

双向 2-重迹与图的最大亏格*

黄元秋

(湖南师范大学数学系 长沙 410081)

刘彦佩

(北京交通大学数学系 北京 100044)

褚玉明

(湖州师范学院数学系 湖州 313000)

摘要: 设 G 为连通图且 L 是 G 的一条双向 2-重迹. 作者引入 G 的一个新参数, 称之为 G 的反射数, 并用 $\epsilon(G)$ 表示. 反射数 $\epsilon(G)$ 由如下式子给出: $\epsilon(G) = \min_L \epsilon(G, L)$, 这里 $\epsilon(G, L)$ 是 G 的关于 L 的反射数, 且“ \min ”取遍 G 的所有双向 2-重迹 L . 然后, 对于 3-正则图 G , 作者证明了 G 的反射数 $\epsilon(G)$ 与 G 的最大亏格 $\gamma_M(G)$ 密切相关, 具体地, $\epsilon(G) = 2\gamma_M(G) - \beta(G)$, 其中 $\beta(G)$ 是 G 的圈秩数. 同时, 作者给出一个与 $\epsilon(G)$ 的值有关的 G 的特征结构. 这些可视为 Thomassen C 的有关结果的进一步补充.

关键词: 双向 2-重迹; 反射数; Betti 亏数; 上可嵌入; 最大亏格.

MR(2000)主题分类: 05C75 **中图分类号:** O157.5 **文献标识码:** A

文章编号: 1003-3998(2004)05-530-07

1 引言

本文考虑的图均为有限图, 且可能有重边或环, 同时无特别强调均为连通图. 一个 3-正则图是一个每个点的度为 3 的图. 设 G 为一个图, 对于任意集合 $X \subseteq V(G) \cup E(G)$, 记号 $G \setminus X$ 表示从 G 中去掉 X 中的所有元素所得到的图 (去掉一个点必须同时去掉与这个点关联的所有边). 若 X 只含单个元素 x , 我们用记号 $G \setminus x$ 取代 $G \setminus X$.

一个图 G (当然是连通的) 的最大亏格^[1], 用 $\gamma_M(G)$, 是一个最大的整数 k , 使得 G 在亏格为 k 的定向曲面上有 2-胞腔嵌入. 因为 G 在任意曲面上的 2-胞腔嵌入至少有一个面, 由 Euler 公式易得到一个图 G 的最大亏格上界

$$\gamma_M(G) \leq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor,$$

这里 $\beta(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$ 称为 G 的圈秩数 (对任意实数 x , $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数). 一个图称为上可嵌入的, 如果 $\gamma_M(G) = \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$. 图的最大亏格是图的一个重要

收稿日期: 2001-04-16; 修订日期: 2003-01-17

E-mail: hyqq@public.es.hn.cn

* 基金项目: 数学天元青年基金(10226018)、国家自然科学基金(10271045)及湖南省教育厅青年基金(02B018)资助

的拓扑参数,一直受到许多作者的关注(例如,文献 [1-2], [4-6],以及[8-9]).

一个图 G 的双向 2-重迹是 G 的一条闭路经,使得从起点出发,以不同的方向经过 G 中的每条边恰好两次. 本文我们总是用点边序列的形式来书写一条双向 2-重迹 L ; 且在 L 的表示中,用“ e ”和“ e' ”分别表示 L 经过的边 e 的第一次和第二次出现. 若一条双向 2-重迹 L 有如下形式: $L = \cdots eve' \cdots$, 这里 v 是一个与边 e 关联的点, 我们说 L 在 v 处有一个反射 $\langle eve' \rangle$. 不难看出任何一个图 G 存在双向 2-重迹. 事实上,对于 G 中每条边 e , 用两条方向相反的有向边 e 和 e' 取代 e , 然后利用有向图的 Euler 定理.

