0, v_1, \dots 互不相同. γ 的顶点集合记为 $V(\gamma) = \{v_0, v_1, \dots\}$. 同样地, 对图 G 中的道路集合 Γ , 我们定义 $V(\Gamma) = \{V(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$. 设 V_1, V_2 是两非空顶点子集. 设 $\Gamma_G(V_1, V_2)$ 是图 G 中所有连接 V_1 和 V_2 的道路组成的集合. 则 V_1 和 V_2 在 G 中的顶点极值长度定义为:

$$\text{VEL}_G(V_1, V_2) = \text{VEL}(\Gamma_G(V_1, V_2)). \tag{4.10}$$

对图 G 中任意 3 个非空顶点集合 V_1, V_2 和 V_3 , 如果任意一条从 V_1 到 V_3 的道路都至少通过 V_2 中的某个顶点, 则称 V_2 分离 V_1 和 V_3 . 注意, 我们并不要求 $V_i \cap V_j = \emptyset$, 其中 $1 \leq i < j \leq 3$. 在图论中, V_2 也被称为是 V_1 和 V_3 之间的 cutset.

引理 4.2 设 V_1, V_2, \dots, V_{2m} 是两两互不相交、非空的顶点集合, 满足当 $i_1 < i_2 < i_3$ 时, V_{i_2} 分离 V_{i_1} 和 V_{i_3} . 则

$$\text{VEL}_G(V_1, V_{2m}) \geq \sum_{k=1}^m \text{VEL}_G(V_{2k-1}, V_{2k}). \tag{4.11}$$

证明 显然, 我们只需证明 $m = 2$ 的情形. 设

$$\Gamma_{1,2} = \{\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \Gamma_G(V_1, V_2) \mid \gamma \text{ 是 Hamiltonian 道路},$$

$$\text{其中当 } 2 \leq j \leq n-1 \text{ 时, } v_j \notin \bigcup_{i=1}^4 V_i\};$$

$$\Gamma_{3,4} = \{\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \Gamma_G(V_3, V_4) \mid \gamma \text{ 是 Hamiltonian 道路},$$

其中当 $2 \leq j \leq n-1$ 时, $v_j \notin \bigcup_{i=1}^4 V_i$.

从前面的定义以及引理 4.2 的条件不难看出 $V(\Gamma_{1,2}) \cap V(\Gamma_{3,4}) = \emptyset$. 如果 $V(\Gamma_{1,2})$ (或 $V(\Gamma_{3,4})$) 是空集, 则 $\Gamma_G(V_1, V_4)$ 一定是空集. 根据顶点极值长度定义的注记, $\text{VEL}_G(V_1, V_4)$ 等于 ∞ , 由此可知等式 (4.11) 成立. 因此, 我们不妨假设 $V(\Gamma_{1,2})$ 和 $V(\Gamma_{3,4})$ 都是非空集合. 现在, 我们考虑由顶点集合 $V(\Gamma_{1,2})$ (或 $G_{3,4}$) 以及相应的边组成的子图 $G_{1,2}$ (或 $G_{3,4}$). 我们断言:

$$\text{VEL}_G(V_1, V_2) = \text{VEL}_{G_{1,2}}(V_1, V_2); \tag{4.12}$$

$$\text{VEL}_G(V_3, V_4) = \text{VEL}_{G_{3,4}}(V_3, V_4). \tag{4.13}$$

因为这两个等式的证明是类似的, 因此我们仅证明等式 (4.12). 对每个度量 $\eta \in \mathcal{M}(G)$, 我们用 $\eta|_{G_{1,2}}$ 表示度量 η 在顶点子集合 $V(G_{1,2})$ 上的限制. 以下, 我们区分两种情形:

情形 1 $\text{area}(\eta|_{G_{1,2}}) = 0$. 对每条道路 $\gamma \in \Gamma_G(V_1, V_2)$, 存在一条 Hamiltonian 道路 $\gamma^* \in \Gamma_{1,2} \subseteq \Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)$ 使得 $V(\gamma^*) \subseteq V(\gamma)$. 因此

$$0 = \int_{\gamma^*} d(\eta|_{G_{1,2}}) = \int_{\gamma^*} d\eta.$$

因为 $\gamma^* \in \Gamma_G(V_1, V_2)$, 故 $\inf_{\gamma \in \Gamma_G(V_1, V_2)} \int_{\gamma} d\eta = 0$. 所以

$$0 = \frac{(\inf_{\gamma \in \Gamma_G(V_1, V_2)} \int_{\gamma} d\eta)^2}{\text{area}(\eta)} \leq \text{VEL}_{G_{1,2}}(V_1, V_2).$$

