2004,**24A**(5):551－558

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

一般 *Ba* 空间的内插定理*

[1,2]刘官厅 [1]孟伯秦

([1]内蒙古师范大学数学系 呼和浩特 010022; [2]北京理工大学理学院 北京 100081)

摘要:研究了由具有内插性质的一般 Banach 空间列构成的 Ba 空间的内插性质,引入了一致嵌入的概念,给出了一类由一般 Banach 空间列构成的 Ba 空间的三个内插定理,推广了一些由具体空间构成的 Ba 空间的内插性质.

关键词:Ba 空间;嵌入;一致嵌入;内插空间.

MR(2000)主题分类:46E15; 46M35 **中图分类号**:O177.46 **文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)05-551-08

1 引言

Ba 空间[1]的一般形式是由丁夏畦和罗佩珠在研究线性方程的先验估计(如算子在某些典型区域上的先验估计)时首先给出的,它是一类非常重要的函数空间,在偏微分方程和调和分析等方面有着广泛的应用. 1986 年,陈广荣与孟伯秦曾研究了一类由 L^p 空间构成的 Ba 空间的内插定理[2],并在逼近论等领域中得到了较好的应用[3][4][5]. 作者曾研究过由 Hardy 空间和 Bergman 空间构成的 Ba 空间的内插定理,获得了同[2]完全一致的结果[6][7]. 但所有这些结果都是关于由具体的 Banach 空间构成的 Ba 空间的内插性质.本文讨论了由具有内插性质的一般 Banach 空间构成的空间的 Ba 内插性质,引入了一致嵌入的概念,给出了一类由一般 Banach 空间列构成的 Ba 空间的三个内插定理.较文献[2]、[6]和[7]相比,本文采用了不同证明的方法,在去掉$\{a_m^{1/m}\}$,$\{a_m^{-1/m}\}\in l^\infty$ 的条件下,仍获得了同已有具体空间的结果完全一致的内插性质,从而实质地推广了已有的结果, 扩展了内插性质的应用范围.

定义 1 设$\{B_m\}_{m=1}^\infty$是一列 Banach 空间,X 为一个 Banach 空间,$\{B_m\}_{m=1}^\infty$属于 Banach 空间 X. 又设 $f(z)=\sum\limits_{m=1}^\infty a_m z^m$ 是一非常数的整函数,$a_m\geqslant 0$. 对 $u\in\bigcap\limits_{m=1}^\infty B_m$,令

$$I(u,z)\equiv\sum_{m=1}^\infty a_m(\|u\|_{B_m})^m z^m, \tag{1}$$

用 R_u 表示(1)式的收敛半径. 如果(1)式有非零的收敛半径,我们称 $u\in Ba$. 即

$$Ba=\{u:u\in\bigcap_{m=1}^\infty B_m,\ R_u>0\}.$$

收稿日期:2001-12-18; 修订日期:2003-07-18

E-mail:guantingliu@163.com

* 基金项目:国家自然科学基金(10171058)、内蒙古自然科学基金(200308020101)和内蒙古师范大学青年科研基金重点项目(QNZ00111)资助

对 Ba 中的元 u 赋于范数 $\|u\|_{Ba}=\inf\{1/|\alpha|:I(u,|\alpha|)\leqslant 1\}$，则 Ba 空间是一个 Banach 空间.

当定义 1 中的 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一列单位圆盘 D 上的 Hardy 空间 H^p 时，相应的 Ba 空间就是 $H^{Ba}(D)$ 空间[8]，其内插定理见[6]；当 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一列单位圆盘上 D 的 Bergman 空间 L_a^p 时，相应的 Ba 空间就是 $L_a^{Ba}(D)$ 空间[8]，其内插定理见[7].

定义 2 设 A,B 是两个 Banach 空间，若

1° 由 $x\in B$ 推得出 $x\in A$，即 $B\subset A$；

2° 存在常数 C，使对一切 $x\in B$，都有 $\|x\|_A\leqslant C\|x\|_B$，

则称空间 B 嵌入空间 A 内，记作 $B\to A$.

定义 3 设 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一列 Banach 空间，B_0,B 为两个 Banach 空间，若对任意的自然数 m，都有 $B_m\to B_0$（或 $B\to B_m$），且嵌入常数 C 与 m 无关，则称 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 一致嵌入 B_0（或 B 一致嵌入 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$）.

