2004,**24A**(5):513－520

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

黑洞的量子统计熵*

赵仁　张丽春
（雁北师范学院物理系　大同 037000）

摘要：避开求解各种粒子波动方程的困难，直接应用量子统计的方法，计算各种坐标描述的黑洞背景下玻色场与费米场的配分函数，得到黑洞熵的积分表达式．然后应用改进的 *brick-wall* 方法-膜模型，计算黑洞的统计熵．在所得结果中取适当的参数，可得到黑洞熵与视界面积成正比的关系，不存在原 *brick-wall* 方法中的舍去项与对数发散项．整个计算过程，物理图像清楚，计算简单，为研究各种坐标下黑洞熵提供了一条简捷的新途经.

关键词：量子统计；黑洞的统计熵；膜模型.

MR(2000)主题分类：83C57　**中图分类号：**O412.1　**文献标识码：**A

文章编号：1003-3998(2004)05-513-08

1　引言

黑洞熵是理论物理研究的重要课题，因为熵具有统计意义．因而对黑洞熵的理解涉及到对黑洞微观本质的认识．自从 Bekenstein 和 Hawking 提出黑洞熵与其视界面积成正比以来[1−3]，人们就一直致力于探求黑洞熵的统计起源，因而各种求熵的方法应用而生[4−9]．其中用的最多的方法是 G't Hooft 提出的 brick-wall 方法[7]．人们用此方法研究了各种球坐标系下，渐近平直时空中自由标量场和 Dirac 场的统计性质[10−15]，发现黑洞熵的一般表达式是与黑洞视界面积成正比项，加上不与视界成积成正比且对数发散项.

然而，使人疑惑不解的是：1)黑洞视界外的标量场或 Dirac 场为什么就是黑洞的熵；2)态密度在视界附近发散问题；3)舍去对数项和把 L^3 项解释成远离围绕系统的真空的贡献；4)对标量场或 Dirac 场波函数近似求解问题．以上问题都是原 brick-wall 方法中不尽人意的地方，而又无法克服的问题.

本文直接运用量子统计的方法[16]，计算各种坐标描述的黑洞背景下玻色场和费米场的配分函数，得到系统熵的积分表达式．然后运用膜模型[16,17]计算熵，所得结果不存在舍去项问题，也不存在态密度在视界附近发散问题．并且在结果中将辐射粒子的自旋简并度也同时考虑进去了．整个计算过程，物理图像清楚，计算简单，结果合理，为研究各种坐标下黑洞熵提供了一条简捷的新途径．文中我们取温度的简单函数形式

$$C=\hbar=G=K_B=1.$$

收稿日期：2002-02-01；修订日期：2003-03-17
E-mail：zhao2969@sina.com
* 基金项目：山西省自然科学基金(20001009)资助

2 Schwarzschild 时空中黑洞的统计熵

2.1 玻色场的熵

Schwarzschild 时空线元

$$\mathrm{d}S^2 = -(1-\frac{2M}{r})\mathrm{d}t^2 + (1-\frac{2M}{r})^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2.$$

根据广义相对论理论,静止于无穷远的观测者看到的,来自恒星表面粒子的频率移动

$$v = v_0(1-\frac{2M}{r})^{1/2}. \tag{2.1}$$

其中 v_0 为恒星表面处原子的固有频率. v 为无穷远静止观测者测得的该粒子的固有频率.

无穷远静止观测者,测得的固有辐射温度[18]

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{f}}, \tag{2.2}$$

式中 $T_0=\frac{1}{8\pi M}=\beta_0$ 是平衡温度,$\sqrt{f}=\sqrt{1-\frac{2M}{r}}$是红移因子.

