2004,**24A**(4):404－408

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

广义 α-stable 过程的确切 Hausdorff 测度函数*

郑水草

（北京大学数学科学学院　北京 100871；集美大学基础教学部　厦门 361021）

摘要：该文证明了广义 α-stable 过程的图集和像集的确切 Hausdorff 测度函数. 该结果推广了 N 指标 d 维 α-stable 过程和 N 指标 d 维广义 Brownian sheet 的相应结果.

关键词：确切 Hausdorff 测度函数；指数为 α 的稳定过程；广义布朗单.

MR(2000)主题分类：65J55；60G60　　**中图分类号**：O211.6　　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2004)04-404-05

首先定义了一类比 N 指标 d 维 α-stable 过程更为广泛的过程，它保留了 α-stable 过程的独立增量性，但不再平稳；同时它也包含了 N 指标 d 维广义布朗单. 该过程不再具有 scaling 性质. 本文继[5]—[8]，考查了对应于指数为 α 的 A 型稳定过程的情形，得到了除 $N\alpha=d\beta_1$ 外该过程的图集和像集的确切 Hausdorff 测度函数. 推广了 Ehm [1]的相应结果.

1　符号与预备知识

本文参数空间 $R_+^N=[0,\infty)^N$, $t\in R_+^N$, $t=(t_1,t_2,\cdots,t_N)\triangleq\langle t_i\rangle$, $A\triangleq\{Q,Q=(s,t]\in R_+^N,(s,t]=\prod\limits_{i=1}^{N}(s_i,t_i],0\leqslant s_i\leqslant t_i\}$, $\rho(Q)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(t_i-s_i)$，有时，记 $Q=(s,t]\triangleq({}_Qt,t^Q]$，$N$ 维 Lebesgue 测度记为 λ, $\delta(s,t)\triangleq\lambda((0,s]\Delta(0,t])$, $(0,s]\Delta(0,t]$ 表示 $(0,s]$ 和 $(0,t]$ 的对称差，$\delta(t)=\lambda((0,t])$，本文中的 N 维 Lebesgue-Stieltjes 测度记为 $\tilde{\lambda}$，$\tilde{\delta}$ 的意义类似 δ；$\tilde{\lambda}$ 总满足对于任意的 $Q\in A$, $Q=(u,v]=\prod\limits_{i=1}^{N}(u_i,v_i]$, $\tilde{\lambda}((u,v])=\prod\limits_{i=1}^{N}F_i(u_i,v_i]$，其中 $F_i(1\leqslant i\leqslant N)$ 是 R_+^1 中相对于 Lebesgue 测度绝对连续的 L-S 测度，且对于任意的 $1\leqslant i\leqslant N$, F_i 总满足：存在正数 c_1,c_2, $1\leqslant\beta_1<\infty$, $0<\beta_2\leqslant 1$，使得当 $|v-u|$ 充分小时，$\forall\, i\in\{1,2,\cdots,N\}$，有

$$c_1\ |\ v_i-u_i\ |^{\beta_1}\leqslant F_i(u_i,v_i]\leqslant c_2\ |\ v_i-u_i\ |^{\beta_2}.\tag{1.1}$$

状态空间被赋于欧氏范数 $\|\cdot\|$ 和内积 $\langle\beta,\gamma\rangle=\sum\beta_i\gamma_i$, $(\beta,\gamma\in R^d)$. 设 $Z(t)=Z(t,\omega)$, $t\in R_+^N$ 为取值于 R^d 上的随机过程，称 Z 为广义 α-stable 过程，如果它满足条件

1) 对任意有限多个不交区间 $Q_i\in A$, $Z(Q_i)$ 相互独立，其中 $Z(Q_i)$ 表示 Z 在 Q_i 上的增

收稿日期：2001-10-08；修订日期：2003-04-30

E-mail：shuicaoz@sohu.com

* 基金项目：国家自然科学基金(10071058-2)资助

量过程. 以下简记 $Z(t)\triangleq Z((0,t])$.

2) $\mathrm{E}\exp(i\langle\gamma,Z(Q)\rangle)=\exp(-\tilde{\lambda}(Q)\phi(\gamma))$，对 $Q\in A,\gamma\in R^d$，且 ϕ 满足条件 $(\mathrm{A}_1)-(\mathrm{A}_3)$

(A_1) $\phi(\gamma)=-\sigma\|\gamma\|^{\alpha}\int g_{\alpha}(\langle\|\gamma\|^{-1},\gamma,y\rangle)\mu(\mathrm{d}y)$, $\gamma\in R^d,\phi(0)\equiv 0$,

其中 σ 为一个常数，g_{α} 满足

$$g_{\alpha}(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}(1-i\cdot\mathrm{sgn}(x)\cdot\tan(\pi\alpha/2)), & \alpha\neq 1;\\ |x|^{\alpha}+(2i/\pi)x\lg|x|, & \alpha=1.\end{cases}$$

μ 为 $s^{d-1}=\{y\in R^d:\|y\|=1\}$上的概率测度，且不为任何特征子空间所支撑，即

(A_2) $\mu(y\in R^d:\langle\beta,y\rangle=0)<1$，对所有 $\beta\in s^{d-1}$.