设 L 是图 G 的一条双向 2-重迹, 用 $\varepsilon(G, L)$ 表示 L 中的所有反射的个数. 我们定义一个图 G 的反射数, 用 $\varepsilon(G)$ 表示, 是如下一个值: $\varepsilon(G) = \min_L \varepsilon(G, L)$, 其中“min”取遍 G 中的所有双向 2-重迹 L .

我们这里定义的图的反射数源于 Thomassen 的论文^[10]. Thomassen 在[10]回答了 Qre^[7]中提出的一个问题: 刻画什么样的图存在一条没有反射的双向 2-重迹, 用我们的叙述, 即刻画什么样的图 G 使得 $\varepsilon(G) = 0$. Thomassen^[10]中证明了, 当一个图 G 最小度 ≥ 4 时, G 中存在没有反射的双向 2-重迹, 即有 $\varepsilon(G) = 0$. 然而, 对于 3-正则图 G , 在什么情况下 G 存在没有反射的双向 2-重迹, 更一般地, 对于 $\varepsilon(G)$ 的研究, 目前没有任何结果. 本文的研究表明, 对于 3-正则图 G , 参数 $\varepsilon(G)$ 与 G 的 Betti 亏数以及最大亏格有着密切联系, 具体地, 我们证明了, 对于一个 3-正则图 G , 有 $\varepsilon(G) = \xi(G)$, 进而有 $\varepsilon(G) = \beta(G) - 2\gamma_M(G)$. 同时我们对于一个满足 $\varepsilon(G) = k$ 的 3-正则图 G (这里 k 为任意非负整数), 我们提供一个 G 的特征结构.

2 有关图的 Betti 亏数引理

设 T 是一个图 G 的生成树. 记号 $\xi(G, T)$ 表示 $G \setminus E(T)$ 中具有奇数条边的分支数目. 图 G 的 Betti 亏数 $\xi(G)$ 是如下一个量: $\xi(G) = \min_T \xi(G, T)$, 其中“min”取遍 G 中的所有生成树 T . 由定义不难看出, $\xi(G)$ 与 $\beta(G)$ 具有相同的奇偶性. 由 Xoung^[11]中结果可知, 因为图的圈秩数是一个易计算的量, 求一个图的最大亏格主要归结求这个图的 Betti 亏数.

引理 1^[11] 设 G 是一个图. 则有

$$(1) \gamma_M(G) = \frac{\beta(G) - \xi(G)}{2};$$

(2) G 是上可嵌入的, 当且仅当 $\xi(G) \leq 1$;

(3) $\xi(G) = 0$ (分别地, 或者 1), 当且仅当 G 在某定向曲面上有 2-胞腔嵌入使得面的个数是 1 (分别地, 或者 2).

注意到 Thomassen 在文献[10]中称满足 $\xi(G) = 0$ 的图 G 是严格上可嵌入的.

下面的结果不难由图的 Betti 亏数定义获得, 或者参看文献 [3].

引理 2 设 G 为图, e 为 G 的一条割边, 则有 $\xi(G) = \xi(G_1) + \xi(G_2)$, 这里 G_1 和 G_2 是 $G \setminus e$ 的两个分支.

如果一个图 G 可以由一个图 H 通过若干次剖分一条边或者在一条边中“插入”一个点而得到, 我们说 G 与 H 是同胚的, 用记号 $G \simeq H$ 表示. 不难看出, 同胚性质保持图的连通性和圈秩数, 以及图的拓扑参量—最大亏格. 由引理 1(1), 我们即有如下结果

引理 3 设 G 和 H 为图. 若 $G \simeq H$, 则有 $\xi(G) = \xi(H)$.

上面引理 3 也可直接由图的 Betti 定义得到.

下面我们在 3-正则图上引入两种运算, 然后讨论新得到的图与原来的图之间的 Betti 亏数的关系.