在本文的证明中 C 表示常数，在不同的地方可取不同的值，$T\in\{B_0\to B_0;c\}$ 表示 T 为 $B_0\to B_0$ 的连续算子. 有关中间空间和内插空间的概念参见[9].

2 主要结果及证明

定理 1 设 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一列 Banach 空间，B_0,B 为两个 Banach 空间，B_0,B 及 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 属于 Banach 空间 X，且 B 一致嵌入 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$，$\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 一致嵌入 B_0. 又设 $f(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_mz^m$ 是一非常数的整函数，$a_m\geqslant 0$，相对应的 Ba 空间记为 $Ba(f)$. 如果 B_m 是关于 B_0 与 B 的 θ 型内插空间，则 $Ba(f)$ 是关于 B_0 与 B 的 θ 型内插空间.

定理 2 设 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一列 Banach 空间，B_0,B 为两个 Banach 空间，B_0,B 及 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 属于 Banach 空间 X，且 B 一致嵌入 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$，$\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 一致嵌入 B_0，$f(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_mz^m$，$g(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_mz^m$ 和 $h(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}c_mz^m$ 是三个非常数的整函数，$a_m\geqslant b_m\geqslant c_m\geqslant 0$，$m=1,2,3,\cdots$，相对应的 Ba 空间分别记为 $Ba(f)$，$Ba(g)$ 和 $Ba(g)$，则 $Ba(g)$ 是关于 $Ba(f)$ 与 $Ba(h)$ 的内插空间.

定理 3 设 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一列 Banach 空间，B_0,B 为两个 Banach 空间，B_0,B 及 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 属于 Banach 空间 X，且 B 一致嵌入 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$，$\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 一致嵌入 B_0. 又设 $f(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_mz^m$，$g(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_mz^m$ 是两个非常数的整函数，相对应的 Ba 空间分别记为 $Ba(f)$，$Ba(g)$. 如果 B_m 是关于 B_0 与 B 的 θ 型内插空间，则 $(B_0,B,Ba(f))$ 是关于 $(B_0,B,Ba(g))$ 的 θ 型内插拼三组.

首先给出一个引理

引理 设 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一列 Banach 空间，B_0,B 为二个 Banach 空间，B_0,B 及 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 属于 Banach 空间 X，且 B 一致嵌入 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$，$\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ 一致嵌入 B_0. 又设 $f(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_mz^m$，是一非常数的整函数，$a_m\geqslant 0$，相对应的 Ba 空间记为 $Ba(f)$，则 $B\to Ba(f)\to B_0$.

证 先证 $B\to Ba(f)$，即 $B\subset Ba(f)$，且对 $u\in B$，有 $\|u\|_{Ba(f)}\leqslant C\|u\|_B$，其中 C 为常数. 设 $u\in B$，由 B 一致嵌入 $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$，得 $B\subset B_m$，且存在与 m 无关的常数 $C>0$，使

$$\| u \|_{Bm} \leqslant C \| u \|_{B}, \quad m = 1,2,3,\cdots. \tag{2}$$

从而 $B \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$. 由于 $f(z)$是整函数，所以$\{a_m^{1/m}\}$有界，即存在正常数 r，使得

$$a_m^{1/m} \leqslant r, \quad m = 1,2,3,\cdots, \tag{3}$$

取 $\alpha_0 = (2rC \| u \|_B)^{-1} > 0$，则

$$I(u,\alpha_0) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} a_m (\| u \|_{Bm})^m \alpha_0^m \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} r^m C^m (\| u \|_B)^m (2rC \| u \|_B)^{-m} = 1,$$

所以 $\| u \|_{Ba(f)} = \inf\{1/|\alpha| : I(u,|\alpha|) \leqslant 1\} \leqslant 1/|\alpha_0| = 2rC \| u \|_B$，且有 $u \in Ba(f)$，从而 $B \subset Ba(f)$.

再证 $Ba(f) \to B_0$. 对 $u \in Ba(f)$，由 $Ba(f)$的定义，得 $u \in B_m$，由条件$\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$一致嵌入 B_0，得

$$\| u \|_{B_0} \leqslant C \| u \|_{B_m}, \quad m = 1,2,3,\cdots, \tag{4}$$

其中 C 为常数，且有 $B_m \subset B_0$. 从而 $Ba(f) \subset B_0$.

