2004,**24A**(6):714－716

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

在 $\Delta\leqslant 3$ 的图中上独立数和上无赘数的关系*

[1,2]王春香 [1]毛经中

([1]华中师范大学数学与统计学学院 武汉 430079; [2]武汉大学数学与统计学院 武汉 430074)

摘要: $G(V,E)$是一个图. β, IR 分别是图 G 的独立数,上无赘数. 这篇文章证明文章[6]中提出的一个猜想.

关键词: 独立数; 上无赘数.

MR(2000)主题分类: 05C **中图分类号:** O157.5 **文献标识码:** A

文章编号: 1003-3998(2004)06-714-03

1 引言

在这篇文章中我们仅考虑无环无重边无方向的有限简单图,在图 $G(V,E)$中,V 表示点集,E 表示边集. $N(v)=\{u\in V: uv\in E\}$表示点 v 的开邻域, $N[v]=N(v)\cup\{v\}$表示点 v 的闭邻域. 如果点集 S 是 V 的子集,则用 $N(S)=\bigcup\limits_{v\in S}N(v)$表示 S 的开邻域,$N[S]=N(S)\cup\{S\}$表示 S 的闭邻域. $d(v)=|N(v)|$,$\Delta(G)$表示图 G 中最大次. $ds(v)=|N(v)\cap S|$. $\langle X\rangle$表示点集 X 的诱导子图,n 表示图的阶,E_n 表示 n 阶空图.

如果点集 I 是 V 的子集且$\langle I\rangle$是空图,则称 I 是独立集. 如果点集 X 是 V 的子集且 $N[X]=V$,则称 X 是控制集. 如果点集 I 是 V 的独立集子集且又是控制子集,则称 I 是独立控制集,即极大独立集. 令 $\beta(G)=\max\{|I|: I$ 是图 G 的极大独立集$\}$,$\beta(G)$表示图 G 的独立数. 对于点 $x\in X$,集合 $PN(x, X)=N[x]-N[X-\{x\}]$称为点 x 的私有邻域. 如果 $PN(x, X)$空集,则称 x 在 X 中是有赘的. 一个不含有赘点的集合 X 称为无赘集.

$$IR(G)=\max\{|I|: I \text{ 是图 } G \text{ 的极大无赘集}\}.$$

IR 称为上无赘数.

图 G 的 k-点着色是指 k 种色 $1,2,\cdots,k$ 给 G 的顶点的一种指定. G 的一个 k-点着色称为是正常的,如果 G 中任二邻点所着的色均不相同. 因而 G 的一个正常 k-点着色是 G 的顶点集 V 的一个划分$(V_1,V_2,\cdots,V_k)$,满足: $V=\bigcup\limits^{1\leqslant j\leqslant k}V_i$,当 $1\leqslant i<j\leqslant k$,$V_i\cap V_j$ 为空集,且子图$\langle V_i\rangle$不含边. 即 Vi 为独立集. 使图 G 为正常 k-点着色的最小整数 k 称为 G 的色数,记为 $\chi(G)$. 如果 $\chi(G)=k$,则称 G 为 k 色的.

我们引用文章[1]中的定义:图 G 中的两个点子集 A,B 如果满足: $A\cap B$ 是空集,且$|A|=|B|$,且一个端点在 A 中另一个端点在 B 中的所有边在诱导子图$\langle A\cup B\rangle$形成完美匹配时

收稿日期:2002-05-06; 修订日期:2003-05-07

E-mail: wcxiang@eyou.com

* 基金项目:国家教育部资助项目(02139)

称点集 A,B 为彼此互相独立的. 阶为 $2k$ 的图 G 如果满足：$V(G)=A\cup B$ 使得 A,B 彼此互相独立的，则称 G 为 W-图. 显然，

$$|A|=|B|=k.$$

集 A,B 称为图 G 的部分. 将 G 记为 $G=G(A,B)$. 下列结论是已知的.

定理 1[3-5] 在任何一个图 G 中的 $\beta(G)\leqslant IR(G)$.

下面的定理 2 是 Brooks 在 1941 年写的，现在收录在文献[7]这本书中.

