2004,**24A**(4):469－474

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

# 判定 $P_n(\Gamma)$的 Hilbert 基的一个充要条件*

岑燕明

(贵州民族学院数学系　贵阳 550025)

岑翼刚

(华中科学技术大学　武汉 430074)

**摘要:**设 $\Gamma$ 是一作用在 $\mathscr{R}^n$ 上的紧李群,$P_n(\Gamma)$是 $\Gamma$ 不变的多项式芽构成的环. Hilbert-Weyl 定理证明了对于 $P_n(\Gamma)$总存在一组由 $\Gamma$ 不变的齐次多项式芽组成的 Hilbert 基. 然而,如何从 $\Gamma$ 不变的齐次多项式芽中选出一组 Hilbert 基? 如何判定 $\Gamma$ 不变的齐次多项式芽的一个有限集就是 $P_n(\Gamma)$的一组 Hilbert 基? 该文借助于 Noether 环和不变积分的某些基本性质以及奇点理论的有关定理,证明了判定 $P_n(\Gamma)$的 Hilbert 基的一个充要条件. 这对某些 $P_n(\Gamma)$提供了计算一组 Hilbert 基的新途径.

**关键词:**紧李群;不变多项式芽环;Hilbert 基.

**MR(2000)主题分类:**58C　　**中图分类号:**O186.33　　**文献标识码:**A

**文章编号:**1003-3998(2004)04-469-06

## 1　预备和记号

用 $\varepsilon_n$ 和 $P_n$ 分别表示在 $O\in\mathscr{R}^n$ 的 $C^\infty$ 函数芽环和多项式芽环. 设 $\Gamma$ 是一紧李群,作用在 $\mathscr{R}^n$ 上,则它可等同于 $\mathscr{R}^n$ 到自身的正交群 $O(n)$的一个闭子群.

**定义 1**　称 $f:(\mathscr{R}^n,0)\to\mathscr{R}$ 为 $\Gamma$ 不变的,指 $f(\gamma\cdot x)=f(x),\forall\gamma\in\Gamma$.

$\Gamma$ 不变的 $C^\infty$ 函数芽和 $\Gamma$ 不变的多项式芽构成的环分别记为 $\varepsilon_n(\Gamma)$和 $P_n(\Gamma)$,则 $P_n(\Gamma)\subset\varepsilon_n(\Gamma)\subset\varepsilon_n$. 由 Hilbert-Weyl 定理和 Schwarz 定理知:每一 $P_n(\Gamma)$总存在由 $\Gamma$ 不变的齐次多项式芽构成的 Hilbert 基,且 $P_n(\Gamma)$的每一组 Hilbert 基满足 Schwarz 定理的要求. 反之,亦然([1] P.43－P.62).

实多项式芽环 $P_n$ 是一局部 Noether 环.

预备知识 1　环 $R$ 是 Noether 环,当且仅当 R 中的任一理想升链是稳定的([2] P.114,[3] P.453－456).

理想升链稳定指的是:如果 $I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots\subseteq I_n\subseteq\cdots$是环 $R$ 的一理想升链,则必存在 $n_0$,使得 $I_{n_0}=I_{n_0+1}=\cdots$.

预备知识 2　设 $\sigma:(\mathscr{R}^n,0)\to(\mathscr{R}^s,0)$是一 $C^\infty$ 映射芽,则下述条件等价

(1) $\forall f\in\varepsilon_n$,存在 $\alpha_i\in\varepsilon_s$ 和 $e_i\in\varepsilon_n(i=1,2,\cdots,k)$使得 $f=\sum\limits_{i=1}^{k}(\sigma^*\alpha_i)e_i$.

收稿日期:2001-07-05;修订日期:2003-04-21

* 基金项目:国家自然科学基金(10261002)和贵州省科学技术基金资助

(2) $\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}+\mathscr{R}\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}=\varepsilon_n$. $\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}$ 表示 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s$ 在 $\varepsilon_n$ 中生成的理想([4] P.60).

设 $\hat{\varepsilon}_n$ 表示 $n$ 个变元的形式幂级数环.

**定义 2** $j^\infty:\varepsilon_n\to\hat{\varepsilon}_n$, $f\to j^\infty f$, $\forall f\in\varepsilon_n$. $j^\infty f$ 等同于芽 $f$ 在 $O\in R^n$ 的泰乐级数(不一定收敛). $j^\infty f$ 简记为 $jf$,映射 $j$ 是从 $C^\infty$ 函数芽环 $\varepsilon_n$ 到形式幂级数环 $\hat{\varepsilon}_n$ 的一个代数同态: $\forall f,g\in\varepsilon_n$, $j(f+g)=jf+jg$, $j(f\cdot g)=(jf)\cdot(jg)$([4] P.34, 4.11).