又由 $Ba(f)$范数的定义 $\| u \|_{Ba(f)} = \inf\{1/|\alpha| : I(u,|\alpha|) \leqslant 1\}$知，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在非零常数 α_1，使得 $I(u,\alpha_1) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} a_m (\| u \|_{Bm})^m \alpha_1^m \leqslant 1$，且有

$$\| u \|_{Ba(f)} = \inf\{1/|\alpha| : I(u,|\alpha|) \leqslant 1\} > (1/|\alpha_1|) - \varepsilon.$$

由(4)式，得

$$1 \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} a_m (\| u \|_{Bm})^m \alpha_1^m \geqslant a_k (\| u \|_{B_k})^k |\alpha_1|^k \geqslant a_k C^{-k} (\| u \|_{B_0})^k |\alpha_1|^k,$$

其中 k 为一个使得 a_k 不为零的确定的自然数. 所以

$$a_k^{1/k} C^{-1} \| u \|_{B_0} |\alpha_1| \leqslant 1,$$

从而

$$\| u \|_{B_0} \leqslant C a_k^{-1/k} |\alpha_1|^{-1} \leqslant C a_k^{-1/k} (\| u \|_{Ba(f)} + \varepsilon).$$

由 ε 的任意性，可得 $\| u \|_{B_0} \leqslant C a_k^{-1/k} \| u \|_{Ba(f)}$ 成立. 引理证毕. ▌

定理 1 的证明 先证 $Ba(f)$是 B 与 B_0 的中间空间，即 $B \cap B_0 \to Ba(f) \to B + B_0$.

事实上，由 B 一致嵌入$\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$，$\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$一致嵌入 B_0，得 $B \to B_0$，即 $B \subset B_0$，且对 $u \in B$，有 $\| u \|_{B_0} \leqslant C \| u \|_B$，其中 C 为常数.

由线性空间的性质，得 $B \cap B_0 = B, B + B_0 = B_0$，且对 $u \in B \cap B_0$，有

$$\| u \|_B \leqslant \max\{\| u \|_{B_0}, \| u \|_B\} = \| u \|_{B \cap B_0} \leqslant (1 + C) \| u \|_B;$$

对 $u \in B + B_0$，存在 $s \in B$ 及 $t \in B_0$ 使得 $u = s + t$. 一方面

$$\begin{aligned} \| u \|_{B+B_0} &= \inf\{\| s \|_B + \| t \|_{B_0} : u = s + t\} \geqslant \inf\{C^{-1} \| s \|_{B_0} + \| t \|_{B_0} : u = s + t\} \\ &\geqslant (1 + C)^{-1} \inf\{\| s \|_{B_0} + \| t \|_{B_0} : u = s + t\} \\ &\geqslant (1 + C)^{-1} \inf\{\| s + t \|_{B_0} : u = s + t\} \geqslant (1 + C)^{-1} \| u \|_{B_0}. \end{aligned}$$

另一方面，取 $u = \theta + u$，$\theta \in B$，$u \in B_0$，则

$$\| u \|_{B+B_0} \leqslant \| \theta \|_B + \| u \|_{B_0} = \| u \|_{B_0}.$$

其中 θ 为零向量. 由引理，得 $B \cap B_0 \to Ba(f) \to B + B_0$.

下面证明 $Ba(f)$是关于 B 与 B_0 的内插空间.

设 $T \in \{B_0 \to B_0; c\}$且 $T \in \{B \to B; c\}$. 由条件 B_m 是关于 B_0 与 B 的 θ 型内插空间，可得 $T \in \{B_m \to B_m; c\}$，且

$$\| T \|_{Bm \to Bm} \leqslant (\| T \|_{B_0 \to B_0})^{1-\theta_m} (\| T \|_{B \to B})^{\theta_m},$$

其中 $0<\theta_m<1$，$m=1,2,3,\cdots$.