运算 1 设 G 是一个 3-正则图, e 是一条与 u 点关联的环边, $f=uv$ 是另一条与 u 关联的边(非环边)(如图 1 左边所示). 按如下方法得到一个新图 G' . 首先, 在环边 e 中“插入”两个点 x 和 y , 此时环边 e 被剖分成 3 条新边 e_1, e_2 以及 e_3 ; 然后再增加一条重边 e_4 连接点 x 和 y (如图 1 右边所示). 我们说 G' 是由 G 通过一个在点 u 的 π_1 运算得到. 显然, π_1 保持图的连通性, 以及 3-正则性, 即 G' 也是 3-正则的.

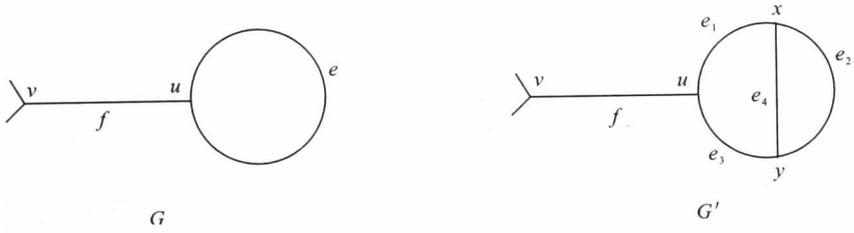


图 1

而且我们有如下结果

命题 1 $\xi(G') = \xi(G) - 1$.

证 因为 G 是 3-正则的, 且 e 是 G 中的环边, 我们注意到边 $f=uv$ 在 G 以及 G' 中均是割边. 而且, $G \setminus f$ 和 $G' \setminus f$ 中有一个同构的分支, 不妨设为 G_0 . 设 G_1 和 G_2 分别是 $G \setminus f$ 和 $G' \setminus f$ 中另一个分支. 由引理 2 我们有 $\xi(G) = \xi(G_0) + \xi(G_1)$, 以及 $\xi(G') = \xi(G_0) + \xi(G_2)$. 另外, 由 Betti 亏数的定义, 易得到 $\xi(G_1) = 1$ 以及 $\xi(G_2) = 0$. 因此, 命题得证. ■

运算 2 设 G 是一个 3-正则图, 边 $e=uv$ 不是 G 的割边且也不是环边(如图 2 左边所示). 我们按如下方式得到一个新图 G' . 首先, 从 G 中去掉边 e , 增加 3 个新点 r, s 以及 t ; 然后连接 s 与 v, t 以及 r , 再两次连接 t 和 r 使得产生两条重边(如图 2 右边所示). 我们说 G' 是由 G 通过在边 e 和点 v 处的运算 π_2 而得到. 显然, π_2 保持图的连通性, 同时注意到除了点 u 的度是 2 外, G' 中的其余点的度均是 3.



图 2

另外, 在上述运算中, 假如选取的边 e 具有特定的性质, 我们将有类似于命题 1 的结果, 即

命题 2 在上述运算 2 中, 如果 e 还满足性质: $\xi(G \setminus e) = \xi(G) - 1$, 则有 $\xi(G') = \xi(G) - 1$.

证 我们只须证明 $\xi(G \setminus e) = \xi(G')$. 我们注意到边 $e_0=sv$ 是 G' 的一条割边, 而且 $G' \setminus e_0$ 的一个分支就是图 $G \setminus e$. 设 H 是 $G' \setminus e_0$ 的另一个分支. 同样, 由定义易得到 $\xi(H) = 0$. 另外, 运用引理 2 有 $\xi(G') = \xi(G \setminus e) + \xi(H) = \xi(G \setminus e)$, 从而命题获证. ■

3 主要结果及证明

首先,我们给出几个与图的双向 2-重迹的反射数有关的引理.

引理 4 设 G 为图,且 L 是 G 的一条双向 2-重迹满足 $\epsilon(G, L) = \epsilon(G)$, 则 L 中的反射只可能出现在度为 1 或 3 的点处.

证 运用文献[10]中证明命题 3.2 的类似方法. |

下面引理说明同胚性质不改变图的反射数.