我们求配分函数 Z,对玻色气体

$$\ln Z = -\sum_i g_i \ln(1-\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}), \tag{2.3}$$

在单位体积内,能量在 ε 到 $\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 或 v 到 $v+\mathrm{d}v$ 间隔内,粒子的量子态数应为

$$g(v)\mathrm{d}v = j4\pi v^2\mathrm{d}v, \tag{2.4}$$

式中 j 为粒子的自旋简并度,v 由(2.1)式给出. 对 Schwarzschild 时空,任意 r 点的二维曲面面积为 $4\pi r^2$,则在黑洞视界附近,任意厚度球壳内的系统的配分函数为

$$\ln Z = \sum_i g_i \sum_{n=1} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_i} = j16\pi^2 \sum_{n=1}\frac{1}{n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{nhv}{T}} v^2\mathrm{d}v \int r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f}} = j\frac{2}{45}\pi^3\int\frac{r^2}{\beta^3}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f}}, \tag{2.5}$$

其中$\frac{1}{\beta}=T$,利用熵与配分函数的关系

$$S_b = \ln Z - \beta_0\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta_0}, \tag{2.6}$$

可得

$$S_b = j\frac{8}{45}\pi^3\frac{1}{\beta_0^3}\int\frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}, \tag{2.7}$$

式中 $\beta_0=\frac{1}{T_0}=8\pi M$, $\beta=\beta_0\sqrt{f}$. (2.7)式我们取积分区间$[r_+ +\zeta, r_+ + N\zeta]$,式中 $r_+=2M$ 为黑洞的视界位置,ζ 为一非负的小量,N 为大于 1 的常数. 则(2.7)式可写为

$$S_b = j\frac{8}{45}\pi^3\frac{1}{\beta_0^3}\int_{r_+ +\zeta}^{r_+ +N\zeta}\frac{r^4\mathrm{d}r}{(r-2M)^2} = j\frac{8}{45}\pi^3\frac{r_+^4}{\beta_0^3}[\frac{N-1}{N\zeta}] + f(\zeta,N). \tag{2.8}$$

式中

$$\begin{aligned} f(\zeta,N) &= j\frac{8}{45}\pi^3\frac{1}{\beta_0^3}\int_{r_+ +\zeta}^{r_+ +N\zeta}[\frac{4r_+^3}{r-2M} + 6r_+^2 + 4r_+(r-2M) + (r-2M)^2]\mathrm{d}r \\ &= j\frac{8}{45}\pi^3\frac{1}{\beta_0^3}[4r_+^3\ln N + 6r_+^2\zeta(N-1) + 2r_+\zeta^2(N^2-1) + \frac{1}{3}\zeta^3(N^3-1)]. \end{aligned}$$

由文献[7]中的(3.17)式知,当 $N\zeta=L\gg r_+$(即 $N\gg 1$)时,如取 $\zeta=\frac{T_0}{90}$作为紫外截断,可得到

黑洞熵的主要部分与视界面积成正比的关系，这是 G't Hooft brick-wall 的结果.

现在采用膜模型来讨论.（2.8）式中 N 与 ζ 是两个独立的参数，我们不令 $N\gg 1$，而只令 N 稍大于 1. 则(2.8)式中对 r 的积分只在一个厚度为$(N-1)\zeta$的膜中进行. 我们取

$$\zeta = \frac{T_0}{90}\frac{N-1}{N}, \tag{2.9}$$

则黑洞熵可表为

$$S_b = j\pi r_+^2 + f(\zeta, N) = j\frac{A}{4} + f(\zeta, N), \tag{2.10}$$

式中 $A=4\pi r_+^2$ 为黑洞的视界面积. 当 $N\to 1$ 时，$\zeta\to 0$，$N\zeta\to 0$，即所取积分上限和下限都趋于黑洞的视界上，膜的厚度变为零，且紧贴在视界面上. 换句话说，在 $N\to 1$ 的极限下，膜的极限就是视界面. 而且此时$\lim\limits_{N\to 1} f(\zeta, N)\to 0$，所以黑洞的熵为

$$S = j\frac{A}{4}. \tag{2.11}$$

由于我们在计算中把积分上限和下限都趋于黑洞的视界上，故(2.11)式所给出的黑洞熵与视界外的辐射场无关，而只是视界作为三维空间里的一个二维膜所具有的性质，所得熵为此二维膜具有的特性. 由于黑洞熵的有无直接与视界的存在与否有关[19]，则我们所得熵(2.11)式应为黑洞熵. 当 $j=1$ 时，得黑洞熵为视界面积的四分之一. 当 $j\neq 1$ 时，可把 j 吸收到(2.9)式所示的参数 N 与 ζ 的关系式中，从而保证黑洞熵恰为视界面积的四分之一.