情形 2 $\text{area}(\eta|_{G_{1,2}}) > 0$. 显然, $\Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2) \subseteq \Gamma_G(V_1, V_2)$. 对 $\Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)$ 中的每条道路 γ^* , 我们有

$$\inf_{\gamma \in \Gamma_G(V_1, V_2)} \int_{\gamma} d\eta \leq \int_{\gamma^*} d\eta = \int_{\gamma^*} d(\eta|_{G_{1,2}}).$$

当 γ^* 跑遍 $\Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)$ 时, 结合 $\eta|_{G_{1,2}} \in \mathcal{M}(G_{1,2})$, 我们可推导出

$$\frac{(\inf_{\gamma \in \Gamma_G(V_1, V_2)} \int_{\gamma} d\eta)^2}{\text{area}(\eta)} \leq \frac{(\inf_{\gamma^* \in \Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)} \int_{\gamma^*} d(\eta|_{G_{1,2}}))^2}{\text{area}(\eta|_{G_{1,2}})} \leq \text{VEL}_{G_{1,2}}(V_1, V_2).$$

结合这两种情况, 注意到 η 是 $\mathcal{M}(G)$ 中的任意一个度量, 我们可得到 $\text{VEL}_G(V_1, V_2) \leq \text{VEL}_{G_{1,2}}(V_1, V_2)$.

另一方面, 对每个度量 $\eta^* \in \mathcal{M}(G_{1,2})$, 定义

$$\eta(v) = \begin{cases} \eta^*(v), & v \in V(G_{1,2}), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

对于每条道路 $\gamma \in \Gamma_G(V_1, V_2)$, 存在一条道路 $\gamma^* \in \Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)$ 满足 $V(\gamma^*) \subseteq V(\gamma)$. 因此, $\int_{\gamma} d\eta \geq \int_{\gamma^*} d\eta = \int_{\gamma^*} d\eta^* \geq \inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta^*$. 故

$$\inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_G(V_1, V_2)} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta \geq \inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta^*.$$

同时, 不等式

$$\inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_G(V_1, V_2)} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta \leq \inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta^*$$

显然成立. 故

$$\inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_G(V_1, V_2)} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta = \inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta^*.$$

注意到 $\text{area}(\eta^*) = \text{area}(\eta)$, 因此我们得到

$$\text{VEL}_G(V_1, V_2) \geq \frac{\inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_G(V_1, V_2)} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta}{\text{area}(\eta)} = \frac{\inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta^*}{\text{area}(\eta^*)}.$$

因为 η^* 是 $\mathcal{M}(G_{1,2})$ 中的任意一个度量, 所以 $\text{VEL}_G(V_1, V_2) \geq \text{VEL}_{G_{1,2}}(V_1, V_2)$, 由此, 断言得证.

现在, 我们来证明不等式 (4.11). 选取度量 $\eta_1 \in \mathcal{M}_1(G_{1,2})$ 和 $\eta_2 \in \mathcal{M}_1(G_{3,4})$, 满足

$$\inf_{\gamma \in \Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)} \int_{\gamma} d\eta_1 = \text{area}(\eta_1) \text{ 且 } \inf_{\gamma \in \Gamma_{G_{3,4}}(V_3, V_4)} \int_{\gamma} d\eta_2 = \text{area}(\eta_2).$$

因为 $V(G_{1,2}) \cap V(G_{3,4}) = \emptyset$, 所以可如下定义度量 $\eta \in \mathcal{M}(G)$:

$$\eta(v) = \begin{cases} \eta_1(v), & v \in V(G_{1,2}), \\ \eta_2(v), & v \in V(G_{3,4}), \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

对于每条道路 $\gamma \in \Gamma_G(V_1, V_4)$, 由于当 $i_1 < i_2 < i_3$ 时 V_{i_2} 分离 V_{i_1} 和 V_{i_3} , 所以存在两条道路 $\gamma_1 \in \Gamma_{G_{1,2}}(V_1, V_2)$ 和 $\gamma_2 \in \Gamma_{G_{3,4}}(V_3, V_4)$ 满足 $V(\gamma_1) \cap V(\gamma_2) = \emptyset$ 且 $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq V(\gamma)$. 因此

$$\int_{\gamma} d\eta \geq \int_{\gamma_1} d\eta_1 + \int_{\gamma_2} d\eta_2 \geq \text{area}(\eta_1) + \text{area}(\eta_2) = \text{area}(\eta).$$

