2004,**24A**(4):496－500

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

图的生成树，基本圈与 Betti 亏数*

黄元秋
（湖南师范大学数学系　长沙 410081）
刘彦佩
（北京交通大学数学系　北京 100044）

摘要：G 为图且 T 是 G 的一棵生成树．记号 $\xi(G,T)$ 表示 $G\backslash E(T)$ 中边数为奇数的连通分支个数．文献[2]称 $\xi(G)=\min\limits_T\xi(G,T)$ 为图 G 的 Betti 亏数，这里 min 取遍 G 的所有生成树 T．由文献[2]知，确定一个图 G 的最大亏格主要确定这个图的 Betii 亏数 $\xi(G)$．该文研究与 Betti 亏数有关的图的特征结构，得到了关于图的最大亏格的若干结果．

关键词：生成树；Betti 亏数；上可嵌入性；最大亏格．

MR(2000)主题分类：05C　　**中图分类号：**O157.5　　**文献标识码：**A

文章编号：1003-3998(2004)04-496-05

1　引言

本文所考虑的图均为有限，无向图，但可能有重边或环．除非明确指出，文中所指的图均为连通图．其它未解释或说明术语和记号，均同文献[1]．

曲面是指一个紧的 2-维闭流形．曲面分可定向曲面和不可定向曲面两类．一个图 G 在曲面 S 上的一个 2-胞腔嵌入 $h:G\to S$ 是 G 到 S 上的一个 1-1 映射使得 $S\backslash h(G)$ 的每个连通分支与开圆盘同胚．图 G 的最大亏格，记为 $\gamma_M(G)$，是指最大的整数 k 使得 G 能 2-胞腔嵌入亏格为 k 的定向曲面 S 上．由 Euler 公式，易得到一个图 G 的最大亏格满足：$\gamma_M(G)\leqslant[\frac{\beta(G)}{2}]$，这里 $\beta(G)=|E(G)|-|V(G)|+1$ 称为 G 的圈秩数．若 $\gamma_M(G)=[\frac{\beta(G)}{2}]$，则称图 G 是上可嵌入的（记号$[X]$表示不超过 X 的最大整数）．

G 为图且 T 是 G 的一棵生成树．记号 $\xi(G,T)$ 表示 $G\backslash E(T)$ 中边数为奇数的连通分支个数．文献[2]称 $\xi(G)=\min\limits_T\xi(G,T)$ 为图 G 的 Betti 亏数，这里 min 取遍 G 的所有生成树 T．一个图的最大亏格及其上可嵌入性与这个图的 Betti 亏数密切相关．文献[2]给出了如下结果．

定理 A　设 G 为图，则：(1) $\gamma_M(G)=\frac{1}{2}(\beta(G)-\xi(G))$；(2) G 是上可嵌入的，当且仅当 $\xi(G)\leqslant1$．

收稿日期：2001-03-01；修订日期：2003-05-18

* 基金项目：国家自然科学基金(10271045)、国家自然科学数学天元青年基金(10226016)以及湖南省教育厅青年基金(02B018)资助

图的最大亏格一直是拓扑图论中主要研究的问题之一（见文献[3]）. 目前，许多图论学者对图的最大亏格以及与其相关的上可嵌入性进行了深入而广泛的研究. 关于这方面取得的一系列结果，读者可参阅文献[5－12]. 因为一个图 G 的圈秩数 $\beta(G)$ 是一个极易确定的量，由定理 A 可知，确定图 G 的最大亏格主要确定其参数 $\xi(G)$. 给出与 Betti 亏数有关的图的特征结构，是研究图的最 大亏格的重要途径. 本文将给出这方面的若干结果.

2 引理，定理及推论

设 X 为图 G 的任意边子集，$G\backslash X$ 表示从 G 中去掉 X 中所有的边后所得到的图. 记号 $c(G\backslash X)$ 表示 $G\backslash X$ 的所有连通分支的个数. 设 H 为图 G 的一个子图，$E(H, G)$ 表示 G 中一个端点在 $V(H)$ 中，而另一个端点不在 $V(H)$ 中的边组成的集合. 对任意集合 X，总是用 $|X|$ 表示 X 中元素个数.

文献[12]给出了如下结果.