2.2 费米场的熵

对于费米气体巨配分函数

$$\ln Z = \sum_i g_i \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon_i}). \tag{2.12}$$

由(2.4)式，可得

$$\begin{aligned}\ln Z &= \sum_i g_i \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-\beta\varepsilon n} = i16\pi^2 \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^\infty e^{-\frac{nhv}{T}} v^2 dv \int r^2 \frac{dr}{\sqrt{f}} \\ &= i\frac{2}{45}\pi^3 \frac{7}{8}\int \frac{r^2 dr}{\beta\sqrt{f}}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

利用(2.5)式的计算结果，可得 Schwarzschild 时空中费米场的熵

$$S = i\frac{7}{8}\frac{A}{4}. \tag{2.14}$$

式中 i 为辐射费米子的自旋简并度. 当 $i=1$ 时，与文献[20]计算结果一致. 事实上(2.14)式中$\frac{7}{8}i$ 的因子也可以吸收到关系式(2.9)中.

3 平面对称时空

平面对称的时空线元[21]

$$\begin{aligned}dS^2 =& -(\alpha^2 r^2 - \frac{4\pi M}{\alpha^2 r} + \frac{(2\pi Q)^2}{\alpha^4 r^2})dt^2 + (\alpha^2 r^2 - \frac{4\pi M}{\alpha^2 r} + \frac{(2\pi Q)^2}{\alpha^4 r^2})^{-1} dr^2 \\ &+ \alpha^2 r^2 (dx^2 + dy^2),\end{aligned} \tag{3.1}$$

式中 M 和 Q 是 xoy 平面，单位面积黑洞的质量和电荷. 当 $Q^2 \leqslant \frac{3\alpha^6}{4\pi^2}(\frac{\pi M}{\alpha^4})^{4/3}$ 时，方程 $\alpha^2 r^2 -$

$\frac{4\pi M}{\alpha^2 r}+\frac{(2\pi Q)^2}{\alpha^4 r^2}=0$,有四个根,两正实根

$$r_{\pm}=\frac{1}{2}[\sqrt{2R}+\frac{8\pi M}{\alpha^4\sqrt{2R}})] \tag{3.2}$$

和两虚根 r_3 和 r_4,式中

$$R=\left\{\frac{\pi^2 M^2}{\alpha^8}+[(\frac{\pi^2 M^2}{\alpha^8})^2-(\frac{4\pi^2 Q^2}{3\alpha^6})^3]^{1/2}\right\}^{1/3}+\left\{\frac{\pi^2 M^2}{\alpha^8}-[(\frac{\pi^2 M^2}{\alpha^8})^2-(\frac{4\pi^2 Q^2}{3\alpha^6})^3]^{1/2}\right\}^{1/3},$$

黑面的内外视界分别为 r_0 和 r_+.

黑平面的 Hawking 辐射温度是

$$T_H=\frac{\kappa}{2\pi}, \tag{3.3}$$

式中 $\kappa=\frac{\alpha^2(r_+-r_-)(r_+-r_3)(r_+-r_4)}{2r_+^2}=\alpha^2 r_++\frac{2\pi M}{\alpha^2 r_+^2}-\frac{(2\pi Q)^2}{\alpha^4 r_+^3}$,是黑平面的表面重力.

在黑平面的外视界上,对应 xoy 平面为单位面积的黑平面视界面积为

$$A=\alpha^2 r_+^2. \tag{3.4}$$

按照文献[18]的观点,无穷远静止观测者,测得的固有辐射温度为

$$T=\frac{T_H}{\chi}, \tag{3.5}$$

式中 $\chi=\sqrt{\alpha^2 r^2-\frac{4\pi M}{\alpha^2 r}+\frac{(2\pi Q)^2}{\alpha^4 r^2}}$,是红移因子.

