2004,**24A**(5):564－571

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

一般随机 Dirichlet 级数所表示的整函数*

田范基

(湖北大学数学与计算机科学学院　武汉 430062)

任跃峰

(海军工程大学数学教研室　武汉 430033)

摘要:该文研究了一般随机 Dirichlet 级数的所表示整函数增长性和值分布,得出了重要结论:在适当条件下,任何水平带形上或水平线上增长级与全面上相同,对于 ρ 随机 Dirichlet 级数($0<\rho<\infty$)a. s. 在任何宽为$\frac{\pi}{\rho}$的水平带形内,至少有一条 ρ 级没有有穷例外值的 Borel 线.

关键词:随机 Dirichlet 级数;增长级;值分布.

MR(2000)主题分类:30B50　　**中图分类号**:O211.5　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)05-571-08

1　引言

在$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n}<+\infty$;$\rho=-(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n\ln\lambda_n})^{-1}\in(0,+\infty)$条件下,关于随机 Dirichlet 级数 $F_\omega(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nZ_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_ns}$ 表示整函数研究已经取得了较好结果:[1]研究了当$\{Z_n\}$为 Steinhaus 序列或 Rademacher 序列时,a. s. $\omega\in\Omega$,$F_\omega(s)$在任一宽为$\frac{\pi}{\rho}$带形内至少有一条 ρ 级 Borel 线;[2]研究了当$\{Z_n\}$为 N-序列时,a. s. $\omega\in\Omega$,$F_\omega(s)$在任一宽为$\frac{\pi}{\rho}$带形内至少有一条 ρ 级没有例外值的 Borel 线,本文在[1]与[2]工作基础上,研究了一般随机 Dirichlet 级数表示整函数的值分布.

2　主要结果及其证明

考虑随机 Dirichlet 级数

$$f_\omega(s)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_ns},\tag{1}$$

其中 $0\leqslant\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2\cdots<\lambda_n\uparrow\infty$,$\{X_n\}$为某概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上独立复随机变量列,$s=\sigma+\mathrm{i}t$,$\sigma,t\in R$.

引理 1　设$\{X_n\}$是独立随机变量列和存在一个正数 d,使得

* 收稿日期:2002-04-11;修订日期:2002-11-10

$$\forall n \geqslant 0, d^2\sigma_n^2 = d^2 E \mid X_n \mid^2 \leqslant E^2 \mid X_n \mid < +\infty, \tag{2}$$

那么对 a. s. $\omega \in \Omega$，存在自然数 $N(\omega)$，使得当 $N > N(\omega)$ 有

$$\mid X_n(\omega) \mid \leqslant n\sigma_n, \tag{3}$$

若 $\{X_{n_k}\}$ 是 $\{X_n\}$ 任何子序列，那么

$$P(\overline{\lim_{k\to\infty}}(\mid X_{n_k} \mid \geqslant \frac{d}{2}\sigma_{n_k})) = 1, \tag{4}$$

它表明 $\{X_{n_k}(\omega)\}$ 中有无穷多项不小于 $\frac{d}{2}\sigma_{n_k}$.

证 当 $\sigma_n = 0, X_n = 0$, a. s.，$P(|X_n| > \sigma_n) = 0$；当 $\sigma_n > 0, P(|X_n| > n\sigma_n) \leqslant \frac{E|X_n|^2}{n^2\sigma_n^2} = \frac{1}{n^2}$.

因此

$$\forall n \geqslant 1, P(\mid X_n \mid > n\sigma_n) \leqslant \frac{1}{n^2},$$

相应

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\mid X_n \mid > n\sigma_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}}(\mid X_n \mid > n\sigma_n)) = 0,$$

这样我们得到(3)式.