引理 5 设 G 和 H 是两个同胚的图, 则有 $\epsilon(H) = \epsilon(G)$.

证 由 G 和 H 的同胚性,我们只需证明剖分一条边不改变图的反射数.不失一般性,假设 H 是剖分图 G 中的边 $e = uv$ 所得到的图(不排除 $u = v$).且设“插入” e 中的点为 x . 设 $e_1 = ux$ 以及 $e_2 = xv$ 是剖分 e 所产生的两条新边.我们将证明 $\epsilon(G) = \epsilon(H)$. 设 L 是 G 的一条双向 2-重迹满足 $\epsilon(G, L) = \epsilon(G)$. 自然地, L 有如下形式: $L = PuevQve'uR$, 这里 P, Q 以及 R 表示 L 的其余部分. 根据 L , 我们重新得到 H 的一条双向 2-重迹 L' : $L' = Pue_1xe_2Rve_2'xe_1'uR$. 容易验证 $\epsilon(H, L') = \epsilon(G, L) = \epsilon(G)$, 因此 $\epsilon(H) \leq \epsilon(G)$. 反过来,假设 L' 是 H 的一条双向 2-重迹满足 $\epsilon(H, L') = \epsilon(H)$. 由引理 4, L' 在 x 点处没有反射. 所以, L' 有如下形式: $L' = P'ue_1xe_2vQ've_2'xe_1'uR'$, 这里 P', Q' 和 R' 是 L' 的其余部分. 同样地, 我们得到 G 的一条双向 2-重迹 $L: L = P'uevQ've'uR'$, 而且 $\epsilon(G, L) = \epsilon(H, L')$. 因此, 这说明 $\epsilon(G) \leq \epsilon(H)$. 从而 $\epsilon(G) = \epsilon(H)$. 由上分析, 引理获证. |

文献[10]证明了如下结果

引理 6 (1) 每个不含度为 1 的严格上可嵌入图存在一条没有反射的双向 2-重迹; (2) 若一个图不含度大于或等于 4 的点, 而且存在一条没有反射的双向 2-重迹, 则这个图是严格上可嵌入的.

定理 1(主要结果) 设 G 是 3-正则图, 则有 $\epsilon(G) = \xi(G)$, 从而有

$$\gamma_M(G) = \frac{1}{2}(\beta(G) - \epsilon(G)).$$

证 我们只需证明前部分, 后半部分可结合引理 1 直接得到. 首先, 对 $\epsilon(G) = k$ 用归纳法证明不等式 $\xi(G) \leq \epsilon(G)$. 若 $k = 0$, 即 G 存在一条没有反射的双向 2-重迹, 因为 G 是 3-正则图, 由引理 6(2) 知 G 是严格上可嵌入的, 即 $\xi(G) = 0$. 此时, 不等式成立. 假设 $k \geq 1$, 且不等式对于反射数 $\leq k - 1$ 的 3-正则图 H 成立. 设 $\epsilon(G) = k$. 下证明不等式对 G 也成立. 选取 G 的一条双向 2-重迹 L 满足 $\epsilon(G, L) = \epsilon(G) = k$. 因为 $k \geq 1$, 设 $\langle ue' \rangle$ 是 L 在某个点 u 处的一个反射. 根据 e 是不是环边, 我们分如下情况

情况 1 e 是一条环边. 不妨假设 G 是图 1 左边所示之图, f 是与 u 点关联的另一条边. 显然, L 有如下形式: $L = Pvfueue'uf'v$, 这里 P 是 L 的其余部分. 设 G' 是由 G 通过在点 u 实施 π_1 运算所得到的图. 不妨假设 G' 是图 1 右边所示之图. 利用 L , 现在我们给出 G' 的一条双向 2-重迹 L'

$$L' = Pvfue_1xe_4ye_2xe_1'ue_3ye_4'xe_2'ye_3'uf'v.$$

不难看出 L' 在点 v, x 以及 y 处均没有反射, 而在其它点处 L' 的反射与 L 一致. 另外注意到 L 在 u 点仅有一个发射 $\langle ue' \rangle$. 因此, L' 的反射数恰好比 L 少 1, 所以有

$$\epsilon(G') \leq \epsilon(G', L') = \xi(G, L) - 1 = k - 1.$$

因为 G' 是 3-正则的, 由归纳假设, $\xi(G') \leq \epsilon(G')$. 另外, 由命题 1, $\xi(G') = \xi(G) - 1$. 所以