3.1 玻色场熵

对于玻色气体,系统的配分函数为

$$\ln Z=-\sum_i g_i\ln(1-e^{-\beta\varepsilon_i}). \tag{3.6}$$

在单位体积内,能量在 ε 到 $\varepsilon+d\varepsilon$ 或 v 到 $v+dv$ 间隔内,粒子的量子态数应为

$$g(v)dv=j4\pi v^2 dv, \tag{3.7}$$

式中 j 为粒子的自旋简并度. 由于时空(3.1)中在 r 轴方向任意点,对应 xoy 平面为单位面积的超曲面面积为 $\alpha^2 r^2$,则对应黑平面视界外附近,任意 r 高度内,系统的配分函数为

$$\ln Z=\sum_i g_i\sum_{n=1}\frac{1}{n}e^{-n\beta\varepsilon_i}=j4\pi\sum_{n=1}\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-\frac{nhv}{T}}v^2 dv\int\alpha^2 r^2\frac{dr}{\chi}=j\frac{\pi^2}{90}\int\alpha^2 r^2\frac{dr}{\beta^3\chi}, \tag{3.8}$$

其中 $\frac{1}{\beta}=T$,利用熵与配分函数的关系

$$S=\ln Z-\beta_0\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta_0}. \tag{3.9}$$

可得

$$S_b=j\frac{2\pi^2}{45}\frac{1}{\beta_0^3}\int\alpha^2 r^2\frac{dr}{\chi^4}. \tag{3.10}$$

式中 $\beta=\beta_0\chi$,$\beta_0=\frac{1}{T_H}$. 对(3.10)式,我们取积分区间$[z_++\zeta,z_++N\zeta]$,式中 ζ 为一负的小量,N 是大于 1 的常数. 则(3.10)式可写为

$$\begin{aligned}S_b&=j\frac{2\pi^2}{45}\frac{1}{\beta_0^3}\int_{r_++\zeta}^{r_++N\zeta}\frac{r^6 dr}{\alpha^2(r-r_+)^2(r-r_-)^2(r-r_3)^2(r-r_4)^2}\\&=j\frac{2\pi^2}{45}\frac{1}{\beta_0^3}\frac{r_+^6}{\alpha^2}\frac{1}{(r_+-r_-)^2(r-r_3)^2(r-r_4)^2}[\frac{N-1}{N\zeta}]+F(N,\zeta).\end{aligned} \tag{3.11}$$

我们取

$$\zeta = \frac{T_H}{90}\frac{N-1}{N}. \tag{3.12}$$

则对应单位平面,黑平面的熵可表为

$$S_b = j\frac{1}{4}\alpha^2 r_+^2 + F(N,\zeta) = j\frac{1}{4}A + F(N,\zeta). \tag{3.13}$$

式中 $A=\alpha^2 r_+^2$,为对应单位 xoy 平面,黑平面的视界面积. 当 $N\to 1$ 时,$\zeta\to 0$,$N\zeta\to 0$,即所取积分上限和积分下限,都趋于黑平面的视界上,此时$\lim\limits_{N\to 1}F(N,\zeta)\to 0$,则对应单位 xoy 平面,黑平面的熵为

$$S_b = \frac{j}{4}A. \tag{3.14}$$

由于我们在计算中把积分上限和下限都趋于黑平面的外视界上,故(3.14)式中所得到的熵与视界外的辐射场无关,为单位 xoy 平面对应的黑平面的熵.