因为函数 $g(\theta_m)=(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta_m}(\|T\|_{B\to B})^{\theta_m}$ 是严格单调的，因此在下列两种情况下

当 $\|T\|_{B_0\to B_0}\leqslant\|T\|_{B\to B}$ 时，取 $\theta=\sup\{\theta_m: m\geqslant 1\}$，

当 $\|T\|_{B_0\to B_0}\geqslant\|T\|_{B\to B}$ 时，取 $\theta=\inf\{\theta_m: m\geqslant 1\}$，

则对一切 $m=1,2,3,\cdots$，均有

$$\|T\|_{Bm\to Bm}\leqslant(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}. \tag{5}$$

对 $u\in Ba(f)$，取 $\alpha=[2rC(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}\|u\|_B]^{-1}$，由(2)式，(3)和(5)式，得

$$\begin{aligned}I(Tu,\alpha)&=\sum_{m=1}^{\infty}a_m(\|Tu\|_{Bm})^m\alpha^m\\&\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}r^m[(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}\|u\|_{Bm}]^m\alpha^m\\&\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}r^m[(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}C\|u\|_{B}]^m\alpha^m\\&=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}=1,\end{aligned}$$

所以 $Tu\in Ba(f)$，从而 $Ba(f)$ 是关于 B 与 B_0 的内插空间.

最后证明 $Ba(f)$ 是关于 B 与 B_0 的 θ 型内插空间.

对 $u\in Ba(f)$，由(2)式知 $\sup\{\|u\|_{Bm}: m=1,2,3,\cdots.\}$ 存在，记为 r_1，则对任意 $\delta>0$，存在 $k\geqslant 1$，使得 $\|u\|_{B_k}>r_1-\delta$. 而由 $\|u\|_{Ba(f)}=\inf\{1/|\alpha|: I(u,|\alpha|)\leqslant 1\}$ 知，对任给的 $\varepsilon>0$，存在非零常数 α_1，使得

$$I(u,\alpha_1)\equiv\sum_{m=1}^{\infty}a_m(\|u\|_{Bm})^m\alpha_1^m\leqslant 1,\text{且}$$
$$\|u\|_{Ba(f)}=\inf\{1/|\alpha|: I(u,|\alpha|)\leqslant 1\}>(1/|\alpha_1|)-\varepsilon.$$

这样

$$1\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}a_m(\|u\|_{Bm})^m\alpha_1^m\geqslant a_k(\|u\|_{B_k})^k|\alpha_1|^k\geqslant a_k(r_1-\delta)^k|\alpha_1|^k,$$

其中 k 为一个使得 α_k 不为零的确定的自然数.

由 δ 的任意性，得 $a_k^{1/k}r_1|\alpha_1|\leqslant 1$，从而 $r_1a_k^{1/k}\leqslant 1/|\alpha_1|\leqslant(\|u\|_{Ba(f)}+\varepsilon)$. 再由 ε 的任意性，可得 $r_1a_k^{1/k}\leqslant\|u\|_{Ba(f)}$ 成立. 而 $r_1=\sup\{\|u\|_{Bm}: m=1,2,3,\cdots.\}$，因此

$$\|u\|_{Bm}\leqslant a_k^{-1/k}\|u\|_{Ba(f)},\quad m=1,2,3,\cdots. \tag{6}$$

取 $\alpha=[2ra_k^{-1/k}(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}\|u\|_{Ba(f)}]^{-1}$，由(3)式，(5)和(6)式，得

$$\begin{aligned}I(Tu,\alpha)&=\sum_{m=1}^{\infty}a_m(\|Tu\|_{Bm})^m\alpha^m\\&\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}r^m[(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}\|u\|_{Bm}]^m\alpha^m\\&\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}r^m[(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}a_k^{-1/k}\|u\|_{Ba(f)}]^m\alpha^m\\&=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}=1,\end{aligned}$$

所以

$$\| Tu \|_{Ba(f)} = \inf\{1/|\alpha| : I(u, |\alpha|) \leqslant 1\} \leqslant 2ra_k^{-1/k}(\| T \|_{B_0 \to B_0})^{1-\theta}(\| T \|_{B \to B})^{\theta} \| u \|_{Ba(f)}.$$

即 $Ba(f)$是关于 B 与 B_0 的 θ 型内插空间. 定理 1 证毕. ▌

定理 2 的证明　先证 $Ba(g)$是关于 $Ba(f)$与 $Ba(h)$的中间空间.