(A_3) $\int y\mu(\mathrm{d}y)=0$，若 $\alpha=1$，

$$\phi(a\gamma)=a^{\alpha}\phi(\gamma),\quad \gamma\in R^d,\ a>0, \tag{1.2}$$

再结合(A_1)，(A_2)知，存在常数 $c>0$，对所有 $\gamma\in R^d$，有

$$\mathrm{Re}\phi(\gamma)\geqslant c\|\gamma\|^{\alpha}. \tag{1.3}$$

由过程的定义知它是一个独立增量过程，特别地，它包含了 N 指标 d 维 α-stable 过程，但一般情况下，它不具有 scaling 性质，同时它也包含了广义布朗单. 由于该过程不具有 scaling 性质，给证明带来了一些困难. 我们可假定该过程是右连左极的[4,P.62,定理2.68].

2 主要结果

记

$$\phi_1(r)=r^{N+d(1-\beta_2/\alpha)}\cdot(\log\log r^{-1})^{d\beta_2/\alpha}.$$
$$\phi_2(r)=r^{N\beta_2/\beta_1+d(1-\beta_2/\alpha)}\cdot(\log\log r^{-1})^{d/\alpha}.$$
$$\phi_3(r)=r^{N\alpha/\beta_2}\cdot(\log\log r^{-1})^{N}.$$
$$\phi_4(r)=r^{N\alpha/\beta_1}\cdot(\log\log r^{-1})^{N}.$$
$$\phi_5(r)=r^{N}.$$

定理 1 设 Z 为一个广义 A 型 α-stable 过程，则存在正常数 $c_1,c_2,\cdots,c_6$，使得下面以概率 1 对充分小的时间区间 Q 同时成立

$$m^{\phi_1}(G(Q))\leqslant c_1\int_Q\tilde{\omega}(t)^{d/\alpha}\mathrm{d}t,\quad \alpha/\beta_2>1,\ N\alpha>d\beta_2. \tag{2.1}$$

$$m^{\phi_2}(G(Q))\leqslant c_2\int_Q\tilde{\delta}(t)^{(1-1/N)d/\alpha}\mathrm{d}t,\quad \alpha/\beta_1>1,\ N\alpha>d\beta_1. \tag{2.2}$$

$$m^{\phi_3}(G(Q))\leqslant c_3\int_Q\tilde{\omega}(t)^{N}\mathrm{d}t,\quad \alpha/\beta_2>1,\ N\alpha<d\beta_2. \tag{2.3}$$

$$m^{\phi_4}(G(Q))\leqslant c_4\int_Q\tilde{\delta}(t)^{N-1}\mathrm{d}t,\quad \alpha/\beta_1>1,\ N\alpha<d\beta_1. \tag{2.4}$$

$$m^{\phi_5}(G(Q))=\lambda(Q),\quad \alpha/\beta_2\leqslant 1. \tag{2.5}$$

$$m^{\phi_3}(R(Q))\leqslant c_5\int_Q\tilde{\omega}(t)^{N}\mathrm{d}t,\quad N\alpha<d\beta_2. \tag{2.6}$$

$$m^{\phi_4}(R(Q))\leqslant c_6\int_Q\tilde{\delta}(t)^{N-1}\mathrm{d}t,\quad N\alpha<d\beta_1. \tag{2.7}$$

其中 $\tilde{\omega}(t)=\tilde{\delta}(t)\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{F_i(0,t_i]}$，$t=\langle t_i\rangle\in(0,\infty)^N$，$m^{\phi}$ 为测度函数 ϕ 的 Hausdorff 测

度.

证 我们把证明分成两大部分,即上界估计和下界估计. 我们先证上界.

定义超立方体 $c_{n,k}\subset R_+^N$, $n\in\mathrm{N}$, $k=(k_1,\cdots,k_N)\in\mathrm{N}^N$, $\rho(c_{n,k})=b_n\triangleq(n!)^{-k_0}$,其中 $k_0=[8/\beta_2]+1$,如下

$$c_{n,k}=[kb_n,(k+1)b_n)=\prod_{i=1}^{N}[k_ib_n,(k_i+1)b_n),$$

固定 $\varepsilon\in(0,1)$,任选 $Q\subset(\varepsilon,\varepsilon^{-1})^N$, $\forall\, n\geqslant1$,记 C^n 为

$$C^n\triangleq\{c_{m,k}:n\leqslant m\leqslant 2n,k\in\mathrm{N}^N,\ c_{m,k}\cap Q\neq\phi\}.$$

注意到,如果 $c_{m,k}\in C^n$, $n\leqslant m'\leqslant m$,则存在唯一一个 $c_{m',k'}\in C^n$,使得 $c_{m,k}\subset c_{m',k'}$.