3.2 费米场的熵

对于费米系统,对应的配分函数

$$\ln Z = \sum_i g_i \ln(1 e^{-\beta\varepsilon_i}). \tag{3.15}$$

由(3.8)式,可得

$$\begin{aligned}\ln Z &= \sum_i g_i \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-n\beta\varepsilon_i} = i4\pi \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^\infty e^{-\frac{nhv}{T}} v^2 dv \int \alpha^2 r^2 \frac{dr}{\chi} \\ &= i\frac{\pi^2}{90}\frac{7}{8}\int \alpha^2 r^2 \frac{dr}{\beta^3\chi}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

利用(3.10)式的计算结果,可得费米粒子单位面积 xoy 对应的黑平面熵

$$S_f = i\frac{1}{4}\frac{7}{8}A, \tag{3.17}$$

式中 i 为辐射费米粒子的自旋简并度.

4 柱对称时空

4.1 玻色场的熵

柱黑洞的时空线元[22,23]

$$\begin{aligned}dS^2 =&-(\alpha^2\rho^2 - \frac{2(M+\Omega)}{\alpha\rho} + \frac{4Q^2}{\alpha^2\rho^2})dt^2 - \frac{16J}{3\alpha\rho}(1-\frac{2Q^2}{(M+\Omega)\alpha\rho})dt d\varphi \\ &+[\rho^2 + \frac{4(M-\Omega)}{\alpha^3\rho}(1-\frac{2Q^2}{(M+\Omega)\alpha\rho})]d\varphi^2 \\ &+(\alpha^2\rho^2 - \frac{2(3\Omega-M)}{\alpha\rho} + \frac{(3\Omega-M)4Q^2}{(\Omega+M)\alpha^2\rho^2})^{-1}d\rho^2 + \alpha^2\rho^2 dz^2,\end{aligned} \tag{4.1}$$

式中 M, Q 和 J 是黑洞在 z 轴方向,单位长度的质量,电荷和角动量,其中 $\Omega=\sqrt{M^2-\frac{8J^2\alpha^2}{9}}$,$\alpha^2=-\frac{1}{3}\Lambda$. 当电荷和角动量为零时,时空线元化为为[23]

$$dS^2 = -(\alpha^2\rho^2 - \frac{4M}{\alpha\rho})dt^2 + (\alpha^2\rho^2 - \frac{4M}{\alpha\rho})^{-1}d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \alpha^2\rho^2 dz^2. \tag{4.2}$$

黑洞的 Hawking 辐射温度是

$$T_H = \frac{\alpha^2(\rho_+ - \rho_2)(\rho_+ - \rho_3)}{4\pi\rho_+} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{3}{2}(4M)^{1/3}. \tag{4.3}$$

式中 $\rho_+ = \frac{\sqrt[3]{4M}}{\alpha}$，是方程

$$\alpha^2\rho^2 - \frac{4M}{\alpha\rho} = 0 \tag{4.4}$$

的实根，为黑洞的视界位置，ρ_2 和 ρ_3 是方程(4.4)的两个虚根.

黑洞在 z 轴方向，单位长度的视界面积为

$$A_H = 2\pi\alpha\rho_+^2. \tag{4.5}$$

按照文献[18]的观点，无穷远静止观测者，测得的固有辐射温度为

$$T = \frac{T_H}{\chi}, \tag{4.6}$$

式中 $\chi = \sqrt{\alpha^2\rho^2 - \frac{4M}{\alpha\rho}}$，是红移因子.

对于玻色气体，应用第二部分和第三部分的结论

$$\ln Z = -\sum_i g_i \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_i}).$$

可得在 Z 轴方向单位长度，系统的熵为

$$S_b = j\frac{4\pi^3}{45}\frac{1}{\beta_0^3}\int \alpha\rho^2\frac{d\rho}{\chi^4}. \tag{4.7}$$

式中 $\beta = \beta_0\chi$，$\beta_0 = \frac{1}{T_H}$. 对(4.7)式，我们取积分区间$[\rho_+ + \zeta, \rho_+ + N\zeta]$，式中 ζ 为一非负的小量，N 是大于 1 的常数. 则(4.7)式可写为

$$\begin{aligned} S_b &= j\frac{4\pi^3}{45}\frac{1}{\beta_0^3}\int_{\rho_+ + \zeta}^{\rho_+ + N\zeta}\frac{\rho^4 d\rho}{\alpha^3(\rho - \rho_+)^2(\rho - \rho_2)^2(\rho - \rho_3)^2} \\ &= j\frac{4\pi^3}{45}\frac{1}{\beta_0^3}\frac{\rho_+^4}{\alpha^3(\rho_+ - \rho_2)^2(\rho_+ - \rho_3)^2}\left[\frac{N-1}{N\zeta}\right] + G(N, \zeta). \end{aligned} \tag{4.8}$$