设 $u \in Ba(f)$,由定义知,存在 $z \neq 0$,使得

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m (\| u \|_{Bm})^m |z|^m < \infty.$$

由 $a_m \geqslant b_m \geqslant c_m \geqslant 0$，得

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m (\| u \|_{Bm})^m |z|^m \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} b_m (\| u \|_{Bm})^m |z|^m \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} a_m (\| u \|_{Bm})^m |z|^m < \infty.$$

因此 $Ba(f) \subset Ba(g) \subset Ba(h)$,且

$$\begin{aligned} &\{1/|\alpha| : \sum_{m=1}^{\infty} a_m (\| u \|_{Bm})^m |\alpha|^m \leqslant 1\} \\ \subset &\{1/|\alpha| : \sum_{m=1}^{\infty} b_m (\| u \|_{Bm})^m |\alpha|^m \leqslant 1\} \\ \subset &\{1/|\alpha| : \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\| u \|_{Bm})^m |\alpha|^m \leqslant 1\}, \end{aligned}$$

所以 $Ba(f) \cap Ba(g) = Ba(f) \subset Ba(g) \subset Ba(h) = Ba(f) + Ba(h)$，且

$$\| u \|_{Ba(h)} \leqslant \| u \|_{Ba(g)} \leqslant \| u \|_{Ba(f)}.$$

根据交空间与和空间范数的定义,对 $u \in Ba(f) \cap Ba(h)$，有

$$\| u \|_{Ba(h) \cap Ba(f)} = \max\{\| u \|_{Ba(h)}, \| u \|_{Ba(f)}\} = \| u \|_{Ba(f)} \geqslant \| u \|_{Ba(g)}.$$

对 $u \in Ba(f) + Ba(h)$,存在 $s \in Ba(f)$,$t \in Ba(h)$使 $u = s + t$,且

$$\begin{aligned} \| u \|_{Ba(h)+Ba(f)} &= \inf\{\| t \|_{Ba(h)} + \| S \|_{Ba(f)} : u = s + t\} \\ &\leqslant \inf\{\| u \|_{Ba(h)} + \| \theta \|_{Ba(f)} : u = u + \theta\} \\ &\leqslant \| u \|_{Ba(h)} \leqslant \| u \|_{Ba(g)}, \end{aligned}$$

其中 θ 为零向量,所以 $Ba(f) \cap Ba(h) \to Ba(g) \to Ba(f) + Ba(h)$.

下面证明 $Ba(g)$是关于 $Ba(f)$与 $Ba(h)$的内插空间.

设 $T \in \{Ba(f) \to Ba(f); c\}$且 $T \in \{Ba(h) \to Ba(h); c\}$,则

$$\begin{aligned} &\| Tu \|_{Ba(f)} \leqslant \| T \|_{Ba(f) \to Ba(f)} \| u \|_{Ba(f)}, \ u \in Ba(f); \\ &\| Tu \|_{Ba(h)} \leqslant \| T \|_{Ba(h) \to Ba(h)} \| u \|_{Ba(h)}, \ u \in Ba(h). \end{aligned} \tag{7}$$

由于 $g(z)$是整函数,所以$\{b_m^{1/m}\}$有界,即存在正常数 r_2,使得 $b_m^{1/m} \leqslant r_2$,$m = 1, 2, 3, \cdots$. 对 $u \in Ba(g)$,有 $u \in Ba(h)$,由(6)式得 $\| Tu \|_{Bm} \leqslant c_k^{-1/k} \| Tu \|_{Ba(h)}$，$k$ 为一个确定的自然数. 取 $\alpha = (2r_2 c_k^{-1/k} \| T \|_{Ba(h) \to Ba(h)} \| u \|_{Ba(h)})^{-1} > 0$，由(7)式得

$$\begin{aligned} I(Tu, \alpha) &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m (\| Tu \|_{Bm})^m \alpha^m \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} r_2^m (c_k^{-1/k} \| Tu \|_{Ba(h)})^m \alpha^m \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} r_2^m (c_k^{-1/k} \| T \|_{Ba(h) \to Ba(h)} \| u \|_{Ba(h)})^m \alpha^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1, \end{aligned}$$

即 $Tu\in Ba(g)$. 定理 2 证毕. ▍

定理 3 的证明 设 $T\in\{B_0\to B_0;c\}$ 且 $T\in\{B\to B;c\}$. 由条件 B_m 是关于 B_0 与 B 的 θ 型内插空间,可得 $T\in\{B_m\to B_m;c\}$,且由(5)式知,对 $u\in Ba(f)$,有

$$\|Tu\|_{Bm}\leqslant(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}\|u\|_{Bm}.$$

取 $\alpha=[2ra_k^{-1/k}(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}\|u\|_{Ba(f)}]^{-1}>0$,由(3)式,(6)式得