定理 2[7] 令 G 是连通图，如果 G 既不是完全图又不是奇圈，则

$$\chi(G)\leqslant\Delta(G).$$

在文章[6]中作者提出猜想：如果 G 是一个最大次为 3 的图，则

$$IR(G)-\beta(G)\leqslant[n/6].$$

在这篇文章中我们将证明这个猜想. 在文章第二部分，我们将证明在 n 阶 W-图 G 中当 $\Delta\leqslant 3$ 时有 $\beta\geqslant n/3$ 和 n 阶图 G 中 $\Delta\leqslant 3$ 时有 $IR(G)-\beta(G)\leqslant[n/6]$. 其它有关术语和记号见参考文献[2]. 下面是我们的主要结论

定理 3 对任何 n 阶 W-图 G 当 $\Delta\leqslant 3$ 时有

$$\beta\geqslant n/3.$$

定理 4 对任何 n 阶图 G 当 $\Delta\leqslant 3$ 时有

$$IR(G)-\beta(G)\leqslant[n/6].$$

2 基本结论

定理 3 的证明 我们考虑连通图，否则对每一个连通分支作同样处理. 显然 W-图 $G(A,B)$ 的阶 n 为偶数，从而 G 一定不是奇圈. 如果 $n=2$，则 $G=K_2$ 且 $\beta\geqslant n/3$，结论成立. 如果 $n\geqslant 4$，则 $\Delta\leqslant 3$ 的 W-图 G 一定不是完全图，由定理 2 知，$\chi(G)\leqslant\Delta(G)$. 设 $V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_t$，$(t\leqslant\Delta(G))$ 为点集 V 的划分，每一个 V_i 为独立集. 从而

$$n=|V|=|V_1|+|V_2|+\cdots+|V_t|,\quad(t\leqslant\Delta(G)).$$

不妨设，$|V_1|\geqslant|V_2|\geqslant\cdots\geqslant|V_t|$，则 $n\leqslant t$，又因 $t\leqslant\Delta$，而 $\Delta(G)\leqslant 3$，从而 $n\leqslant 3$，故 $|V_1|\geqslant n/3$. $\beta\geqslant|V_1|$，从而 $\beta\geqslant n/3$. ▌

定理 4 的证明 令 I 是 $\Delta\leqslant 3$ 的图 G 的极大无赘集且 $|I|=IR$，n 是图 G 的阶. T 是诱导子图 $\langle I\rangle$ 孤立点集，$S=I-T$，设 $S=\{x_1,x_2,\cdots x_m\}$，既然 I 是图 G 的极大无赘集，则 S 中每个点 x_i 至少有一个私有邻点 $y_i(1\leqslant i\leqslant m)$，令

$$S'=\{y_1,y_2,\cdots y_m\}$$

和

$$U=V(G)-T\cup S\cup S',\ |T|=t,\ |U|=u,IR=t+m,n=t+2m+u.$$

令 $G'=\langle S\cup S'\rangle$ 由私有邻域定义知：$N(y_i)\cap I=\{x_i\}$，$(1\leqslant i\leqslant m)$，又因 $N(x_i)\cap S'=\{y_i\}$，$(1\leqslant i\leqslant m)$，即 $S'\cap S=\varphi$，$S\cap T=\varphi$ 故 G' 是一个阶为 $2m$ 的最大次小等或等于 3 的 W-图. 由定理 2，$\beta(G')\geqslant 2m/3$，因此 $\beta(G)\geqslant t+2m/3$. 故

$$IR(G)-\beta(G)\leqslant t+m-(t+2m/3)\leqslant m/3.$$

既然 $n=t+2m+u$，即

$$m=[n-(t+u)]/2\leqslant n/2,$$

从而

$$IR(G)-\beta(G)\leqslant[n/6].$$

故定理 4 正确的. ∎

参 考 文 献

[1] Igor E Zverovich, Vadim E Zverovich. A semi-induced subgraph characterization of upper domination perfect graphs. J Graph Theory, 1999, **31**: 29—49

[2] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. Amsterdam: North-Holland, 1976, 14

[3] Cockayne E J, Favaron O, Payan C, Thomason A G. Contributions to theory of domination, independence and irredundance in graphs. Discrete Match, 1981, **33**: 249—258

[4] Cockayne E J, Hedetniemi S T, Miller D J. Properties of hereditary hypergraph and middle graphs. Canad Math Bull, 1978, **21**: 461—468

[5] Cockayne E J, Mynhardt C M. The sequence of upper and lower domination, independence and irredundance number of a graph. Discrete Math, 1993, **122**: 89—102

[6] Dieter Rautenbach. On the difference between the upper irredundance, upper domination and independence number of a graph. Discrete Math, 1999, **203**: 239—252

[7] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: The Macmillan Press LTD, 1976

The Difference Between *IR* and β for the Graphs with $\Delta \leqslant 3$

[1,2] Wang Chunxiang [1] Mao Jingzhong

([1] *Department of Mathematics, Central China Normal University, Wuhan, Wuhan* 430079)

([2] *The College of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan* 430072)

Abstract: Let $G(V, E)$ be a graph, β and IR its independence number and upper irredundance number respectively. In this paper, the authors prove the conjecture in [6].

Key words: Independence number; Upper irredundance number.

MR(2000) Subject Classification: 05C