利用[3]中 P8 的不等式(Ⅱ)和(2)式，我们有

当 $\sigma_n > 0$，

$$P(\mid X_n \mid \geqslant \frac{d}{2}\sigma_n) \geqslant P(\mid X_n \mid \geqslant \frac{1}{2}E \mid X_n \mid)$$

$$\geqslant (1 - \frac{1}{2})^2 \frac{E^2 \mid X_n \mid}{E \mid X_n \mid^2} \geqslant \frac{1}{4}d^2 > 0,$$

当 $\sigma_n = 0, P(|X_n| \geqslant \frac{d}{2}\sigma_n) = 1$.

因此 $\sum_{k=1}^{\infty} P(\mid X_{nk} \mid \geqslant \frac{d}{2}\sigma_{nk}) = +\infty$，再利用 Borel-Cantelli 引理

$$P(\overline{\lim_{k\to\infty}}(\mid X_{n_k} \mid \geqslant \frac{d}{2}\sigma_{n_k})) = 1.$$

即 $|X_{n_k}(\omega)| \geqslant \frac{d}{2}\sigma_{n_k}$ a. s. 对无穷多个 n_k 成立. ▌

引理 2 设 $\{X_n\}$ 满足(2)式，则

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|X_n|}{\lambda_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n} + \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n}$ a. s.； (5)

(ii) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|X_n|}{\lambda_n\ln\lambda_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n} + \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n\ln\lambda_n}$ a. s.. (6)

证 由(3)式

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln \mid X_n \mid}{\lambda_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n\sigma_n}{\lambda_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n} + \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln \mid X_n \mid}{\lambda_n\ln\lambda_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n} + \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n\ln\lambda_n},$$

设 $\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\sigma_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n}$，由(4)式 a. s. $\omega \in \Omega$，在 $\{|X_{n_k}(\omega)|\}$ 中，$|X_{n_k}(\omega)| \geqslant \frac{d}{2}\sigma_{n_k}$ 中有无穷多项

成立,不设为$\{|X_{n_{k,l}}(\omega)|\}$. $\{n_{k,l}\}$选择依赖于 ω. 这样

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|X_n(\omega)|}{\lambda_n}\geqslant\varlimsup_{l\to\infty}\frac{\ln|X_{n_{k,l}}(\omega)|}{\lambda_{n_{k,l}}}\geqslant\varlimsup_{l\to\infty}\frac{\ln\left|\frac{d}{2}\sigma_{n_{k,l}}\right|}{\lambda_{n_{k,l}}}$$

$$=\varlimsup_{l\to\infty}\frac{\ln|\sigma_{n_{k,l}}|}{\lambda_{n_{k,l}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|\sigma_{n_k}|}{\lambda_{n_k}}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n}\quad\text{a. s.},$$

类似有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|X_n|}{\lambda_n\ln\lambda_n}\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n}\quad\text{a. s.},$$

综合以上各式,知引理 2 得证. ▎

记级数(1)收敛横坐标为 $\sigma_c(\omega)$,一致收敛横坐标为 $\sigma_u(\omega)$,绝对收敛横坐标为 $\sigma_a(\omega)$.

定理 1 若$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n}=-\infty$,$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}<+\infty$,那么

$$\sigma_c(\omega)=\sigma_u(\omega)=\sigma_a(\omega)=-\infty\quad\text{a. s.}.\tag{7}$$

证 由 Varlion 公式及引理 2(i)有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|X_n(\omega)|}{\lambda_n}\leqslant\sigma_c(\omega)\leqslant\sigma_u(\omega)\leqslant\sigma_a(\omega)$$

$$\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|X_n(\omega)|}{\lambda_n}+\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}$$

$$\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n}+2\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}\quad\text{a. s.},$$