得到 $\xi(G) \leq k = \epsilon(G)$.

情况 2 e 不是环边. 因为 L 在 u 处有一个反射 $\langle ueu' \rangle$, 由 G 的 3-正则性, e 不可能是 G 的割边, 因此 $G \setminus e$ 是连通的. 对 G , 我们在 u 和 e 处实施 π_2 运算, 得到图 G' . 不妨假设 G 和 G' 分别是图 2 左边和右边所示的图. 由命题 2, $\xi(G) = \xi(G') + 1$. 另外, 我们总是可以把 L 写成: $L = Pveue'v$, 这里 P 是 L 的其余部分. 同样, 利用 L 我们给出 G' 的一条双向 2-重迹 L'

$$L' = Pve_0se_1te_4re_2te_1'se_3re_4'te_2're_3'se_0'v,$$

而且容易验证 $\epsilon(G', L') = \epsilon(G, L) = \epsilon(G) - 1$. 因此 $\epsilon(G') \leq \epsilon(G', L') \leq k - 1$. 又设 G'' 是一个同胚于 G' 的 3-正则图(当然是连通的). 分别由引理 3 和 5, 我们有 $\epsilon(G'') = \epsilon(G')$, 以及 $\xi(G'') = \xi(G')$. 因为 $\epsilon(G'') \leq k - 1$, 对 G'' 运用归纳假设有 $\xi(G'') \leq \epsilon(G'')$. 利用上面得到的等式或不等式, 我们有

$$\xi(G) = \xi(G') + 1 = \xi(G'') + 1 \leq \epsilon(G'') + 1 = \epsilon(G') + 1 \leq k = \epsilon(G).$$

由归纳假设, 上面情况 1 和 2 保证了需要得到的不等式.

另外, 我们还须证明逆向不等式 $\epsilon(G) \leq \xi(G)$. 我们对 $\xi(G) = k$ 运用归纳法. 若 $k = 0$, 即 G 是严格上可嵌入的, 由引理 6(1), 不等式显然成立. 现假设 $k \geq 1$, 且不等式对于 $\xi(H) \leq k - 1$ 的 3-正则图 H 成立. 设 $\xi(G) = k$. 下证不等式对 G 也成立. 因为 $\xi(G) \geq 1$, 由 Betti 亏数定义存在 G 中的边 e 使得 $G \setminus e$ 是连通的, 而且 $\xi(G \setminus e) = \xi(G) - 1$. 同样地, 我们考虑两种情况.

情况 a e 是一条与某个点 u 关联的环边. 此时, 在图 $G \setminus e$ 中, u 的度是 1, 因此有 $\xi(G \setminus u) = \xi(G \setminus e) = \xi(G) - 1$. 设 G 与 u 相邻的另一个点是 v . 注意到在图 $G \setminus u$ 中, 除了点 v 的度是 2 外, 其余的点的度均是 3. 设 G' 是一个与 $G \setminus u$ 同胚的 3-正则图(注意到这里我们假定 $|V(G)| \geq 3$, 否则要证的不等式直接易验证). 分别由引理 3 和 5, 我们得到 $\xi(G') = \xi(G \setminus u) = \xi(G) - 1$, 以及 $\epsilon(G') = \epsilon(G \setminus u)$. 因此, 由归纳假设我们有 $\epsilon(G') \leq \xi(G')$. 现在将证明 $\epsilon(G) \leq \epsilon(G') + 1$. 设 L_u 是 $G \setminus u$ 的一条双向 2-重迹满足 $\epsilon(G \setminus u, L_u) = \epsilon(G \setminus u)$. 由引理 4, L_u 在度为 2 的点 v 处没有反射. 现在, 我们容易得到一条 G 的双向 2-重迹 L 使得 L 在 u 处恰好增加一个反射. 这说明