现在,我们构造 Q 的一种覆盖. 对于任意的 $c_{2n,k}\in C^n$ 及任意的 $m=n,\cdots,2n$,记 $c_{2n,k}(m)$ 为 C^n 中边长为 b_m 的包含 $c_{2n,k}$ 的那个唯一的超立方体. 称 $c_{2n,k}\in C^n$ 为坏的,如果

$$D(c_{2n,k}(m))>a(\tilde\omega(t^{k,m}))^{1/\alpha}(f(b_m))^{\beta_2/\alpha},\ 对每个\ m=n,\cdots,2n,\tag{2.8}$$

其中 $t^{k,m}$ 是 $c_{2n,k}(m)$ 的下端点,$a>0$ 是[8]中引理 2 中确定的常数, $f(x)=x/\log\log x^{-1}$. 全体"坏"的超立方体的集合记为 c_b^n,如果 $c_{2n,k}\in C^n$ 且不是"坏"的,必有

$$D(c_{2n,k}(m))\leqslant a(\tilde\omega(t^{k,m}))^{1/\alpha}\cdot(f(b_m))^{\beta_2/\alpha},\tag{2.9}$$

至少对一个 $m\in\{n,\cdots,2n\}$ 成立,满足(2.9)式且具有最大边长的立方体叫做"好"的. 记全体好的立方体为 C_g^n,显然

$$C_c^n\triangleq C_b^n\cup C_g^n\ 构成\ Q\ 的一个覆盖;\tag{2.10}$$

$$C_c^n\ 中任意两个超立方体均互不相交;\tag{2.11}$$

$$P[c_{2n,k}\in C_b^n]\leqslant\mathrm{const}\cdot n^{-6},\quad\forall\, c_{2n,k}\subset(\varepsilon,\varepsilon^{-1})^N,\tag{2.12}$$

(2.12)式是由[8]中引理 5 直接获得的(此处取 $q=k_0$). 为了覆盖随机集 $G(Q)$(或 $R(Q)$)我们先覆盖 $G(c_{m,k})$, $c_{m,k}\in C_c^n$,由(2.10)式知所有这些覆盖构成 $G(Q)$ 的一个覆盖.

下面首先证明(2.1)式. 假定 $\alpha/\beta_2>1$, $N\alpha>d\beta_2$, 对每个 $c_{m,k}\in C_c^m$,设 $A_{m,k}$ 为 R^{N+d} 中的边长为 b_m 覆盖 $G(c_{m,k})$ 的最少立方体个数,则

$$m_{b_n}^{\phi_1}(G(Q))\leqslant\sum_g\phi_1(b_m)A_{m,k}+\sum_b\phi_1(b_m)A_{m,k},\tag{2.13}$$

其中 $\sum\limits_g$,($\sum\limits_b$, $\sum\limits_c$) 表示对全体 $c_{m,k}\in C_g^n$(C_b^n, C_c^n)求和,注意到

$$A_{m,k}\leqslant(2a(\omega(k\cdot b_m))^{1/\alpha}\cdot(f(b_m))^{\beta_2/\alpha}\cdot b_m^{-1}+2)^d,$$

因此,$\forall\, a'>a$,及充分大的 n,(2.13)式的第一部分求和小于或等于

$$\sum_c(2a'(\tilde\omega(k\cdot b_m))^{1/\alpha})^d\cdot(f(b_m))^{d\beta_2/\alpha}\cdot b_m^{-d}\cdot\phi_1(b_m).$$

由(2.11)式及 $f(b_m)^{d\beta_2/\alpha}\cdot b_m^{-d}\cdot\phi_1(b_m)=b_m^N$,知此式恰好为积分 $(2a')^d\int_Q\tilde\omega(t)^{d/\alpha}\mathrm{d}t$ 的达布下和,坏超立方体的贡献当 $n\to\infty$ 时变得可以忽略,事实上,由 Schwarz 不等式,(2.12)式和[7]中定理 1,(2.13)式中的第二部分求和的期望囿于

$$\begin{aligned}&\sum_k\phi_1(b_{2n})(EA_{2n,k}^2\cdot P[c_{2n,k}\in C_b^n])^{1/2}\\&\leqslant\mathrm{const}\cdot\lambda(Q)\cdot b_{2n}^{-N}\cdot\phi_1(b_{2n})b_{2n}^{(\beta_2/\alpha-1)d}\cdot n^{-3}\\&\leqslant\mathrm{const}\cdot(\log n)^{d\beta_2/\alpha}\cdot n^{-3}.\end{aligned}$$