我们取

$$\zeta = \frac{T_H}{90}\frac{N-1}{N}, \tag{4.9}$$

则 z 轴方向，单位长度黑洞熵可表为

$$S_b = j\frac{1}{2}\pi\alpha\rho_+^2 + F(N, \zeta) = j\frac{1}{4}A_H + G(N, \zeta). \tag{4.10}$$

当时 $N \to 1$ 时，$\zeta \to 0$，$N\zeta \to 0$，即所取积分上限和积分下限，都趋于黑洞的视界上，膜的厚度为零，且紧贴在视界面上. 换句话说，在 $N \to 1$ 极限下，膜的极限就是视界面. 而且此时 $\lim\limits_{N\to 1} G(N, \zeta) \to 0$，所以 z 轴方向，单位长度黑洞的熵为

$$S_b = \frac{j}{4}A_H. \tag{4.11}$$

由于我们在计算中把积分上限和下限都趋于黑洞的外视界上，故(4.11)式中所得到的熵应为 z 轴方向单位长度黑柱的熵.

4.2 费米场的熵

对于费米系统，对应的配分函数

$$\ln Z = \sum_i g_i \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon_i}). \tag{4.12}$$

由(3.7)式，可得

$$\ln Z = 2\pi \sum_i g_i \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-n\beta\varepsilon_i} \int \alpha\rho^2 \frac{d\rho}{\chi} = i 8\pi^2 \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^\infty e^{-\frac{nhv}{T}} v^2 dv \int \alpha\rho^2 \frac{d\rho}{\chi}$$

$$= i \frac{\pi^3}{45} \frac{7}{8} \int \alpha\rho^2 \frac{d\rho}{\beta^3 \chi}. \tag{4.13}$$

利用(4.8)式的计算结果，可得柱黑洞在 z 轴方向，单位长度对应费米子的熵为

$$S_f = i \frac{1}{4} \frac{7}{8} A_H. \tag{4.14}$$

式中 i 中费米子的自旋简并度，A_H 为在 Z 方向单位高度黑柱的视界面积.

5 结论

通过以上分析，在各种坐标描述的黑洞背景下，从统计物理学角度出发，直接运用统计方法求解各种场的配分函数，避开了求解波动方程的困难，克服了近似处理的方式. 由于我们运用了改进的 brick-wall 方法-膜模型，计算各种场的熵，不存在态密度在视界附近发散问题. 在我们的计算中当 $N \to 1$ 时，$\zeta \to 0$，$N\zeta \to 0$ 即紫外截断因子与"红外"截断因子都趋于黑平面的外视界上，然而由(2.11)，(3.14)和(4.8)式知，计算的结果与辐射场无关，不存在原 brick-wall 方法中的对数发散项与舍去项. 所得熵与黑洞视界面积成正比，故可视为黑洞熵.

从以上分析我们看到，运用统计与膜模型方法计算黑洞的熵，不存在原 brick-wall 方法中黑洞视界外标量场或 Dirac 场的熵为什么是黑洞熵的疑惑. 也不存在复杂的近似求解，整个过程物理图像清楚，计算简单，结果合理，并考虑到粒子的简并度对熵的影响. 对各种不同的时空在计算熵时，只是红移因子不同，其它无需改变. 由其对复杂时空，非球坐标时空，无需求解繁杂的波动方程，就可以直接求得各种量子粒子的熵，为研究各种复杂黑洞的熵提共了一条简捷的新途径.