由此, 我们推断出 $\text{VEL}_G(V_1, V_4) \geq \text{area}(\eta) = \text{area}(\eta_1) + \text{area}(\eta_2)$. 立即可得

$$\text{VEL}_G(V_1, V_4) \geq \sup_{\eta_1 \in \mathcal{M}_1(G_{1,2})} \text{area}(\eta_1) + \sup_{\eta_2 \in \mathcal{M}_1(G_{3,4})} \text{area}(\eta_2).$$

结合性质 4.1 中的等式 (4.7) 和断言, 引理 4.2 得证.

接下来这个关于顶点极值长度的性质在文献 [13] 中称之为 Duality 定理. 为了文章的完整性, 在这里我们给出它的一个证明.

性质 4.3 设 $G = (V, E)$ 是有限连通图, V_1 和 V_2 是 G 中两个非空的顶点集合. 设 $\Gamma_G^*(V_1, V_2)$ 是 G 中所有分离 V_1 和 V_2 的顶点曲线族, 则

$$\text{VEL}(\Gamma_G^*(V_1, V_2)) = \frac{1}{\text{VEL}(\Gamma_G(V_1, V_2))}. \tag{4.14}$$

证明 显然, $\text{VEL}(\Gamma_G(V_1, V_2)) > 0$. 为了方便起见, 我们用 Γ (或 Γ^*) 表示 $\Gamma_G(V_1, V_2)$ (或 $\Gamma_G^*(V_1, V_2)$). 一个度量若达到 $\text{VEL}(\Gamma)$ 的上确界, 则称之为 $\text{VEL}(\Gamma)$ 的一个极值度量. 在文献 [12] 中 (见引理 3.1), 我们知道, 当 $\text{area}(\eta) = 1$ 时, 对于 $\text{VEL}(\Gamma)$ 存在着一个极值度量 η . 设 γ^* 是 Γ^* 中具有最短 η -长度的曲线 (因为 G 是有限图), 即, $\int_{\gamma^*} d\eta = \inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma^*} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta$. 当 $t \geq 0$ 时, 设

$$\eta_t(v) = \begin{cases} \eta(v) + t, & v \in V(\gamma^*), \\ \eta, & \text{其它.} \end{cases}$$

因为 Γ 中每条道路必定与 γ^* 相交, 所以我们有 $L_{\eta_t} \geq L_{\eta} + t$, 其中 $L_{\eta} = L_{\eta}(\Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} d\eta$. 故 $D_+(L_{\eta_t}) \geq 1$, 其中 D_+ 表示关于变量 t 在 $t = 0$ 处的单边 Dini 导数. 容易计算出

$$D_+(\text{area}(\eta_t)) = \sum_{v \in V(\gamma^*)} D_+(\eta(v) + t)^2 = \sum_{v \in V(\gamma^*)} 2\eta(v) = 2 \int_{\gamma^*} d\eta.$$

设 $\hat{L}(\eta) = L_{\eta}^2 / \text{area}(\eta)$. 因为 η 是极值度量 (即 $\hat{L}(\eta) \geq \hat{L}(\eta_t)$), 所以有

$$0 \geq D_+(\hat{L}(\eta_t)) = D_+\left(\frac{L_{\eta_t}^2}{\text{area}(\eta_t)}\right) \geq \frac{\text{area}(\eta)^2 D_+(L_{\eta_t}^2) - L_{\eta}^2 D_+(\text{area}(\eta_t)^2)}{\text{area}(\eta)^2}.$$

根据前面的计算以及正规化条件 $\text{area}(\eta) = 1$, 我们有

$$0 \geq D_+(L_{\eta_t}^2) - L_{\eta_t}^2 D_+(\text{area}(\eta_t)) \geq 2L_{\eta_t} - 2L_{\eta_t}^2 \int_{\gamma^*} d\eta.$$

因为 $\int_{\gamma^*} d\eta = \inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma^*} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta$, 且 η 是关于 $\text{VEL}(\Gamma)$ 的满足 $\text{area}(\eta) = 1$ 的极值度量, 故

$$\frac{(\inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma^*} \int_{\tilde{\gamma}} d\eta)^2}{\text{area}(\eta)} \geq \frac{\text{area}(\eta)}{(L_{\eta})^2} = \frac{1}{\text{VEL}(\Gamma)},$$

因此, 得出 $\text{VEL}(\Gamma^*) \geq 1/\text{VEL}(\Gamma)$. 用同样的证明, 注意到 $\text{VEL}(\Gamma^*)$ 的极值度量仍然存在, 我们能推断出 $\text{VEL}(\Gamma^*) \leq 1/\text{VEL}(\Gamma)$. 由此, 性质 4.3 得证.