当$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n}=-\infty$,且$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}<\infty$时

$$\sigma_c(\omega)=\sigma_u(\omega)=\sigma_a(\omega)=-\infty\quad\text{a. s.}.$$

定理证毕. ▎

定理 2 设$\{X_n\}$满足(2)式,则

当$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}<+\infty$,$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n}=-\infty$时,级数(1)增长级 a. s. 为 ρ

$$\Leftrightarrow\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n}=\begin{cases}-\infty,(\text{当 }\rho=0);\\-\dfrac{1}{\rho},(\text{当 }0<\rho<\infty);\\0,(\text{当 }\rho=\infty).\end{cases}\tag{8}$$

证 $f_\omega(s)$有增长级 $\rho(\omega)\Leftrightarrow$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|X_n(\omega)|}{\lambda_n\ln\lambda_n}=\begin{cases}-\infty,\text{当 }\rho(\omega)=0;\\-\dfrac{1}{\rho(\omega)},\text{当 }0<\rho(\omega)<\infty;\\0,\text{当 }\rho(\omega)=\infty.\end{cases}\tag{9}$$

但由引理 2 有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|X_n(\omega)|}{\lambda_n\ln\lambda_n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n}\quad\text{a. s.},\tag{10}$$

这样 $\rho(\omega)=\rho$ a. s..

由(9),(10)式便得(8)式. ▎

注 此定理表明全平面上收敛级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}X_n\mathrm{e}^{-\lambda_n s}$ 与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sigma_n\mathrm{e}^{-\lambda_n s}$ 有相同的增长级.

引理 3 设随机变量 X 满足条件

$EX=0$，存在正数 $d>0$，使得

$$0<d^2E\mid X\mid^2\leqslant E^2\mid X\mid<+\infty, \tag{11}$$

那么

$$\begin{aligned}\sup_{a\in C}P(X=a)&\leqslant\sup_{a\in C}P\left(\mid X-a\mid<\frac{1}{4}E\mid X\mid\right)\\&\leqslant 1-\frac{d^2}{4(4+d^2)}<1,\end{aligned} \tag{12}$$

见[4]中引理 3.

引理 4(Paley-Zygmund) 设 $\{X_n\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的独立的随机变量列，它们的数字期望 $EX_n=0$，且方差 $E\mid X_n\mid^2=\sigma_n^2>0$，$d=\inf\{E\mid\frac{X_n}{\sigma_n}\mid\}>0$，则对任意 $H\in\mathscr{F}$，$P(H)>0$，存在正数 $B=B(d,H)$，$K=K(H,\{X_n\})\in N$，使得对任何复数列 $\{b_n\}$ 及任何自然数 $p,q,p>q\geqslant K$，恒有

$$\int_H\mid\sum_{n=q}^{p}b_nX_n(\omega)\mid^2P(d\omega)\geqslant B\sum_{n=q}^{p}\mid b_n\mid^2\sigma_n^2, \tag{13}$$

见[5].

定理 3 设级数(1)满足(2)式和

(i) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n}<\infty$；

(ii) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n}=-\frac{1}{\rho}$，$0<\rho<\infty$，

那么，$\forall\, t\in R$

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln^+\ln^+\mid f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)\mid}{-\sigma}=\rho\left(=\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln^+\ln^+M(\sigma,f_\omega)}{-\sigma}\right)\quad \text{a. s.}. \tag{14}$$

证 注意(ii)$\Rightarrow\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n}=-\infty$.

由定理 2 知，$\overline{\lim\limits_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln^+\ln^+M(\sigma,f_\omega)}{-\sigma}=\rho$，令 $H=\{\omega\mid\overline{\lim\limits_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln^+\ln^+\mid f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)\mid}{-\sigma}<\rho\}$，我们只要证明 $P(H)=0$ 就够了，若不然有 $P(H)>0$，任取 $\tilde{\sigma}_m\to-\infty$，$\varepsilon_n\downarrow 0$ 有

$$H=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\omega\mid\frac{\ln^+\ln^+\mid f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)\mid}{-\sigma}<\rho-\varepsilon_n,\sigma<\tilde{\sigma}_m\},$$

由此有 m_0,n_0 使得 $P(H')>0$，其中

$$H'=\{\omega\mid\frac{\ln^+\ln^+\mid f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)\mid}{-\sigma}<\rho-\varepsilon_{n_0},\sigma<\tilde{\sigma}_{m_0}\},$$

简记 $\varepsilon_{n_0}=\varepsilon_0$，$\tilde{\sigma}_{m_0}=\tilde{\sigma}_0(<0)$.