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}b_m(\|Tu\|_{Bm})^m\alpha^m&\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}r^m[(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}\|u\|_{Bm}]^m\alpha^m\\&\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}r^m[(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}a_k^{-1/k}\|u\|_{Ba(f)}]^m\alpha^m\\&=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}=1<\infty,\end{aligned}$$

所以 $Tu\in Ba(g)$, 且 $\|Tu\|_{Ba(g)}\leqslant 2ra_k^{-1/k}(\|T\|_{B_0\to B_0})^{1-\theta}(\|T\|_{B\to B})^{\theta}\|u\|_{Ba(f)}$. 即$(B_0,B,Ba(f))$是关于$(B_0,B,Ba(g))$的 θ 型内插拼三组. 定理 3 证毕. ▍

注 若将定理 1 和定理 3 条件和结论中的 θ 型都去掉,定理仍成立.

3 应用

作为上述定理的应用,本节给出一些由具体空间构成的 Ba 空间的内插性质.

例 1 由 L^p 空间构成的 Ba 空间(L^{Ba})的内插定理.

设$\{L^{p_m}(\Omega),m=1,2,3,\cdots\}$是一列 Lebesgue 空间,$p_m>1$,$\Omega$ 是 R^n 内的有界闭集, $f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m z^m$ 是一非常数的整函数,$a_m\geqslant 0$,相对应的 Ba 空间为 L^{Ba},则 L^{Ba} 是关于 L^{p_0} 与 L^{p^*} 的 θ 型内插空间. 其中 $p_0=\inf\{p_m,m=1,2,3,\cdots\}$, $p^*=\sup\{p_m,m=1,2,3,\cdots\}$.

证 注意到 $p_0\leqslant p_m\leqslant p^*$,由 Lebesgue 空间的嵌入性质知

$$L^{p^*}\to L^{p_m}\to L^{p_0},\quad m=1,2,3,\cdots.$$

下面证明上述嵌入为一致嵌入. 设 $x(t)\in L_{p^*}$,当 $1<p^*<\infty$时,由 L^p 空间范数的定义及 Hölder 不等式,得

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_{p_m}&=\left[\int_\Omega|x(t)|^{p_m}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p_m}}\leqslant\left(\int_\Omega\mathrm{d}t\right)^{\frac{p^*-p_m}{p^*}\frac{1}{p_m}}\left[\int_\Omega|x(t)|^{p_m\frac{p^*}{p_m}}\mathrm{d}t\right]^{\frac{p^*}{p^*}\frac{1}{p_m}}\\&=(\mathrm{mes}\Omega)^{\frac{p^*-p_m}{p^*p_m}}\|x(t)\|_{p^*}\leqslant(1+\mathrm{mes}\Omega)\|x(t)\|_{p^*},\end{aligned}$$

当 $p^*=\infty$时,由 L^∞范数的定义,得

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_{p_m}&=\left[\int_\Omega|x(t)|^{p_m}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p_m}}\leqslant\left[\int_\Omega\mathrm{Vari}\sup_{t\in\Omega}|x(t)|)^{p_m}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p_m}}\\&=(\mathrm{mes}\Omega)^{\frac{1}{p_m}}\|x(t)\|_\infty\leqslant(1+\mathrm{mes}\Omega)\|x(t)\|_\infty.\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{mes}\Omega$ 表示 Ω 的 Lebesgue 测度,$\mathrm{Vari}\sup_{t\in\Omega}|x(t)|$表示本性有界函数的上确界.

由于 $1+\mathrm{mes}\Omega$ 是与 m 无关的常数,所以 L^{p^*} 一致嵌入 L^{p_m}. 同理可证 L^{p_m} 一致嵌入 L^{p_0}. 又根据 Riesz-Thorin M 内插定理[9]知,L^{p_m} 是关于 L^{p_0} 与 L^{p^*} 的 θ 型内插空间,由本文的定理 1 知,L^{Ba} 是关于 L^{p_0} 与 L^{p^*} 的 θ 型内插空间. 例 1 得证. ▍

本例较文献[2]中的定理 1 减少了条件$\{a_m^{1/m}\}$,$\{a_m^{1/m}\}\in l^\infty$,但获得了同样的结果. 因此,

实质地推广了文献[2]的结论.