我们回顾一下, $c(r)$ 表示以 0 为圆心、 r 为半径的圆周. 设 P 是 \mathbb{C} 中的一个 disk packing, $V_c = V_c(P) = \{v \mid P(v) \cap c \neq \emptyset\}$. 有了这些符号, 我们有如下结果 (disk pattern 情形请参考文献 [10]).

引理 4.4 设 $G = (V, E)$ 是一个图. 假设 P 是 \mathbb{C} 中实现图 G 的 disk packing. 则对任意的 $r_2 > r_1 > 0$, 有

$$\text{VEL}(V_{c(r_1)}, V_{c(r_2)}) \geq \frac{(r_2 - r_1)^2}{(8 + (2\pi)^2)(r_2)^2}. \tag{4.15}$$

特别地, 如果 $r_2 \geq 2r_1$, 则

$$\text{VEL}(V_{c(r_1)}, V_{c(r_2)}) \geq \frac{1}{(32 + (4\pi)^2)}. \tag{4.16}$$

证明 设 $R(r_1, r_2)$ 表示环域 $\{z \mid r_1 < |z| < r_2\}$. 对于顶点 $v \in V$, 如果圆盘 $P(v) \cap R(r_1, r_2) \neq \emptyset$, 设 $l(v) = \max\{r_1, \text{dist}(0, P(v))\}$, $L(v) = \min\{r_2, \sup_{z \in P(v)} |z|\}$. 如下定义 $d(v)$ (见图 3):

$$d(v) = \begin{cases} L(v) - l(v), & \text{当 } P(v) \cap R(r_1, r_2) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

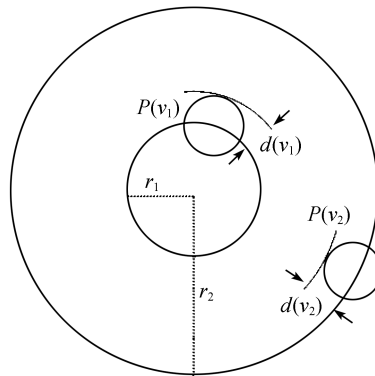


图 3 $d(v)$ 的几何含义

从 $d(v)$ 的几何含义不难看出,

$$\pi \left(\frac{d(v)}{2} \right)^2 \leq \text{area}(P(v)). \tag{4.17}$$

设 γ 是图 G 中连接 $V_{c(r_1)}$ 和 $V_{c(r_2)}$ 的一条道路. 则 $P(\gamma) = \bigcup_{v \in V(\gamma)} P(v)$ 是一个连接 $c(r_1)$ 和 $c(r_2)$ 的连续统 (见图 4).

由此可得 $\sum_{v \in V(\gamma)} d(v) \geq r_2 - r_1$. 设 $D(r_2)$ 是以 0 为圆心, r_2 为半径的闭圆盘, $\eta(v) = d(v)/(r_2 - r_1)$. 则 η 是 $\Gamma_G(V_{c(r_1)}, V_{c(r_2)})$ -容许的, 而且根据 (4.3) 和 (4.17) 式, 有

$$\begin{aligned} \text{MOD}(\Gamma_G(V_{c(r_1)}, V_{c(r_2)})) &\leq \text{area}(\eta) \\ &\leq \sum_{\text{area}(P(v) \cap D(r_2)) \geq (1/2)\text{area}(P(v))} (4/\pi)\text{area}(P(v))/(r_2 - r_1)^2 \\ &\quad + \sum_{\text{area}(P(v) \cap D(r_2)) < (1/2)\text{area}(P(v))} d(v)^2/(r_2 - r_1)^2. \end{aligned}$$