对于 $\omega\in H'$，$\sigma<\tilde{\sigma}_0$，我们有

$$\mid f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)\mid<\exp(\mathrm{e}^{-(\rho-\varepsilon_0)\sigma}), \tag{15}$$

由引理 4，存在一自然数 $N=N(H',\{X_n\})$，正数 $B=B(d,H')$，使得

$$\int_{H'}\mid\sum_{n=N}^{\infty}X_n\mathrm{e}^{-\lambda_ns}\mid^2\mathrm{d}p\geqslant B\sum_{n=N}^{\infty}\sigma_n^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma},$$

又由(15)式

$$\int_{H'}|\sum_{n=N}^{\infty}X_n(\omega)e^{-\lambda_n s}|^2dP=\int_{H'}|f_\omega(s)-\sum_{n=0}^{N-1}X_n(\omega)e^{-\lambda_n s}|^2dP$$
$$\leqslant 2\int_{H'}|f_\omega(s)|^2dP+2\int_{H'}|\sum_{n=0}^{N-1}X_n(\omega)e^{-\lambda_n s}|^2dP$$
$$\leqslant 2P(H')\exp(2e^{(\rho-\varepsilon_0)\sigma})+2\int_{\Omega}|\sum_{n=0}^{N-1}X_n(\omega)e^{-\lambda_n s}|^2dP$$
$$=2P(H')\exp(2e^{(\rho-\varepsilon_0)\sigma})+2\sum_{n=0}^{N-1}\sigma_n^2e^{-2\lambda_n\sigma},$$

因此

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\sigma_n^2e^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant\frac{2P(H')}{B}\exp(2e^{-(\rho-\varepsilon_0)\sigma})+\frac{2}{B}\sum_{n=0}^{N-1}\sigma_n^2e^{-2\lambda_n\sigma},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^2e^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant\frac{2P(H')}{B}\exp(2e^{-(\rho-\varepsilon_0)\sigma})+(\frac{2}{B}+1)\sum_{n=0}^{N-1}\sigma_n^2e^{-2\lambda_n\sigma}$$
$$\leqslant C^2\exp(2e^{-(\rho-\varepsilon_0)\sigma}),$$

C 是一正常数.

因此 $\forall n$, $\sigma_n^2e^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant C^2\exp(2e^{-(\rho-\varepsilon_0)\sigma}),\sigma_ne^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant C\exp(e^{-(\rho-\varepsilon_0)\sigma})$,

$$\ln\sigma_n\leqslant\ln C+e^{-(\rho-\varepsilon_0)\sigma}+\lambda_n\sigma,\sigma<\tilde{\sigma}_0<0,$$

当 n 充分大时,λ_n 充分大时,取 $\sigma=-\frac{1}{\rho-\varepsilon_0}\ln\frac{\lambda_n}{\rho-\varepsilon_0}<\tilde{\sigma}_0$,有

$$\ln\sigma_n\leqslant\ln C+\frac{\lambda_n}{\rho-\varepsilon_0}-\frac{\lambda_n}{\rho-\varepsilon_0}\ln\frac{\lambda_n}{\rho-\varepsilon_0},$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n}\leqslant-\frac{1}{\rho-\varepsilon_0},$$

这与 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n}=-\frac{1}{\rho}$ 矛盾,故定理 3 得证. ▌