参 考 文 献

[1] Bekenstein J D. Black hole and entropy. Phys Rev, 1973, **7**D: 2333

[2] Hawking S W. Paticle greation by black hole. Commun Math Phys, 1975, **43**: 199

[3] Gibbons G W, Hawking S W. Cosmological event horizon thermodynamics and particle, creation. Phys Rev, 1977, **15**D: 2738

[4] Hochberg D, Kephart T W, York J W. Positivity of entropy in the semiclassical theory of black hole and radiation. Phys Rev, 1993, **48**D: 479

[5] Padmanaban T. Phase volume occupied by a test particle around an incipient black hole. Physics letters A, 1989, **136**: 203

[6] Lee H, Kim S W, Kim W T. Nonvanishing entropy of extremal charged black hole. Phys Rev, 1996, **54**D: 6559

[7] Gerard't Hooft. On the quantum structure of a black hole. Nucl Phys, 1985, **256**B: 727

[8] Cognola Gognola, Lecca P. Electromagnetic fields in Schwarzschild and Reisner-Nordstrom geometry: Quantum corrections to the black hole entropy. Phys Rev, 1998, **57**D: 1108

[9] Cai Ronggen G, Ji Jeongyoung, Soh Kwangsup. Action and entropy of black hole in spacetiomes with a cosmological constant. Class Quantum Grav, 1998, **15**: 2783

[10] Solodukhin S N. Conical singularity and quantum corrections to the entropy of a black hole. Phys Rev, 1995, **51**D: 609

[11] Lee M H, Kim J K. Entropy of a quantum field in rotating black holes. Phys Rev, 1996, **54**D: 3904

[12] Zhao R, Zhang L C, Wu Y Q. Nernst theorem and entropy of the Reissner-Nordstrom black hole. Gen Rel Grav, 2000, **32**: 1639

[13] Jing J L, Yan M L. Effect of spin on the quantum entropy of black holes. Phys Rev, 2001, **63**D: 084028

[14] Elizabeth Winstanley. Renormalized black hole entropy in anti-de Sitter space via the brick wall method. Phys Rev, 2001, **63**D

[15] Zhao R, Zhang J F, Zhang L C. Entropy of schwarzschild-de Sitter black hole in non-thermal-equilibrium. Modern Physics Letters, 2001, **16**A: 719

[16] Zhao R, Zhang J F, Zhang L C. Statistical entropy in Reissner-Nordstrom black hole. Nucl Phys, 2001, **602**B: 247

[17] Li X, Zhao Z. Entropy of a Vaidya black hole. Phys Rev, 2000, **62**D

[18] Tolman R C. Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford: Oxford University Press, 1934

[19] Gibbons G W, Hawking S W. Action integrals and partition functions in quantum gravity. Phys Rev, 1977, **15**D: 2752

[20] Liu Wenbiao, Zhao Zheng. Entropy of Dirac field in Kerr-Newman black hole. Phys Rev, 2000, **61**D

[21] Cai Ronggen, Zhang Yuanzhong. Black planes solutions in foud-dimensional spacetimes. Phys Rev, 1996, **54**D: 4891

[22] José P S Lemos, Vilson T, Zanchin. Rotating charged black strings and three-dimensional black holes. Phys Rev, 1996, **54**D: 3840

[23] Andrew D B. φ^2 in the spacetime of a cylindrical black hole. Gen Rel Grav, 1999, **31**: 1549

Quantum Statistical Entropy of Black Hole

Zhao Ren   Zhang Lichun

(*Department of Physics*, *Yanbei Normal Institute*, *Datong* 037000)

Abstract: Using the method of quantum statistics, the authors derive the partition function of bosonic and fermionic field in various co-ordinates and obtain the integral expression of the entropy of black hole. Then via the improved brick-wall method and membrane model, the authors obtain that if they choose proper parameter, the entropy of black hole is proportional to the area of horizon. In their result, the stripped term and the divergent logarithmic term in the original brick-wall method no longer exist. The authors offer a new simple and direct way of calculating the entropy of black holes in various co-ordinates.

Key words: Quantum statistics; Statistical entropy of black hole; Membrane model.

MR(2000) Subject Classification: 83C57