例 2 设$\{L_{M_n}, n=1,2,3,\cdots\}$是一列 Orlicz 空间[8]，$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m z^m$，$g(z)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m z^m$ 和 $h(z)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m z^m$ 是三个非常数的整函数，$a_m\geqslant b_m\geqslant c_m\geqslant 0$，$m=1,2,3,\cdots$，相对应的 Ba 空间为 $L_M^{Ba}(f)$，$L_M^{Ba}(g)$ 和 $L_M^{Ba}(h)$. 若 $L_{M_n}(n=1,2,3,\cdots)$的生成元 $M_n(u)$是定义在测度有限集 Ω 上的满足 M_Δ 条件的 N 函数，且极限

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\ln M_n(u)}{\ln u}=p_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

是等度的，则当 $1\leqslant p_0<\inf\{p_n, n=1,2,3,\cdots\}$，$\sup\{p_n, n=1,2,3,\cdots\}<p^*<\infty$时，$L_M^{Ba}(g)$ 是关于 $L_M^{Ba}(f)$与 $L_M^{Ba}(h)$的内插空间.

证 由 $1\leqslant p_0<\inf\{p_n, n=1,2,3,\cdots\}$，$\sup\{p_n, n=1,2,3,\cdots\}<p^*<\infty$知，可选足够小的 ε，使 $1\leqslant p_0<p_n-\varepsilon<p_n+\varepsilon<p^*<\infty$，由极限的等度性，对此 $\varepsilon>0$，存在不依赖于 n 的正数 u_0，不失一般性，可取 $u_0>1$，当 $u\geqslant u_0>1$ 时，有

$$p_0<p_n-\varepsilon<\frac{\ln M_n(u)}{\ln u}<p_n+\varepsilon<p^*.$$

又因 $M_n(u)$是满足 M_Δ 条件的 N 函数，因此，$u^{p_0}<M_n(u)<u^{p^*}$.

故 $L^{p^*}\to L_{M_n}(n=1,2,3,\cdots)\to L^{p_0}$，其中 L^{p_0} 和 L^{p^*} 是 Lebesgue 空间.

下面证明上述嵌入为一致嵌入. 设 $u(x)\in L_{p^*}\subset L_{M_n}$，记 $k=1+u_0^{p^*}\operatorname{mes}\Omega>1$，$\Omega_0=\{x: \frac{u(x)}{\|u\|_{p^*}}\geqslant u_0>1,\ x\in\Omega\}$，则

$$\begin{aligned}\int_\Omega M_n\Big(\frac{u(x)}{k\|u\|_{p^*}}\Big)\mathrm{d}x&\leqslant\frac{1}{k}\Big[\int_{\Omega_0}M_n\Big(\frac{u(x)}{\|u\|_{p^*}}\Big)\mathrm{d}x+\int_{\Omega\backslash\Omega_0}M_n\Big(\frac{u(x)}{\|u\|_{p^*}}\Big)\mathrm{d}x\Big]\\&\leqslant\frac{1}{k}\Big[\int_{\Omega_0}\Big(\frac{u(x)}{\|u\|_{p^*}}\Big)^{p^*}\mathrm{d}x+\int_{\Omega\backslash\Omega_0}M_n(u_0)\mathrm{d}x\Big]\\&\leqslant\frac{1}{k}[1+M_n(u_0)\operatorname{mes}\Omega]\leqslant\frac{1}{k}(1+u_0^{p^*}\operatorname{mes}\Omega)=1,\end{aligned}$$

根据 Orlicz 空间的 Luxemburg 范数的定义，得

$$\|u\|_{(M_n)}=\inf\{\beta: \int_\Omega M_n\Big(\frac{u(x)}{\beta}\Big)\mathrm{d}x\leqslant 1,\beta>0\}\leqslant k\|u\|_{p^*},$$

由于 k 是与 n 无关的常数，故 L^{p^*} 一致嵌入 $L_{M_n}(n=1,2,3,\cdots)$.