取可数集合 $\{t_n\}$ 在 R 中稠密,我们得到

定理 4 在定理 3 条件下,存在 $P(E)=1$,对 $\omega\in E$ 及任何实数 β 及 r,$\beta<r$ 有

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln^+\ln^+M(\sigma,\beta,r,f_\omega)}{-\sigma}=\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln^+\ln^+M(\sigma,f_\omega)}{-\sigma}=\rho\quad\text{a. s. .}\tag{16}$$

证 定理 3 中 $\rho=\infty$ 类似可证. 只不过加一个通常条件 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n}=-\infty$,至于 $\rho=0$,结论显然成立,条件(ii)为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln\sigma_n}{\lambda_n\ln\lambda_n}=-\infty$. ▌

我们想办法,将带形上解析函数转化为单位圆上的解析函数来解决.

引理 5 设 $\{Z_n\}$ 是某概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上独立随机变量列且满足

$$K=\sup\{P(Z_n=c)\mid c\in C,n\in N_+\}<1\tag{17}$$

以及函数列 $\{\phi_n(z)\}\subset H(\rho,\theta,b)-\{\infty\}$,$\{\rho>1,\theta\in R,0<b<1)$

$$g_\omega(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z_n(\omega)\phi_n(z),$$

定义了 $\{z\mid\arg z-\theta|<b\}\cap\{z\mid z|<1\}$ 上解析函数,$e^{i\theta}$ 是 $g_\omega(z)$ 的一个 $\rho(\rho>1)$ 级 Borel 点,(a. s. $\omega\in\Omega$),那么 $e^{i\theta}$ 是 g_ω 的没有有穷例外值 Borel 点(a. s. $\omega\in\Omega$).

见[2]引理 4.

注　(2)式成立，(17)式一定满足.

由定理 4 可得，对 $\omega\in E, t_0\in R, \eta>0$ 有

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln\ln M(\sigma,t_0-\eta,t_0+\eta,f_\omega)}{-\sigma}=\rho, \tag{18}$$

现考虑单射 $z=\phi_1(s)=\exp(-\frac{\pi}{2\eta}(s-\mathrm{i}t_0))$ 和

$$W=\phi_2(z)=\frac{z-1}{z+1}, \tag{19}$$

记其逆映射为

$$s=\Phi_1(z)\text{ 和 }z=\Phi_2(W), s=\Phi_1\cdot\Phi_2(W)=\Phi(W),$$

令 $H_1=\{z\,|\,|\arg z|<\frac{\pi}{2}\}, H_2=\{z\,|\,|\arg z|<\frac{\pi}{4}\}$,

$$H_k^*(r)=\{z\,|\,|z|\leqslant r\}\cap H_k, k=1,2,$$
$$D(R)=\{W\,|\,|W|<R\}\quad(R\in(0,1]),$$

那么 $\Phi(D(1))=B(t_0,\eta)\triangleq\{s\,|\,|\mathrm{Im}s-t_0|<\eta\}$，令 $B^*(\sigma,t_0,\eta)=\{s\,|\,\mathrm{Re}s\geqslant\sigma\}\cap B(t_0,\eta)$, $n(\sigma_0,t_0,\eta,f_\omega(s)=a)\triangleq\{s\,|\,f_\omega(s)=a, s\in B^*(\sigma,t_0,\eta)\}$.

引理 6　对 $R\in(0,1)$，令

$$r=\frac{1+R}{1-R}, \sigma=-\frac{2\eta}{\pi}\ln r,$$

那么

$$B^*(\sigma-\frac{2\eta}{\pi}\ln k_1, t_0, \frac{\eta}{2})\cap\{s\mid \mathrm{Re}s=\sigma-\frac{2\eta}{\pi}\ln k_1\}$$
$$\subset\Phi(D(R))\subset B^*(\sigma,t_0,\eta),(\frac{1}{6}<k_1<\frac{1}{2}) \tag{20}$$

和

$$-\frac{\pi\sigma}{2\eta}-\ln 2<-\ln(1-R)<-\frac{\pi\sigma}{2\eta}. \tag{21}$$

见[8].