引理 1[12] 设 G 为图，若 $\xi(G)\geqslant 2$，则存在 G 的边子集 A 满足下列性质

(i) $c(G\backslash A)\geqslant 2$，且对 $G\backslash A$ 的任意连通分支 F，$\beta(F)$ 为奇数；

(ii) 对 $G\backslash A$ 的任意连通分支 F，F 是 G 的一个点导出子图；

(iii) $|A| = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{l} |E(F_i, G)|$，这里 $F_i, 1\leqslant i\leqslant l$，为 $G\backslash A$ 的所有连通分支；

(iv) $\xi(G)=2c(G\backslash A)-|A|-1$.

设 T 为图 G 的任意一棵生成树，H 为 G 的一个子图，$T\cap H$ 表示如下一个图：其点集是 $V(H)=V(H)\cap V(T)$，其边集是 $E(T)\cap E(H)$. 显然，$T\cap H$ 既是 T 的一个子图，也是 H 的一个生成子图，但不一定连通，因而是 H 的一棵生成树.

定理 2 设 G 为图且 $\xi(G)=k\geqslant 2$，即 G 不是上可嵌入的. 对 G 的任意生成树 T，则存在 G 的 k 个顶点互不相交的，连通的点导出子图 $H_1, H_2, \cdots, H_k$ 使得，对每个 $1\leqslant i\leqslant k$，

(a) $\beta(H_i)$ 为奇数；

(b) $T\cap H_i$ 是连通的，即为 H_i 的一棵生成树，且 $E(H_i, G)\subseteq E(T)$.

证 因为 $\xi(G)\geqslant 2$，由引理 1 存在 G 的边子集 A 使得 $G\backslash A$ 满足引理 1 的所有性质(i)－(iv). 设 $F_1, F_2, \cdots, F_l$ 为 $G\backslash A$ 的所有连通分支，其中 $l=c(G\backslash A)$. 由引理 1(i)，$l\geqslant 2$. 由引理 1 (i)和(ii)，每个 $F_i(1\leqslant i\leqslant l)$ 是 G 的点导出子图，且 $\beta(F_i)$ 为奇数. 假设 T 为 G 的任意一棵生成树，则对每个 $1\leqslant i\leqslant l$，$T\cap F_i$ 是 F_i 的一棵生成树，且设这棵树是由 a_i 棵不同的树 $T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, \cdots, T_i^{(a_i)}$ 组成. 显然 $a_i\geqslant 1$. 而且有 $\bigcup\limits_{j=1}^{a_i} V(T_i^{(j)}) = V(F_i)$ 以及 $\sum\limits_{j=1}^{a_i} |V(T_i^{(j)})| = |V(F_i)|$. 另外，我们有

$$|E(T\cap F_i)| = \sum_{j=1}^{a_i} |E(T_i^{(j)})| = \sum_{j=1}^{a_i}(|V(T_i^{(j)})|-1) = |V(F_i)|-a_i, \tag{1}$$

对每个 $1\leqslant i\leqslant l$，显然有

$$|E(F_i, G)| = |E(T)\cap E(F_i, G)| + |E(F_i, G)\backslash(E(T)\cap E(F_i, G))|. \tag{2}$$

我们先将证明如下等式

$$\sum_{i=1}^{l} |E(T)\cap E(F_i, G)| = 2|E(T)\cap A|. \tag{3}$$

因为每个 $F_i(1\leqslant i\leqslant l)$ 为 G 的点导出子图，所以 $A=\bigcup\limits_i^l E(F_i,G)$，从而有

$$\bigcup_{i=1}^{l}(E(T)\cap E(F_i,G))=E(T)\cap(\bigcup_{i=1}^{l}E(F_i,G))=E(T)\cap A.$$

另外，对任意 $e\in E(T)\cap E(F_i,G)$，由 $E(F_i,G)$ 的含义，恰好还存在另一个 i' $(1\leqslant i'\leqslant l, i\neq i')$ 使得 $e\in E(T)\cap E(F_{i'},G)$. 这表明 e 在(3)式左边的和式中恰好贡献 2，因此(3)式中等号成立.