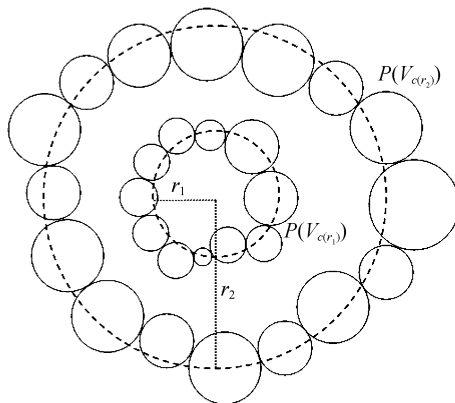


图 4 图 G 中的 γ 是连接 $V_{c(r_1)}$ 和 $V_{c(r_2)}$ 的一个连续统

因为 \mathbb{C} 中任意一点至多属于 disk packing P 的一个圆盘, 所以上式右端的求和第 1 项不超过 $(4/\pi) \cdot 2 \cdot \text{area}(D(r_2))/(r_2 - r_1)^2 = 8(r_2)^2/(r_2 - r_1)^2$. 而上式右端的求和第 2 项不超过 $(2\pi r_2)^2/(r_2 - r_1)^2$, 因为,

$$\sum_{\text{area}(P_v \cap D(r_2)) < (1/2)\text{area}(P_v)} d(v) \leq \text{length}(\partial D(r_2)) = 2\pi r_2. \tag{4.18}$$

因此,

$$\text{MOD}(\Gamma_G(V_{c(r_1)}, V_{c(r_2)})) \leq \text{area}(\eta) \leq [8 + (2\pi)^2](r_2)^2/(r_2 - r_1)^2. \tag{4.19}$$

由此可得 (4.15) 式.

5 定理 1.2 的证明

设 G 是一个图, P 是复平面 \mathbb{C} 中实现图 G 的 disk packing. 如果 G 是闭拓扑圆盘三角剖分图, 则对任意满足 $c \subseteq \text{supp}(P)$ 的圆周 c , 有 $V_c = V_c(P)$ 是顶点连通集合, 因此, $P(V_c) = \sum_{v \in V_c} P(v)$ 是道路连通的. 容易看出, 对任意一条道路 $\gamma = (v_0, v_2, \dots, v_l)$, 集合 $P(\gamma) = \sum_{k=0}^l P(v_k)$ 是道路连通的. 下面的引理关于 disk pattern 情形出现在文献 [10] 中, 为了文章的完整性, 在此我们给出它的证明.

引理 5.1 设图 $G = (V, E)$ 是一个闭拓扑圆盘三角剖分图, P 是复平面 \mathbb{C} 中实现图 G 的 disk packing. 设 $V_0 = \{v_0\}$, V_1, V_2 和 V_3 是两两互不相交的、有限的、连通的、内部顶点组成的集合, 设 $V_4 = \partial V$. 假设对任意的 $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4$, 有顶点集合 V_{i_2} 分离 V_{i_1} 和 V_{i_3} . 如果

$$\text{VEL}(V_1, V_2) > 72 + (6\pi)^2, \tag{5.1}$$

则存在常数 $r > 0$ 使得对任意的以 $P(v_0)$ 的圆心为心、 $\rho(c) \in [r, 2r]$ 为半径的圆周, 有顶点集合 $V_c(P)$ 分离 V_1 和 V_2 .

证明 不妨假定圆盘 $P(v_0)$ 以 0 为圆心. 设 $r = \sup\{\text{dist}(0, z) : z \in P(v) \text{ 且 } v \in V_1\}$, 其中 $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ 表示欧氏距离. 不失一般性, 不妨假设 $r = 1$.

设 $\gamma^* \in \Gamma_G^*(V_1, V_2)$. 则 γ^* 也分离 $V_1 \cup V_0$ 和 ∂V . 因此, 根据 V_1, V_2 和 G 的假定, 我们有

$$\text{diam}(P(\gamma^*)) \geq r = 1. \tag{5.2}$$

下面反证, 假定引理 5.1 的结论不对. 则存在圆周 $c(\rho_1)$ 以 $z_0 = 0$ 为心, $\rho_1 \in [1, 2]$ 为半径, 使得 $V_{c(\rho_1)}$ 不能分离 V_1 和 V_2 . 因此, 存在图中一条道路 γ_0 连接 V_1 和 V_2 使得 $V(\gamma_0) \cap V_{c(\rho_1)} = \emptyset$. 即 $P(\gamma_0) \cap c(\rho_1) = \emptyset$. 换句话说, 连续统 $P(\gamma_0)$ 要么包含在圆盘 $D(\rho_1)$ 内部, 要么在圆盘 $D(\rho_1)$ 外部. 但是 $D(1)$ 与每个 $P(v)$, $v \in V_1$, 有非空的交集, 而且 γ_0 包含有 V_1 的一个顶点, 所以我们有 $P(\gamma_0) \cap D(1) \neq \emptyset$.