在定理 3 条件下，由映射(19)把级数(1)变为 $D(1)$ 上随机级数

$$\psi(W,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(\omega)\exp(-\lambda_n\Phi(W)). \tag{22}$$

引理 7　关于 $\psi(W,\omega)$ ($D(1)$上)，当 $\eta>\frac{\pi}{2\rho}$ 时，我们有

$$\overline{\lim_{R\to1}}\frac{\ln^+T(R,\psi(W,\omega))}{-\ln(1-R)}=\frac{2\eta\rho}{\pi}-1\quad\text{a. s.}, \tag{23}$$

表明 ψ 级为 $\frac{2\eta\rho}{\pi}-1$　a. s. 和对于所有 $a\in C$

$$\overline{\lim_{R\to1}}\frac{\ln^+N(R,\psi(W,\omega)=a)}{-\ln(1-R)}=\frac{2\eta\rho}{\pi}-1\quad\text{a. s.}. \tag{24}$$

相应

$$\overline{\lim_{R\to1}}\frac{\ln^+n(R,\psi(W,\omega)=a)}{-\ln(1-R)}=\frac{2\eta\rho}{\pi}\quad\text{a. s.}. \tag{25}$$

其中

$$T(R,\psi(W,\omega))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|\psi(Re^{i\theta},\omega)|\,d\theta,$$

$$N(R,\psi(W,\omega)=a)=\int_{R_0}^{R}\frac{n(u,\psi(W,\omega)=a)}{u}du,$$

$$n(u,\psi(W,\omega)=a)\triangleq\{W\mid\psi(W,\omega)=a,\ |W|<u\},$$

R_0 是(0,1)中一个固定的数.

证 由(20)与(21)式得

$$M(\sigma-\frac{2\eta}{\pi}\ln k_1,t_0-\frac{\eta}{2},t_0+\frac{\eta}{2},f_\omega)\leqslant M_\psi(R,\omega)\leqslant M(\sigma,f_\omega)$$

和

$$\frac{\ln^+\ln^+M(\sigma-\frac{2\eta}{\pi}\ln k_1,t_0-\frac{\eta}{2},t_0+\frac{\eta}{2},f_\omega)}{-\pi\sigma/2\eta}$$
$$\leqslant\frac{\ln^+\ln^+M_\psi(R,\omega)}{-\ln(1-R)}\leqslant\frac{\ln^+\ln^+M(\sigma,f_\omega)}{-\frac{\pi\sigma}{2\eta}-\ln 2},$$

其中 $M_\psi(R,\omega)=\max\limits_{|W|=R}|\psi(W,\omega)|$,由定理 4 得

$$\overline{\lim_{R\to1}}\frac{\ln^+\ln^+M_\psi(R,\omega)}{-\ln(1-R)}=\frac{2\eta\rho}{\pi}\quad \text{a. s.}, \tag{26}$$

由[6] $\ln^+M_\psi(R,\omega)\geqslant T(R,\psi(W,\omega))\geqslant\frac{1-R}{3R+1}\ln^+M_\psi(2R-1,\omega)$ 得

$$\frac{2\eta\rho}{\pi}-1\leqslant\overline{\lim_{R\to1}}\frac{\ln^+T(R,\psi(W,\omega))}{-\ln(1-R)}\leqslant\frac{2\eta\rho}{\pi}, \tag{27}$$

由 0-1 律,可设 $\overline{\lim\limits_{R\to1}}\frac{\ln^+T(R,\psi(W,\omega))}{-\ln(1-R)}=t$ a. s. 则 $t+1\geqslant\frac{2\eta\rho}{\pi}$. 由 Nevanlinna Second Theorem,至多有一个有限例外值除外,$\forall a\in C$

$$\overline{\lim_{R\to1}}\frac{\ln^+N(R,\psi(W,\omega)=a)}{-\ln(1-R)}=t\quad \text{a. s.},$$