由引理 1(ii)，对任意边 $e\in E(T)$，则或者 $e\in A$ 或者 $e\in E(T\cap F_i)$ $(1\leqslant i\leqslant l)$，即有 $|E(T)|=|E(T)\cap A|+\sum\limits_{i=1}^{l}|E(T\cap F_i)|$，从而我们有

$$\begin{aligned}|E(T)\cap A|&=|E(T)|-\sum_{i=1}^{l}|E(T)\cap E(F_i)|\\&=(|V(G)|-1)-\sum_{i=1}^{l}(|V(F_i)|-a_i)\\&\qquad\text{(因为 } T \text{ 是 } G \text{ 的生成树以及(1)式)}\\&=\sum_{i=1}^{l}a_i-1\quad\Big(\text{因为}\sum_{i=1}^{l}|V(F_i)|=|V(G)|\Big).\end{aligned}$$

再结合上面(3)式，即可得到

$$\sum_{i=1}^{l}|E(T)\cap E(F_i,G)|=2\sum_{i=1}^{l}a_i-2. \tag{4}$$

到此，由引理 1(iii)，我们有

$$\begin{aligned}|A|&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}|E(F_i,G)|\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}|E(T)\cap E(F_i,G)|+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}|E(F_i,G)\backslash(E(T)\cap E(F_i,G))|\quad\text{(由(2)式)}\\&=\sum_{i=1}^{l}\Big\{a_i+\frac{1}{2}|E(F_i,G)\backslash(E(T)\cap E(F_i,G))|\Big\}-1\quad\text{(由(4)式以及合并整理)}.\end{aligned}$$

对任意 $1\leqslant i\leqslant l$，令 $b_i=a_i+\frac{1}{2}|E(F_i,G)\backslash(E(T)\cap E(F_i,G))|$. 注意到由 $a_i\geqslant 1$，则有 $b_i\geqslant 1$ $(1\leqslant i\leqslant l)$. 下面我们将证明：在 $b_1,b_2,\cdots,b_l$ 中，至少有 $\xi(G)$ 个，它们的值均为 1，不妨是 $b_1=b_2=\cdots=b_{\xi(G)}=1$. 若不然，则我们可得到

$$|A|=\sum_{i=1}^{l}b_i-1\geqslant\xi(G)-1+2(l-(\xi(G)-1))-1=2l-\xi(G).$$

然而由引理 1(iv)，$|A|=2l-\xi(G)-1$. 这是一个矛盾. 由 $b_i=1$ $(1\leqslant i\leqslant\xi(G))$，这表明：$a_i=1$ 且 $|E(F_i,G)\backslash(E(T)\cap E(F_i,G))|=0$. 由 $a_i=1$ 以及 a_i 的含义，则有 $T\cap F_i$ 是连通的，即为 F_i 的一棵生成树. 由 $|E(F_i,G)\backslash(E(T)\cap E(F_i,G))|=0$，则有 $E(F_i,G)\subseteq E(T)\cap E(F_i,G)$，进而 $E(F_i,G)\subseteq E(T)$. 再注意到前面所述的 F_i 的性质. 因此，令 $H_i=F_i$，$1\leqslant i\leqslant\xi(G)$，则 $H_1,H_2,\cdots,H_{\xi(G)}$ 为定理中所要求的，从而定理获证. ▌

注记 在上述定理 2 中，对于给定的 G 的生成树 T 以及满足定理 2 要求的这组子图 $H_1,H_2,\cdots,H_{\xi(G)}$，我们不难得到如下事实：对于每个 $H_i(1\leqslant i\leqslant k=\xi(G))$，至少存在 H_i 的一个子图，它是 $G\backslash E(T)$ 的一个边数为奇数的连通分支，因此 $\xi(G,T)\geqslant\xi(G)$.

一个图中的圈是这个图的一条点不重复的闭途径. 两个圈称为不相交的，如果它们没

有公共点．设 T 为图 G 的一棵生成树，对任意边 $e\in E(G)\backslash E(T)$，$T+e$ 中含有唯一圈，记为 $C_T(e)$，且称之为 G 关于 T 的一个基本圈．两个相交的基本圈的公共部分是一条(简单)路．

推论 3 设 G 为图，若 G 中存在一棵生成树 T，使得对于任意两条不同的边 e，$f\in E(G)\backslash E(T)$，圈 $C_T(e)$ 与 $C_T(f)$ 是相交的，则 G 是上可嵌入的．