## 2 若干引理

**引理 1** 设 $f\in\varepsilon_n$ 且紧李群 $\Gamma$ 作用在 $\mathscr{R}^n$ 上,则 $\bar{f}(x)=\int_\Gamma f(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma$ 是 $\Gamma$ 不变的. 这里,积分 $\int_\Gamma f(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma$ 表示在 $\Gamma$ 上的 Haar 积分.

**证** 由 Haar 积分的平移不变性直接推出. ▌

**引理 2** 设 $\Gamma$ 是一作用在 $\mathscr{R}^n$ 上的紧李群. $e(x)$ 是任一 $k$ 次单项式芽,则 $\bar{e}(x)=\int_\Gamma f(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma$ 是 $\Gamma$ 不变的 $k$ 次齐次多项式芽或零.

**证** 设 $\rho(\gamma)=(\rho_{ij}(\gamma))_{n\times n}$ 是 $\Gamma$ 作用在 $\mathscr{R}^n$ 上的非平凡的正交表示. 由 $\gamma\cdot x=(\rho_{ij}(\gamma))_{n\times n}\cdot x$ 知其第 $i$ 个分量 $(\gamma\cdot x)_i=\sum\limits_{j=1}^n\rho_{ij}(\gamma)x_j$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的齐次线性函数. 所以 $e(\gamma\cdot x)$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $k$ 次齐次多项式芽,其每一项的系数是某些 $\rho_{ij}(\gamma)$ 的幂的乘积. 因此 $\int_\Gamma e(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma$ 分项积分后仅仅是对 $e(\gamma\cdot x)$ 的各项系数进行积分. 故 $\bar{e}(x)=\int_\Gamma e(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma$ 仍是一 $k$ 次齐次多项式芽或零. 其 $\Gamma$ 不变性由引理 1 直接推出. ▌

**引理 3** 设 $\Gamma$ 是一作用在 $\mathscr{R}^n$ 上的紧李群. $e_1(x),e_2(x),\cdots,e_m(x)$ 是 $k$ 次齐次多项式芽构成的实向量空间 $P_n^k$ 中系数为 1 且使 $\int_\Gamma e_i(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma\neq0$ 的单项式芽全体. 则任一 $\Gamma$ 不变的 $k$ 次齐次多项式芽可表为 $\bar{e}_i(x)=\int_\Gamma e_i(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 的线性组合.

**证** 设 $\{e_i(x)\}_{i=1}^q$ 是系数为 1 的 $k$ 次单项式芽的全体,它是 $P_n^k$ 的一组基. 今设 $f(x)$ 是任一 $\Gamma$ 不变的 $k$ 次齐次多项式芽,显然 $f\in P_n^k$. 所以

$$f(x)=\sum_{i=1}^m C_ie_i(x)+\sum_{i=m+1}^q d_ie_i(x).$$

由已知并利用 Haar 积分的性质有

$$f(x)=f(\gamma\cdot x)=\int_\Gamma f(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma=\sum_{i=1}^m C_i\int_\Gamma e_i(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma=\sum_{i=1}^m C_i\bar{e}_i(x).$$ ▌

**引理 4** 设 $\Gamma$ 是一作用在 $\mathscr{R}^n$ 上的紧李群,又 $\sigma_1(x),\sigma_2(x),\cdots,\sigma_s(x)$ 均为 $\Gamma$ 不变的非零次齐次多项式芽,$\Phi(x)$ 是任一 $\Gamma$ 不变齐次多项式芽且 $\Phi\in\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}$. 则必存在多项式芽 $P(u)=P(u_1,u_2,\cdots,u_s)$ 使得 $\Phi(x)=P(\sigma_1(x),\sigma_2(x),\cdots,\sigma_s(x))=P(\sigma(x))$.