相应由[7]得

$$\overline{\lim_{R\to1}}\frac{\ln^+n(R,\psi(W,\omega)=a)}{-\ln(1-R)}=t+1\quad \text{a. s.},$$

$$\frac{\ln^+n(R,\psi(W,\omega)=a)}{-\ln(1-R)}\leqslant\frac{\ln^+n(\sigma,\eta-t_0,\eta+t_0,f_\omega)}{-\pi\sigma/2\eta-\ln 2},$$

$$\begin{aligned}1<t+1&=\overline{\lim_{R\to1}}\frac{\ln^+n(R,\psi(W,\omega)=a)}{-\ln(1-R)}\\&\leqslant\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln^+n(\sigma,t_0-\eta,\eta+t_0,f_\omega)}{-\pi\sigma/2\eta-\ln 2}\\&\leqslant\frac{2\eta}{\pi}\rho\quad \text{a. s.}.\end{aligned} \tag{28}$$

由(27)与(28)式得:$t=\frac{2\eta\rho}{\pi}-1$. 由引理 3 和 5 知 a. s. ,没有有限例外值. ▌

由于 $\eta>\frac{\pi}{2\rho}$ 的任意性,t_0 任意性,(28)式表明,在宽为 $\frac{\pi}{\rho}$ 的任何带形内有一条 ρ 级 Borel 线,且无有穷例外值. 由引理 7 得

定理 5 在定理 3 条件下，a. s. f_ω 在任何宽为 $\frac{\pi}{\rho}$ 的带形内，有一条 ρ 级没有有限例外值的 Borel 线.

注 对于 $\rho=\infty$ 情形，由(27)式看出 $t=\infty$，由(28)式知每一水平线为无穷级(没有有穷例外值)Borel 线.

参 考 文 献

[1] Yu Jiarong. Sur las droites de Borel de certains functions entieres. Ann Scient EC Norm，1951，**68**(3)：65－104

[2] Sun Daochun，Yu Jiarong. On the distribution of values of Random Dirichlet Series(Ⅱ). Chin Ann of math，1999，**11**B(1)：33－44

[3] Kahane J P. Some Random Series of Functions，2nd ed. London：Cambridge University Press，1985

[4] Ding Xingqing. The value distribution of Random analytic Dirichlet series of neutral growth(Ⅱ). Acta Math Scientia，2000，**20**(B)：504－510

[5] 孙道椿. 半平面上的随机 Dirichlet 级数. 数学物理学报，1999，**19**(1)：107－112

[6] Nevanlina R. Le Theoreme de Picard-Borel et la Theorie des Functions Meromorphes. Paris：Gauthier-Villarss，1929

[7] Sun Daochun. Common Borel point of amerorphic function and its derivatives in the circle. Acta Math Scientia，1984，**4**(2)：227－232

[8] Yu Jiarong. Borel lines of Random sories. Acta Mathematica Scientia，2002，**22**(1)：1－8

The Entire Function Expressed by a General Random Dirichlet Series

Tian Fanji

(*Institute of Mathematics and Computer Sciences*，*Hubei University*，*Wuhan* 430062)

Ren Yaofeng

(*Department of Mathematics*，*The Naval University of Engineering*，*Wuhan* 430033)

Abstract：The growth and value distribution of the entire function expressed by a general Random Dirichlet series are studied in this paper. The important results are obtained under suitable conditions：the order of growth in a horizontal strip or on a line are the same as the whole plane a. s.，for the Random Dirichlet series with order $\rho(0<\rho<\infty)$，there is at least a Borel line of order ρ without finite exceptional value in every horizontal strip of width $\frac{\pi}{\rho}$ a. s..

Key words：Random Dirichlet series；The order of growth；The value distribution.

MR(2000) Subject Classification：30B50