因此, $P(\gamma_0)$ 包含在 $D(\rho_1)$ 的内部 (注意 $\rho_1 \geq 1$). 因为 $\gamma_0 \in \Gamma_G(V_1, V_2)$, 且 $\gamma^* \in \Gamma_G^*(V_1, V_2)$, 所以我们可推断出

$$P(\gamma^*) \cap D(\rho_1) \supseteq P(\gamma^*) \cap P(\gamma_0) \supseteq P(V(\gamma^*) \cap V(\gamma_0)) \neq \emptyset. \tag{5.3}$$

对每个顶点 v , 设 $\eta(v) = \text{diam}(P(v) \cap D(3))$. 因此, $\eta : V \rightarrow [0, \infty)$ 是该图的一个顶点度量. 如果 $\gamma^* \in \Gamma_G^*(V_1, V_2)$ 是连通的, 则由 (5.3) 式可知 $P(\gamma^*)$ 要么包含在 $D(3)$ 中, 要么它是一个连接 $c(\rho_1)$ 和 $c(3)$ 的连续统. 无论哪种情况, 根据 (5.2) 式和不等式 $3 \geq \rho_1 + 1$, 我们都能推断出 $\int_{\gamma^*} d\eta = \sum_{v \in V(\gamma^*)} \text{diam}(P(v) \cap D(3)) \geq 1$. 运用文献 [13] 的 connected cut 引理 (或文献 [15] 的 Alexander 引理), 容易看出, $\Gamma_G^*(V_1, V_2)$ 中每条顶点曲线都包含一条连通的子顶点曲线 γ^* 属于 $\Gamma_G^*(V_1, V_2)$. 因此, η 是 $\Gamma_G^*(V_1, V_2)$ -容许的. 故

$$\text{MOD}(\Gamma_G^*(V_1, V_2)) \leq \text{area}(\eta).$$

通过一个与引理 4.4 类似的讨论 (见 (4.19)), 我们推断出

$$\text{MOD}(\Gamma_G^*(V_1, V_2)) \leq \text{area}(\eta) \leq [8 + (2\pi)^2] \cdot 3^2.$$

参照性质 4.1 和 4.3, 这与 (5.1) 式相矛盾.

定理 1.2 的证明 设 $K \subset D$ 是一紧子集. 对每个 n , 设 v_0^n, v_1^n 是两个顶点, 满足 $P^n(v_0^n) \cap K \neq \emptyset$ 且 v_1^n 是与 v_0^n 相邻的顶点. 假设 $d = \text{dist}(K, \partial D) > 0$. 我们不妨假定圆盘 $P^n(v_0)$ 和与它相对应的圆盘 $\tilde{P}^n(v_0)$ 都以 0 为圆心.

设 k 是如下的固定的整数:

$$k = 2 + [(72 + (6\pi)^2)(32 + (4\pi)^2)] \text{ 的整数部分}. \tag{5.4}$$

设 n 充分大, 满足 $n > k$ 且 $\ln \frac{d}{2\delta_n} / \ln 4 > 2k$. 对于每个这样的 n , 设 $r_i = 4^i \delta_n$, $V_0 = \{v_0^n, v_1^n\}$, $V_i = V_{c(r_i)}$, 其中 $1 \leq j \leq 2k$. 根据 δ_n 的定义, 容易得到, 当 $i \neq j$ 时, P^n 没有圆盘同时与 $c(r_i)$ 和 $c(r_j)$ 相交. 即 $V_{c(r_i)} \cap V_{c(r_j)} = \emptyset$. 同时, $V_{c(r_i)} \cap N(V_{c(r_j)}) = \emptyset$, 且 $N(V_{c(r_i)}) \cap V_{c(r_j)} = \emptyset$, 其中 $N(V)$ 表示由 V 中的顶点以及和由 V 中的顶点相邻的顶点组成的集合. 因为 $\ln \frac{d}{2\delta_n} / \ln 4 > 2k$, 所以对充分大的 n , 根据引理 2.1, 有 $c(r_{2k}) \subset \text{supp}(P^n)$. 设 $V_{2k+1} = \partial V(P^n)$. 对任意的 $0 \leq i_1 < i_2 < i_3$, 显然 V_{i_2} 分离 V_{i_1} 和 V_{i_3} . 因此, 根据引理 4.2, 有

$$\text{VEL}(V_2, V_{2k-1}) \geq \sum_{i=1}^{k-1} \text{VEL}(V_{2i}, V_{2i+1}).$$