**证** 因 $\Phi\in\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}$,所以存在 $f_i\in\varepsilon_n(i=1,2,\cdots,s)$ 使得

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^s f_i(x)\cdot\sigma_i(x).$$

利用定义 2 中映射 $j:\varepsilon_n \to \hat{\varepsilon}_n$ 的性质有

$$j\Phi(x) = j(\sum_{i=1}^{s} f_i(x) \cdot \sigma_i(x)) = \sum_{i=1}^{s} (jf_i(x)) \cdot (j\sigma_i(x)).$$

注意到 $\Phi(x)$和 $\sigma_i(x)$都是多项式芽,故

$$j\Phi(x) = \Phi(x),\ j\sigma_i(x) = \sigma_i(x) \quad (i = 1,2,\cdots,s).$$

所以

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{s} (jf_i(x)) \cdot \sigma_i(x).$$

由于上述等式是形式幂级数环中的一个恒等式,又 $\Phi(x)$是一齐次多项式芽,设 $\Phi(x)$的次数 $\deg\Phi=p$,则右边的和中一切$(jf_i(x))\cdot\sigma_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,s)$的 $p$ 次齐次部分之和应刚好等于 $\Phi(x)$,而次数$<p$ 和次数$>p$ 的各项之和应为 0. 再注意到 $\sigma_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,s)$均为次数$\geqslant 1$ 的齐次多项式芽,设 $\deg\sigma_i=r_i$,若 $p-r_i\geqslant 0$,取 $\phi_i(x)$为 $jf_i(x)$的$(p-r_i)$次的齐次部分(即 $jf_i(x)$中所有$(p-r_i)$次项的和);若$(p-r_i)<0$,则取 $\phi_i(x)=0$,则每一 $\phi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,s)$都是齐次多项式芽且可保证等式 $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{s}\phi_i(x)\cdot\sigma_i(x)$ 仍成立(实际上,$\phi_i(x)\cdot\sigma_i(x)$是$(jf_i(x))\cdot\sigma_i(x)$的 $p$ 次齐次部分!).

上式两边同时在 $\Gamma$ 上进行 Haar 积分有

$$\Phi(x) = \Phi(\gamma\cdot x) = \int_\Gamma \Phi(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma = \sum_{i=1}^{s}(\int_\Gamma \phi_i(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma)\cdot\sigma_i(x) = \sum_{i=1}^{s}\bar{\phi}_i(x)\cdot\sigma_i(x).$$

由引理 2 和引理 3,$\bar{\phi}_i(x)$只能是 $\Gamma$ 不变的$(p-r_i)$次齐次多项式芽或 0.

今对 $\Phi(x)$的次数进行归纳证明:任意次数的 $\Gamma$ 不变齐次多项式芽 $\Phi(x)$,只要 $\Phi\in\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}$,都存在多项式芽 $P(u)$使得 $\Phi(x)=P(\sigma(x))$.

当 $\deg\Phi=0$ 时,由 $\Phi\in\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}$,必有 $\Phi(x)=0$. 结论显然成立.

设 $\deg\Phi\leqslant p$ 时,结论成立,则当 $\deg\Phi=p+1$ 时,由前述论证知存在 $\Gamma$ 不变的$(p-r_i+1)$次的齐次多项式芽 $\bar{\phi}_i(x)$或 0 $(i=1,2,\cdots,s)$使得 $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{s}\bar{\phi}_i(x)\sigma_i(x)$.

不妨设 $\bar{\phi}_i(x)$都不为零. 因 $r_i\geqslant 1$ $(i=1,2,\cdots,s)$,所以 $\deg\bar{\phi}_i=p-r_i+1\leqslant p$. 由归纳假设,知存在多项式芽 $P_i(u)$使得 $\bar{\phi}_i(x)=p_i(\sigma(x))$. 取多项式芽 $P(u) = \sum_{i=1}^{s}p_i(u)\cdot u_i$,则 $P(\sigma(x)) = \Phi(x)$. ▌

## 3 主要结果

今设 $\Gamma$ 是一作用在 $\mathscr{R}^n$ 上的紧李群,$P_n^1,P_n^2,\cdots,P_n^k,\cdots$分别为 $n$ 个变量次数为 $1,2,\cdots,k,\cdots$的齐次多项式芽构成的实向量空间,而在 $P_n^1,P_n^2,\cdots,P_n^k,\cdots$中,系数为 1 且其在 $\Gamma$ 上的 Haar 积分不为零的单项式芽为 $e_i^{(k)}(x)$ $(i=1,2,\cdots,m_k,k=1,2,\cdots)$. 记 $\bar{e}_i^{(k)}(x) = \int_\Gamma e_i^{(k)}(\gamma x)\mathrm{d}\gamma$. 我们有如下表

$$\begin{array}{cccc} \bar{e}_1^{(1)}(x) & \bar{e}_2^{(1)}(x) & \cdots & \bar{e}_{m_1}^{(1)}(x) \\ \bar{e}_1^{(2)}(x) & \bar{e}_2^{(2)}(x) & \cdots & \bar{e}_{m_2}^{(2)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{e}_1^{(k)}(x) & \bar{e}_2^{(k)}(x) & \cdots & \bar{e}_{m_k}^{(k)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}.$$