证 反证法．假设 G 不是上可嵌入的，即 $\xi(G)=k\geqslant 2$．由定理 2，至少存在 G 的两个点不相交的点导出子图 H_1 和 H_2 满足定理 2 中的(a)和(b)．从而，不难看出分别存在边 $e_i\in E(H_i)$ $(i=1,2)$使得 $e_i\notin E(T)$，而且圈 $C_T(e_i)$ 是 H_i 中的子图．因此 $C_T(e_1)$和 $C_T(e_2)$是不相交的．这与推论的条件矛盾． ▌

图 G 的一棵生成树 T 称为最优生成树，如果 $\xi(G)=\xi(G,T)$．

推论 4 在定理 2 的条件下，若 T 为图 G 的一棵最优生成树，则 G 中恰好只存在 $\xi(G)$ 个互不相交的，连通的点导出子图 $H_i(1\leqslant i\leqslant\xi(G))$ 满足定理 2 中的(a)和(b)．

证 假设 G 中存在 m 个互不相交的，连通的点导出子图 H_1，H_2，…，H_m 满足定理 2 中的(a)和(b)，这里 $m>\xi(G)$．由上述注记，则有 $\xi(G,T)\geqslant m$．因为 T 为 G 的最优生成树，所以 $\xi(G)=\xi(G,T)\geqslant m>\xi(G)$．显然是一个矛盾！ ▌

设 T 为图 G 的一棵生成树．对于 G 中的任意两点 x 和 y（不排除 $x=y$），T 中连接 x 和 y 的唯一路记为 $P_T(x,y)$．我们称图 G'是由 G 加入一对关于 T 相邻的边 e'和 e''所得到的图，如果满足条件：设加入的边 e'和 e''的两个端点分别为 u 和 v，以及 s 和 t，则路 $P_T(u,v)$ 和 $P_T(s,t)$是相交的．此时易知，T 也是 G'的生成树，而且 G'中的基本圈 $C_T(e')$和 $C_T(e'')$是相交的．

文献[2]给出如下结果：向一个图 G 中加入一对相邻边 e_1 和 e_2(即，e_1 和 e_2 至少有一个公共端点)后所得到的图 G'的最大亏格至少增加 1；特别地，若 G 是上可嵌入的，则 G'也是上可嵌入的．下面我们用“加入关于某棵生成树相邻的边对”取代条件“加入相邻的边对”，从而推广上述结论．

推论 5 设 T 为一个图 G 的一棵最优生成树．记 G'是在 G 中加入一对关于 T 相邻的边 e'和 e''所得到的图．则 $\xi(G')\leqslant\xi(G)$，从而 $\gamma_M(G')\geqslant\gamma_M(G)+1$；特别地，若 G 是上可嵌入的，则 G'也是上可嵌入的．

证 首先我们注意到如下事实：$\beta(G')=\beta(G)+2$，T 也是 G'的一棵生成树，而且 G'中关于 T 的基本圈 $C_T(e')$和 $C_T(e'')$是相交的．只要证得 $\xi(G')\leqslant\xi(G)$，则推论的其余结论可直接由定理 A 得到．下证 $\xi(G')\leqslant\xi(G)$．由定义，一个图的 Betti 亏数与这个图的圈秩数具有相同的奇偶性．因为 $\beta(G')$与 $\beta(G)$同奇偶，所以 $\xi(G')$与 $\xi(G)$同奇偶．现假设 $\xi(G')\not\leqslant\xi(G)$，则有 $\xi(G')\geqslant\xi(G)+2\geqslant 2$．取 G'中的生成树 T 同时运用定理 2，则 G'中存在 $\xi(G')$个互不相交的，连通的点导出子图 H_1，H_2，…，$H_{\xi(G')}$满足定理 2 中的(a)和(b)．若 e'和 e''中最多只有一个属于某个 H_i，或者 e'和 e''同时属于某个 H_i，由定理 2 中的(a)和(b)，我们有

$$\xi(G,T)\geqslant|\{H_i:1\leqslant i\leqslant\xi(G)\text{ 且 }H_i\text{ 既不含边 }e'\text{ 也不含边 }e''\}|\geqslant\xi(G)-1.$$