由引理 4.4, $\text{VEL}(V_{2i}, V_{2i+1}) \geq 1/(32 + (4\pi)^2)$. 因此,

$$\text{VEL}(V_2, V_{2k-1}) \geq \frac{k-1}{32 + (4\pi)^2}.$$

根据整数 k 的定义, 有

$$\text{VEL}(V_2, V_{2k-1}) > 72 + 6\pi^2. \tag{5.5}$$

应用引理 5.1 于 packing $Q = \tilde{P}^n$ 可知, 存在常数 r^* 使得对任意的 $\rho \in [r^*, 2r^*]$, 顶点集合 $V_{c(\rho)}^*$ ($V_{c(\rho)}^* = \{v \mid Q(v) \cap c(\rho) \neq \emptyset\}$) 分离 V_2 和 V_{2k-1} . 同时, $V_{c(\rho)}^*$ 也分离 V_0 和 V_{2k+1} . 更进一步, $V_{c(\rho)}^* \cap V_1 \subseteq V_2 \cap V_1 = \emptyset$ 且 $V_{c(\rho)}^* \cap V_{2k} \subseteq N(V_{2k-1}) \cap V_{2k} = \emptyset$. 因此, $\tilde{P}^n(V_1)$ 包含在圆盘 $c(2r^*)$ 的内部 (见图 5).

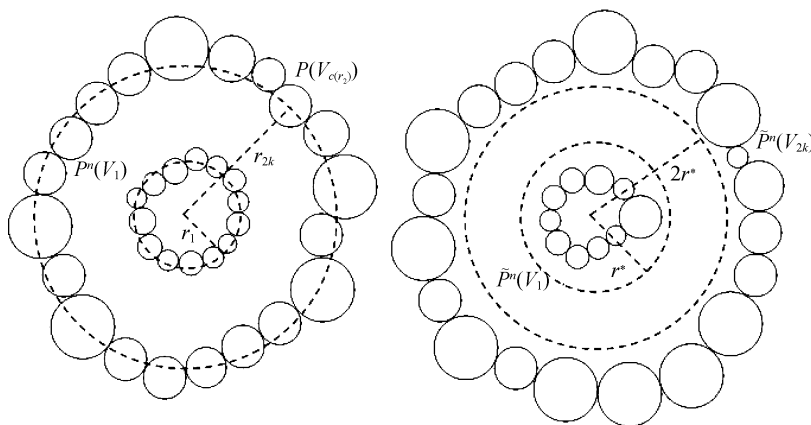


图 5 顶点集合 $P^n(V_1)$, $P^n(V_{2k})$, $\tilde{P}^n(V_1)$ 以及 $\tilde{P}^n(V_{2k})$.

考虑由 $G(P^n)$ 中满足 $P^n(v) \cap D(r_1) \neq \emptyset$ 的顶点 v 以及相应的边组成的子图 G_1 . 显然, 圆盘 $\tilde{P}^n(v), v \in V(G_1)$ 都包含在圆盘 $D(r^*) \subset D(2r^*)$ 内部. 因为 $D(r_1) \subseteq \text{supp}(P^n)$ (注意 $c(r_{2k}) \subset \text{supp}(P^n)$), 所以对每个 $v \in \partial V(G_1)$, 我们有 $P^n(v) \cap c(r_1) \neq \emptyset$. 因此, 不等式 $\rho_{\text{hyp}}((1/(2r^*))\tilde{P}^n(v)) \leq \rho_{\text{hyp}}((1/r_1)P^n(v))$ 对 $V(G_1)$ 中的每个边界顶点 v 成立. 运用引理 3.4, 我们可推导出, 对每个顶点 $v \in V(G_1)$, 有

$$\rho_{\text{hyp}}((1/(2r^*))\tilde{P}^n(v)) \leq \rho_{\text{hyp}}((1/r_1)P^n(v)).$$

特别地, 当 $v = v_j^n, j = 0, 1$ 时, 有

$$\rho_{\text{hyp}}((1/(2r^*))\tilde{P}^n(v_j^n)) \leq \rho_{\text{hyp}}((1/r_1)P^n(v_j^n)). \tag{5.6}$$

另一方面, 考虑由满足 $\tilde{P}^n(v) \cap D(2r^*) \neq \emptyset$ 的顶点 v 以及相应的边组成的子图 G_2 . 显然, 圆盘 $P^n(v), v \in V(G_2)$ 都包含在圆盘 $D(r_{2k})$ 的内部. 再次运用引理 3.4 可得,

$$\rho_{\text{hyp}}((1/(2r^*))\tilde{P}^n(v)) \geq \rho_{\text{hyp}}((1/r_{2k})P^n(v)), \quad \text{对任意的顶点 } v \in V(G_2).$$