**定理 1** 从表的元素中,必可选出有限个元素构成 $P_n(\Gamma)$ 的一组 Hilbert 基.

**证** (1) 考虑实多项式芽环中的理想:$I_1=\langle \bar{e}_1^{(1)}(x)\rangle_{P_n}$, $I_2=\langle \bar{e}_1^{(1)}(x), \bar{e}_2^{(1)}(x)\rangle_{P_n}$, $I_3=\langle \bar{e}_1^{(1)}(x), \bar{e}_2^{(1)}(x), \bar{e}_3^{(1)}(x)\rangle_{P_n}$, $\cdots$. 即顺次将表的元素作为生成元补充到前一理想中去而得到后一理想,从而得到实多项式芽环中的理想升链

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots.$$

由预备知识 1 知:该理想升链必是稳定的,即存在这样的自然数 $S$ 使得 $I_s=I_{s+1}=\cdots$. 并设 $S$ 是使上式成立的最小自然数.

(2) 记 $I_s=\langle \sigma_1(x), \sigma_2(x), \cdots, \sigma_s(x)\rangle_{P_n}$ 且不妨设 $I_s$ 的生成元中没有"多余累赘"的元素,则可判定 $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \cdots, \sigma_s(x)$ 就是 $P_n(\Gamma)$ 的一组 Hilbert 基.

事实上,由于 $\Gamma$ 在 $\mathscr{R}^n$ 上的作用是线性的,所以一多项式芽 $\Gamma$ 不变的充要条件是其任何齐次部分为 $\Gamma$ 不变的. 为证 $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \cdots, \sigma_s(x)$ 为 $P_n(\Gamma)$ 的一组 Hilbert 基,只需证明任一 $\Gamma$ 不变的非零次齐次多项式芽 $f(x)$,都存在多项式芽 $P(u)=P(u_1, u_2, \cdots, u_s)$ 使得 $f(x)=P(\sigma(x))$.

设 $f(x)$ 是任一 $\Gamma$ 不变的 $k$ 次齐次多项式芽($k=1,2,\cdots$). 由引理 3 知 $f(x)$ 可表为 $\bar{e}_1^{(k)}(x), \cdots, \bar{e}_{m_k}^{(k)}(x)$ 的线性组合. 又由本定理的(1)知表中的任何元素都属于理想 $\langle \sigma_1(x), \sigma_2(x), \cdots, \sigma_s(x)\rangle_{P_n}$. 从而 $f\in \langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s\rangle_{P_n} \subseteq \langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}$. 再由引理 4 知存在多项式芽 $P(u_1, u_2, \cdots, u_s)=P(u)$ 使得 $f(x)=P(\sigma(x))$. ▌

本定理虽属 $P_n(\Gamma)$ 的一组 Hilbert 基的存在性证明,但与通常文献中的证明相比较,有其明显的优点:(1)大大缩小了寻找 $P_n(\Gamma)$ 的一组 Hilbert 基的范围;(2)指明了寻找 Hilbert 基的具体途径和具体的形式.

**推论 1** $\Gamma$ 不变的齐次多项式芽 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ 是 $P_n(\Gamma)$ 的一组 Hilbert 基的充要条件是表中的任一元素都属于 $\langle W_1, W_2, \cdots, W_s\rangle_{P_n}$ 且该理想中无"多余累赘"的生成元.

**证** 由 $\langle W_1, W_2, \cdots, W_s\rangle_{P_n}=\langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s\rangle_{P_n}$ 及定理 1 的证明直接推出. ▌

**定理 2** 设 $\Gamma$ 是一作用在 $\mathscr{R}^n$ 上的紧李群, $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \cdots, \sigma_s(x)$ 是一组 $\Gamma$ 不变的非零次齐次多项式芽. 理想 $\langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}$ 无"多余累赘"的生成元且在 $\varepsilon_n$ 中余维有限.