因 T 为 G 的最优生成树，即 $\xi(G)=\xi(G,T)$，由此得到一个矛盾的式子：$\xi(G)\geqslant\xi(G)-1$．若 e'和 e''分别属于某两个不同的 H_i 和 H_j．由于 e'，$e''\notin E(T)$，以及定理 2 中(b)，则 G'中关于生成树 T 的基本圈 $C_T(e')$ 和 $C_T(e'')$是不相交的，这与前面所述的事实矛盾．因此，$\xi(G')\leqslant\xi(G)$．这样推论获证． ▌

推论 6[4] 设 G 为图，则 $\gamma_M(G)=0$，当且仅当 G 中任意两个圈不相交．

证 若 G 中任意两个圈是不相交的，则对 G 的任意生成树 T，由定义 $\xi(G,T)=\beta$

(G). 由 T 的任意性，$\xi(G)=\beta(G)$，进而由定理 A，$\gamma_M(G)=\frac{1}{2}(\beta(G)-\xi(G))=0$. 若 $\gamma_M(G)=0$，假设 G 中存在两个相交的圈 C_1 和 C_2，从而一定存在两个相交圈 C' 和 C'' 使得它们相交的公共部分是一条路. 因此，存在两条不同的边 $e'\in E(C')$ 及 $e''\in E(C'')$ 使得 $C'\cup C''\backslash\{e', e''\}$ 是一棵树 T'（不一定是 G 的生成树）. 现把 T' 扩充为 G 的一棵生成树 T. 记 $G'=T+\{e'_1, e''_2\}$. 由 T 的得到，G' 可看成在 T 加入一对关于 T 相交的边 e' 和 e'' 所得到的图. 运用推论 5，$\gamma_M(G')\geqslant\gamma_M(T)+1=1$. 又因为 G' 为 G 的子图，由文献[2]，$\gamma_M(G)\geqslant\gamma_M(G')\geqslant 1$. 这与 $\gamma_M(G)=0$ 矛盾，因此 G 中任意两个圈不相交. ▌

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: Macmillan and New York: Elsevier, 1979

[2] 刘彦佩. 图的可嵌入性理论. 北京：科学出版社，1994

[3] Gross J L, Tucker T W. Topological Graph Theory. New York: Wiley, 1987

[4] Xoung N H. How to determine the maximum genus of a graph. J Combinatorial Theory Sereis B, 1979, **26**: 217－225

[5] Nebesky L. N_2-locally connected graphs and their upper embeddability. J Czechoslovak Math, 1991, **41**: 731－735

[6] Skoviera M. The decay number and the maximum genus of a graph. Math Slovaca, 1992, **42**(4): 391－406

[7] Stahl S. On the number of maximum genus embeddings of almost all graphs. Euro J Combinatorics, 1992, **13**: 119－126

[8] Chen J, Archdeacon D, Gross J L. Maximum genus and connectivity. Discrete Math, 1996, **149**: 11－29

[9] Hunglin Fu, Minchu Tsai. The maximum genus of diameter three graphs. Australasian J Combinatorics, 1996, **14**: 187－197

[10] Yuanqiu Huang, Yanpei Liu. Maximum genus and maximum nonseparating indepedent set of a 3-regular graph. Discrete Math, 1997, **176**: 149－158

[11] Yuangqiu Huang, Yanpei Liu. Maximum genus and girth of graphs. Discrete Math, 1999, **194**: 253－259

[12] 黄元秋. 与最小度有关的图的最大亏格的下界. 应用数学学报，1999，**22**(2)：193－198

Spanning Trees, Basic Cycles and Betti Deficiency of a Graph

Huang Yuanqiu

(*Department of Mathematics, Normal University of Hunan, Changsha* 410081)

Liu Yanpei

(*Department of Mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing* 100044)

Abstract: Let G be a graph and T be a spanning tree of it. The sign $\xi(G, T)$ denotes the number of components of $G\backslash E(T)$ with odd number of edges, and it is known that the value $\xi(G)=\min_T\xi(G, T)$ is defined as Betti deficiency of G, where min is taken over all spanning trees of G. In this paper the authors study the characteristic structure of a graph connecting to its Betti deficiency, and obtain some new results on the maximum genus of a graph.

Key words: Spanning tree; Betti Deficiency; Upper Embeddability; Maximum Genus.

MR(2000) Subject Classification: 05C