因此, 当 $v = v_j^n, j = 0, 1$ 时, 有

$$\rho_{\text{hyp}}((1/(2r^*))\tilde{P}^n(v_j^n)) \geq \rho_{\text{hyp}}((1/r_{2k})P^n(v_j^n)). \tag{5.7}$$

因为圆盘 $(1/(2r^*))\tilde{P}^n(v_j^n), (1/r_1)P^n(v_j^n), (1/r_{2k})P^n(v_j^n), j = 0, 1$ 都包含在圆盘 $(1/2)U$ 中, 因此, 它们的欧氏半径和双曲半径是可比较的. 故由 (5.6) 和 (5.7) 式知, 存在万有常数 $C_0 > 0$ 使得

$$(1/(2r^*))\rho(\tilde{P}^n(v_j^n)) \leq (1/r_1)\rho(P^n(v_j^n)),$$

以及

$$(1/(2r^*))\rho(\tilde{P}^n(v_j^n)) \geq (1/r_{2k})\rho(P^n(v_j^n)) = 4^{-(2k-1)}(1/r_1)\rho(P^n(v_j^n)),$$

其中 $j = 0, 1$ (注意 $r_{2k} = 4^{2k-1}r_1$). 通过简单的计算, 我们有

$$\frac{\rho(\tilde{P}^n(v_1^n))}{\rho(P^n(v_1^n))} \leq ((C_0)^2 4^{2k-1}) \frac{\rho(\tilde{P}^n(v_0^n))}{\rho(P^n(v_0^n))} = C \frac{\rho(\tilde{P}^n(v_0^n))}{\rho(P^n(v_0^n))},$$

以及

$$\frac{\rho(\tilde{P}^n(v_1^n))}{\rho(P^n(v_1^n))} \geq \frac{1}{(C_0)^2 4^{2k-1}} \frac{\rho(\tilde{P}^n(v_0^n))}{\rho(P^n(v_0^n))} = \frac{1}{C} \frac{\rho(\tilde{P}^n(v_0^n))}{\rho(P^n(v_0^n))}.$$

由此, 定理 1.2 得证.

致谢 作者衷心感谢贺正需教授的指导和帮助.

参考文献

- 1 Koebe P. Kontaktktprobleme der konformen Abbildung. *Ber Sächs Akad Wiss Leizig Math Phys Kl*, **88**: 141–164 (1936)
- 2 Colin De Verdière Y. Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Invent Math*, **104**: 655–669 (1991)
- 3 Marden A, Rodin B. On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem. *Lecture Notes in Mathematics*, **1435**. Berlin: Springer, 1989, 103–164
- 4 Brightwell G R, Scheinerman E R. Representations of planar graphs. *SIAM J Discrete Math*, **6**: 214–229 (1993)
- 5 Schramm O. Conformal uniformization and packings. *Israel J Math*, **93**: 399–428 (1996)
- 6 Thurston W. The finite Riemann mapping theorem. Invited talk, An International Symposium at Purdue University on the occasion of the proof of the Bieberbach conjecture, 1985
- 7 Rodin B, Sullivan D. The convergence of circle packing to the Riemann mapping. *J Differential Geom*, **26**: 349–360 (1987)
- 8 Rodin B. Schwarz's lemma for circle packings. *Invent Math*, **89**: 271–289 (1987)
- 9 He Z H, Schramm O. On the convergence of circle packings to the Riemann map. *Invent Math*, **125**: 285–305 (1996)
- 10 He Z H. Rigidity of infinite disk patterns. *Ann Math*, **149**: 1–33 (1999)
- 11 Cannon J. The combinatorial Riemann mapping theorem. *Acta Math*, **173**: 155–234 (1994)
- 12 Schramm O. Square tilings with prescribed combinatorics. *Israel J Math*, **84**: 97–118 (1993)
- 13 He Z H, Schramm O. Hyperbolic and parabolic packings. *Discrete Comput Geom*, **14**: 123–149 (1995)
- 14 Schramm O. Transboundary extremal length. *J D'Analyse Math*, **66**: 307–329 (1995)
- 15 Newman M H A. Elements of the Topology of Plane Sets of Points. Cambridge: Cambridge University Press, 1954