$\langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}+R\{1, e_1, \cdots, e_k\}=\varepsilon_n$. 又 $e_i(i=1,2,\cdots,k)$ 均为非 $\Gamma$ 不变的正次数的单项式芽,则 $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \cdots, \sigma_s(x)$ 是 $P_n(\Gamma)$ 的一组 Hilbert 基的充要条件是

$$\bar{e}_i(x)=\int_\Gamma e_i(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma \in \langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s\rangle_{\varepsilon_n} \quad (i=1,2,\cdots,k).$$

**证** (1) 必要性. 由引理 2, $\bar{e}_i(x)=\int_\Gamma e_i(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma$ 或为与 $e_i(x)$ 同次数的 $\Gamma$ 不变齐次多项式芽或为 0. 若 $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \cdots, \sigma_s(x)$ 为 $P_n(\Gamma)$ 的一组 Hilbert 基,则由 Hilbert-Weyl 定理知存在多项式芽 $P(u)=P(u_1, u_2, \cdots, u_s)$(或 0)使 $\bar{e}_i(x)=P(\sigma(x))$. 这等价于

$$\bar{e}_i(x)=\sum_{j=1}^{s} p_j(\sigma(x))\cdot \sigma_j(x) \in \langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}.$$

其中 $p_j(j=1,2,\cdots,s)$ 为多项式芽.

(2) 充分性. 若 $\bar{e}_i(x)\in\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}$,由引理 4 知存在多项式芽 $p_i(u)$ 使得 $\bar{e}_i(x)=p_i(\sigma(x))$. 又因 $\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}+R\{1,e_1,\cdots,e_k\}=\varepsilon_n$. 由 Malgrange 预备定理知 $\forall f\in\varepsilon_n(\Gamma)\subset\varepsilon_n$,存在 $\alpha_j\in\varepsilon_s(j=0,1,\cdots,k)$ 使得

$$f(x)=\alpha_0(\sigma(x))+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(\sigma(x))\cdot e_j(x).$$

上式两端在 $\Gamma$ 上进行 Haar 积分有

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_\Gamma f(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma=\alpha_0(\sigma(x))+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(\sigma(x))\left(\int_\Gamma e_j(\gamma\cdot x)\mathrm{d}\gamma\right)\\&=\alpha_0(\sigma(x))+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(\sigma(x))\cdot p_j(\sigma(x)).\end{aligned}$$

记

$$\Phi(u)=\alpha_0(u)+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(u)p_j(u)\in\varepsilon_s,$$

则 $f(x)=\Phi(\sigma(x))$. 即 $\sigma_1(x),\sigma_2(x),\cdots,\sigma_s(x)$ 满足 Schwarz 定理的要求. 故 $\sigma_1(x),\sigma_2(x),\cdots,\sigma_s(x)$ 为 $P_n(\Gamma)$ 的一组 Hilbert 基. 此论断的证明如下

设 $v$ 是任何一个次数为 $m$ 的 $\Gamma$ 不变的多项式芽,则 $v=v_0+v_1+\cdots+v_m$. 这里 $v_j$ 是次数为 $j$ 的一个 $\Gamma$ 不变的齐次多项式芽($j=0,1,\cdots,m$). 为了验证存在多项式芽 $P(u_1,u_2,\cdots,u_s)\in\varepsilon_s$ 使得 $v(x)=P(\sigma_1(x),\sigma_2(x),\cdots,\sigma_s(x))=P(\sigma(x))$,只需验证每一 $v_j(x)$,存在多项式芽 $P_j(u_1,u_2,\cdots,u_s)$ 使得 $v_j(x)=P_j(\sigma(x))$([1] P. 55,命题 6.3 的证明).

今假定正次数的、$\Gamma$ 不变的齐次多项式芽 $\sigma_1(x),\sigma_2(x),\cdots,\sigma_s(x)$ 满足 Schwarz 定理的要求:$\forall f\in\varepsilon_n(\Gamma)$,存在 $\Phi(u)\in\varepsilon_s$ 使得 $f(x)=\Phi(\sigma(x))$. 则对每一 $v_j(x)\in P_n(\Gamma)\subseteq\varepsilon_n(\Gamma)$,存在 $\Phi_j(u)\in\varepsilon_s$ 使得 $v_j(x)=\Phi_j(\sigma(x))$.

显然,当 $j=0$ 时,$v_0(x)=C$—常数,只需取 $\Phi_0(u)=C$ 即可.