另一方面，设 $u(x)\in L_{M_n}\subset L_{p_0}$，记 $\Omega_n=\{x: \frac{u(x)}{\|u\|_{(M_n)}}\geqslant u_0>1, x\in\Omega\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\begin{aligned}\int_\Omega\Big(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M_n)}}\Big)^{p_0}\mathrm{d}x&=\int_{\Omega_n}\Big(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M_n)}}\Big)^{p_0}\mathrm{d}x+\int_{\Omega\backslash\Omega_0}\Big(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M_n)}}\Big)^{p_0}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\Omega_n}M_n\Big(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M_n)}}\Big)\mathrm{d}x+\int_{\Omega\backslash\Omega_0}(u_0)^{p_0}\mathrm{d}x\leqslant 1+u_0^{p_0}\operatorname{mex}\Omega,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|u\|_{p_0}&=\Big(\int_\Omega|u(x)|^{p_0}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p_0}}\leqslant(1+u_0^{p_0}\operatorname{mes}\Omega)^{\frac{1}{p_0}}\|u\|_{(M_n)}\\&\leqslant(1+u_0^{p_0}\operatorname{mes}\Omega)\|u\|_{(M_n)}\leqslant k\|u\|_{(M_n)},\end{aligned}$$

由于 k 是与 n 无关的常数，故 $L_{M_n}(n=1,2,3,\cdots)$一致嵌入 L^{p_0}.

由本文的定理 2,例 2 得证. ▌

例 3 设$\{H^{p_m}(D), m=1,2,3,\cdots\}$是定义在复平面上的单位圆 D 内的一列 Hardy 空间,$f(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m z^m$,$g(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_m z^m$ 是两个非常数的整函数,$p_m>1$,a_m,$b_m\geqslant 0$,相对应的 Ba 空间记为 $H^{Ba}(f)$和 $H^{Ba}(g)$,则$(H^1, H^\infty, H^{Ba}(f))$是关于$(H^1, H^\infty, H^{Ba}(g))$的 θ 型内插拼三组.

证 由 Hardy 空间的性质,易证

$$\|x\|_{H^1}\leqslant\|x\|_{H^{p_m}},\quad \|x\|_{H^{p_m}}\leqslant\|x\|_{H^\infty},$$

由于嵌入常数 1 与 m 无关,所以 H^{p_m}一致嵌入 H^1,H^∞一致嵌入 H^{p_m}.

根据文献[10]知,H^{p_m} 是关于 H^∞ 与 H^1 的 θ 型内插空间,由本文的定理 3 知,$(H^1, H^\infty, H^{Ba}(f))$是关于$(H^1, H^\infty, H^{Ba}(g))$的 θ 型内插拼三组. 例 3 得证. ▌

参 考 文 献

[1] Ding Xiaxi, Luo Peizhu. *Ba* spaces and some estimates of Laplace operator. J Sys Sci, Math Sci, 1981,**1**(1):9-33

[2] Chen Guangrong, Meng Boqin. Interpolation of *Ba* spaces. Acta Math Sci, 1988,**18**(1):65-70

[3] Wu Garidi. The Jackson theorem in *Ba* spaces. Approx theory Appl, 1996,**12**(2):60-69

[4] 盛宝怀. *Ba* 空间中 Kantorovich 算子的饱和性. 数学杂志,1992,**12**(2):146-154

[5] 孟伯秦. 内插空间理论及其应用. 应用泛函分析学报,2000,**2**(2):183-192

[6] Liu Guanting. The Interpolation theorems of $H^{Ba}(D)$ spaces. 应用泛函分析学报,2000,**2**(3):218-223

[7] 刘官厅. $L_a^{Ba}(D)$ 空间的内插性质. 纯粹数学与应用数学,2001,**17**(2):149-153

[8] He Yuzan. *Ba* spaces and Orlicz spaces. Function Spaces and Complex Analysis. In: Aulaskari R, ed. Joensuu, 1999. 37-62

[9] Bergh J, Lofstrom J. Interpolation spaces. New York: Springer-Verlag, 1976. 38-41

[10] Gilles Pisier. Interpolation between H^P spaces and non-commutative generalizations, I. Pacific Journal of Mathematics, 1992,**155**(2): 341-368

Interpolation Theorems of General *Ba* Spaces

[1,2] Liu Guanting [1] Meng Boqin

([1] *Department of Mathematics, Inner Mongolia Normal University, Huhhot* 010022;

[2] *School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081)

Abstract: The interpolation properties of *Ba* spaces which are constructed with Banach spaces with interpolation properties are studied and the concept of uniform embedding is introduced. Three interpolation theorems of general *Ba* space are established, which include the previous results on some special *Ba* spaces.

Key words: *Ba* space; Embedding; Uniform embedding; Interpolation space.

MR(2000) Subject Classification: 46E15