$$\epsilon(G) \leq \epsilon(G, L) = \epsilon(G \setminus u) + 1.$$

所以我们有

$$\epsilon(G) \leq \epsilon(G') + 1 \leq \xi(G') + 1 = \xi(G).$$

情况 b e 不是一条环边. 此时, 设 e 的两个端点为 u 和 $v (u \neq v)$. 注意到, 图 $G \setminus e$ 是连通的, 且仅有两个度为 2 的点 u 和 v . 设 G' 是与 $G \setminus e$ 同胚的 3-正则图. (象情况 a 一样, 同样我们假定 $|V(G)| \geq 3$.) 分别由引理 3 和 5, 我们有

$$\xi(G') = \xi(G \setminus e) = \xi(G) - 1, \quad \epsilon(G') = \epsilon(G \setminus e).$$

因此, 对 G' 运用归纳假设, 我们得到 $\epsilon(G') \leq \xi(G')$. 现设 L_e 是 G' 的一条双向 2-重迹满足 $\epsilon(G \setminus e, L_e) = \epsilon(G \setminus e)$. 由引理 4, L_e 在 u 点以及 v 点处均没有反射. 同样地, 我们易找到 G 的一条双向 2-重迹 L 满足 $\epsilon(G, L) \leq \epsilon(G \setminus e, L_e) + 1$. 因此, $\epsilon(G) \leq \epsilon(G \setminus e) + 1$. 由上面得到的不等式或等式, 我们有 $\epsilon(G) \leq \xi(G)$.

根据归纳假设, 以及上面情况 a 和 b, 不等式获证. 因此, 完成定理的证明. |

注 用我们的术语, Thomassen 在文献[10]中仅仅证明了对于满足 $\xi(G) = 0$ 的 3-正则图 G , 有 $\epsilon(G) = 0$. 从这个意义上讲, 我们的定理 1 推广了 Thomassen 的结果.

图 G 的一个独立集 $X \subseteq V(G)$ 是 G 的一个点子集使得 G 的点导出子图 $G[X]$ 没有边. G

的极大不可分离独立集 X 是满足如下条件的 G 的一个点子集: (1) X 是 G 的一个独立集; (2) $G \setminus X$ 是连通的, (3) 在满足条件(1)和(2)的前提下, $|X|$ 最大. 如果一个连通图 G 中任意两个圈是点不相交的, 则 G 称为仙人掌图^{[6], [8]}.

利用文献[4]中的结果, 我们将提供一个 $\epsilon(G) = k$ 的 3-正则图 G 的特征结构.

定理 2 设 G 是一个 3-正则图. 下列断言等价

$$(1) \epsilon(G) = k;$$

$$(2) \xi(G) = k;$$

$$(3) \gamma_M(G) = \frac{1}{2}(\beta(G) - k);$$

$$(4) \text{存在 } G \text{ 的一个极大不可分离独立集 } X \text{ 使得 } G \setminus X \text{ 是一个仙人掌图, 且 } |X| = \frac{\beta(G) - k}{2}.$$

证 由定理 1, “(1) \Leftrightarrow (2)”. 由引理 1(1), “(2) \Leftrightarrow (3)”. 由文献[4], “(2) \Leftrightarrow (4)”. |

对于反射数为 0 的 3-正则图 G , 下面推论给出了一个有趣的 G 的特征结构.

推论 1 设 G 是一个 3-正则图. 若 G 存在一条没有反射的双向 2-重迹, 则存在 G 的独立集 $X \subseteq V(G)$ 使得 $|X| = \frac{\beta(G)}{2}$ 且 $G \setminus X$ 是一棵树.