当 $j\geqslant 1$ 时,若 $v_j(x)=\Phi_j(\sigma(x))$,$\Phi_j\in\varepsilon_s$. 注意到 $v_j(x)$ 是 $\Gamma$ 不变的 $j$ 次齐次多项式芽,$\sigma_1(x),\sigma_2(x),\cdots,\sigma_s(x)$ 都是次数 $\geqslant 1$ 的 $\Gamma$ 不变的齐次多项式芽,所以 $v_j(0)=0$. 从而 $\Phi_j(0)=0$,即 $\Phi_j(u)\in m_s=\langle u_1,u_2,\cdots,u_s\rangle_{\varepsilon_s}$($m_s$ 为 $\varepsilon_s$ 中唯一的极大理想). 故存在

$$h_i(u)\in\varepsilon_s\quad(i=1,2,\cdots,s),$$

使得

$$\Phi_j(u)=\sum_{i=1}^{s}h_i(u)u_i.$$

所以

$$\Phi_j(\sigma(x))=\sum_{i=1}^{s}h_i(\sigma(x))\sigma_i(x).$$

显然, $h_i(\sigma(x))$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 都是 $\Gamma$ 不变的.

即

$$\Phi_j(\sigma(x))\in\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n(\Gamma)}\subseteq\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}.$$

由 $v_j(x)=\Phi_j(\sigma(x))$ 知 $v_j(x)\in\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}$. 由引理 4 知,存在多项式芽 $P_j(u)$ 使得 $v_j(x)=P_j(\sigma(x))$. ▌

**注**　对于 $\varepsilon_n$ 中余维有限的理想必可找到一组单项式芽(可包括零次单项式)构成其补空间的一组基. 若这些单项式中有 $\Gamma$ 不变的非零次单项式芽,则可将它们作为生成元补充到原来的理想中,用得到的理想代替原来的 $\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\rangle_{\varepsilon_n}$,则 $\varepsilon_n$ 必有定理 2 的分解形式和

对 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 为非 $\Gamma$ 不变的单项式芽相应的假设.

在有关文献中，求 $P_n(\Gamma)$ 的 Hilbert 基采用的是幂级数展开法([1] P. 43－48, [5] P. 128－131). 但当函数的自变量个数≥3 时，常常难以实施. 由本文定理 1 和定理 2，则可导出 $P_n(\Gamma)$ 一组 Hilbert 基的一种计算方法，作为原来方法的补充. 特别，对有限群，由于 $\bar{e}_i(x) = \int_\Gamma e_i(\gamma x)\mathrm{d}\gamma = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} e_i(\gamma x)$ 容易计算，比较奏效，于此，不再举例赘述.

## 参 考 文 献


[1] Golubitsky M, Stewart I N, Schaeffer D G. Singularities and groups in bifurcation theory. Appl Math Sci, 1991, **11**(69)

[2] 冯克勤. 交换代数基础. 北京：高等教育出版社，1986

[3] B. L. 范德瓦尔登著，曹锡华，曾肯成，郝炳新译. 代数学 II. 北京：科学出版社，1978

[4] Brocker T H. Differentiable Germs And Catastrophes. London Mathematical Society Lecture Note Series 17, London, New York, Melbourne: Cambridge University Press, 1975

[5] 唐云. 对称性分岔理论基础. 北京：科学出版社，1998


# A Necessary and Sufficient Condition for Determining a Hilbert Basis of $P_n(\Gamma)$


Cen Yanming

(*Department of Mathematics, Guizhou University for Ethnic Minorities, Guiyang* 550025)

Cen Yigang

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)



**Abstract**: Let $\Gamma$ be a compact Lie group acting on $\mathscr{R}^n$ and $P_n(\Gamma)$ the ring of $\Gamma$ invariant polynomial germs under $\Gamma$. Hilbert-Weyl theorem shows that there is a Hilbert basis consisting of $\Gamma$ invariant homogeneous polynomial germs for $P_n(\Gamma)$. However, it is not clear, how to choose a Hilbert basis from $\Gamma$ invariant homogeneous polynomial germs and how to determine that a finite set of $\Gamma$ invariant homogeneous polynomial germs is a Hilbert basis of $P_n(\Gamma)$. In this paper, by means of some fundamental properties of Noether's ring and invariant integration as well as the relevant theorems in the theory of singularities, a necessary and sufficient condition is proved for determining a Hilbert basis of $P_n(\Gamma)$. This will provide a new way to determine of a Hilbert basis for some $P_n(\Gamma)$.



**Key words**: Compact Lie group; Ring of invariant polynomial germs; Hilbert basis.

**MR(2000) Subject Classification**: 58C