证 因为 $\epsilon(G) = 0$, 由定理 2, 我们只需证明仙人掌图 $G \setminus X$ 是一棵树, 即没有圈. 因为 $|V(G \setminus X)| = |V(G)| - \frac{\beta(G)}{2}$, 且 $|E(G \setminus X)| = |E(G)| - 3|X| = |E(G)| - \frac{3}{2}\beta(G)$, 所以

$$\begin{aligned} |V(G \setminus X)| - |E(G \setminus X)| &= (|V(G)| - \frac{\beta(G)}{2}) - (|E(G)| - \frac{3}{2}\beta(G)) \\ &= |V(G)| - |E(G)| + \beta(G) \\ &= 1. \end{aligned}$$

因此, $|E(G \setminus X)| = |V(G \setminus X)| - 1$, 这说明 $G \setminus X$ 是一棵树. 推论得证. |

参 考 文 献

- [1] Chen J, Archdeacon D, Gross J L. Maximum genus and connectivity. *Discrete Math*, 1996, **149**: 19–29
- [2] Chen J, Kanchi S P, Gross J L. A tight lower bound on the maximum genus of a simplicial graph. *Discrete Mathematics*, 1996, **156**: 83–102
- [3] Gross J L, Furst M L. Hierarchy of imbedding-distribution invariants of a graph. *J Graph Theory*, 1987, **11**(2): 205–220
- [4] Huang Y, Liu Y. Maximum genus and maximum nonseparating independent set of a 3-regular graph. *Discrete Math*, 1997, **176**: 149–158
- [5] Nebesky L. A new characterization of the maximum genus of graphs. *Czechoslovak Math J*, 1981, **31**: 604–613
- [6] Nordhaus E A, Ringeisen R D, Stewart B M. A kuratowski-type theorem for the maximum genus of a graph. *J Combin Theory*, 1972, **12B**: 206–267
- [7] Ore O. A problem regarding the tracing of graphs. *Elem Math*, 1951, **6**: 49–53
- [8] Ringeisen R D. Survey of results on the maximum genus of a graph. *J Graph Theory*, 1979, **3**: 1–13
- [9] Skoveria M. The maximum genus of graph of diameter II. *Discrete Math*, 1989, **87**: 175–180
- [10] Thomassen C. Bidirectional retracing-free double tracing and upper embeddability of graphs. *J Combin Theory*, 1990, **50B**: 198–207
- [11] Xoung N H. How to determine the maximum genus of a graph. *J Combin Theory*, 1979, **26B**: 217–225

Bidirectional Double Tracings and Maximum Genus

Huang Yuanqiu

(Department of mathematics, Normal University of Hunan, Changsha 410081)

Liu Yanpei

(Department of mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing 10044)

Chu Yuming

(Department of mathematics, Huzhou Normal College, Huzhou 313000)

Abstract: Let G be a connected graph and L be a bidirectional double tracing of G . The authors first introduce a new invariant of G , which is called the retracing number and denoted by $\epsilon(G)$. The definition of $\epsilon(G)$ is given as follows: $\epsilon(G) = \min_L \epsilon(G, L)$, where $\epsilon(G, L)$ is the number of retracings in L , and the minimum ranges over all bidirectional double tracings of G . Then, for a connected 3-regular graph G the authors prove that $\epsilon(G)$ is closely related to the maximum genus $\gamma_M(G)$ of G , namely $\epsilon(G)$, equals to the value $2\gamma_M(G) - \beta(G)$, where $\beta(G)$ is the rank number of G . Also the authors provide an instructional characterization on the graph G according to the value $\epsilon(G)$. Thus these may be viewed as some generalizations of Thomassen's results.

Key words: Bidirectional double tracing; Retracing number; Betti deficiency number; Upper embeddable; Maximum genus.

MR (2000) Subject Classification: 05C75