从而,由 Borel-Cantelli 引理知,对充分大的 n,第二部分求和小于 n^{-1}. 故

$$m^{\phi_1}(G(Q))\leqslant(2a)^d\int_Q\tilde\omega(t)^{d/\alpha}\mathrm{d}t\ 以概率\ 1\ 成立.\tag{2.14}$$

现在，对每个 $\varepsilon\in(0,1)$，(2.14)式对全体具有有理端点的 $Q\subset(\varepsilon,\varepsilon^{-1})^N$ 以概率1同时成立．但由于(2.14)式两端都是单调的，且右端为连续的，故(2.14)式对全体 $Q\subset(\varepsilon,\varepsilon^{-1})^N$ 以概率1同时成立．让 $\varepsilon\to 0$，沿有理点．(2.1)式证明完毕．

其次，考察(2.3)式，此时 $\alpha/\beta_2>1$，$N\alpha<d\beta_2$．对好区间 $c_{m,k}\in C_g^n$，$G(c_{m,k})$ 可用一个 R^{N+d} 中的边长为 $2a[\tilde{\omega}(k\cdot b_m)f(b_m)]^{\beta_2/\alpha}$ 的超立方体所覆盖，这至少对于充分大的 n 成立．(因为 $(f(b_m))^{\beta_2/\alpha}\cdot b_m^{-1}\to\infty$，$m\to\infty$，而 $\tilde{\omega}Q\subset(\varepsilon,\varepsilon^{-1})^N$ 在上有界)．好区间 ϕ_3-的贡献为

$$\sum_g\phi_3(2a[\tilde{\omega}(k\cdot b_m)f(b_m)]^{\beta_2/\alpha})\leqslant \text{const}\sum_c\tilde{\omega}(k\cdot b_m)^N\cdot b_m^N\leqslant \text{const}\int_Q\tilde{\omega}(t)^N\mathrm{d}t,$$

对于任一坏的立方体 $c_{m,k}\in C_b^n$ 的图集，用 R^{N+d} 中边长为 $b_{2n}^{\beta_2/\alpha}$ 的立方体来覆盖(在[7]中定理1的 $\eta=b_{2n}^{\beta_2/\alpha}$)．如果 $A_{2n,k}$ 为所需的这样的超立方体的最少个数，则如前可证明，所有坏区间对覆盖 ϕ_3-的贡献的期望囿于

$$\text{const}\lambda(Q)b_{2n}^{-N}\phi_3(b_{2n}^{\beta_2/\alpha})n^{-3}\leqslant \text{const}(\log n)^{N/\beta_2}n^{-3}.$$

如上讨论知，此时所有坏区间对覆盖 ϕ_3-的贡献可以忽略，(2.3)式得证．

而(2.6)式，即像集 $R(Q)$ 的 ϕ_3 测度的上界证明与(2.3)式的方法完全相同．

最后证明(2.5)式，由假设有 $\alpha/\beta_2\leqslant 1$．$\forall c_{m,k}\in C_c^n$，一方面，如果 $c_{m,k}$ 是好的，其图集 $G(c_{m,k})$ 可以用一个边长为 b_m 的超立方体所覆盖．事实上，由于 $2a[\omega(k\cdot b_m)f(b_m)]^{\beta_2/\alpha}\cdot b_m^{-1}\to 0$，$m\to\infty$；故当 m 充分大，一个这样的超立方体就足于覆盖 $G(c_{m,k})$ 了．另一方面，坏区间全体的覆盖的 ϕ_5-贡献的期望受控于

$$\text{const}\lambda(Q)b_{2n}^{-N}\phi_5(b_{2n})b_{2n}^{(\beta_2/\alpha-1)d}n^{-3}\leqslant \text{const}b_{2n}^{(\beta_2/\alpha-1)d}n^{-3}\leqslant \text{const}n^{-3},$$

最后一个不等式是由于 $\alpha/\beta_2\leqslant 1$．因此，全体 $G(c_{m,k})$ 的如上的覆盖并集构成图集 $G(Q)$ 的一个覆盖．由此及(2.11)式，有

$$m^{\phi_5}(G(Q))\leqslant\lambda(Q).\tag{2.15}$$

而另一方面，$G(Q)$ 在时间分量上的投影 ϕ_5-测度不少于 $\lambda(Q)$，即

$$m^{\phi_5}(G(Q))\geqslant\lambda(Q),\tag{2.16}$$

综合(2.15)式，(2.16)式知(2.5)式成立．

下面转入证明下界的情况．证明方法主要借助于 Rogers 和 Taylor [2]的密度理论．

我们重点讨论 $\alpha/\beta_1>1$，$N\alpha>d\beta_1$ 的情形．定义上的 Borel 测度如下

$$H(B)=\lambda\{t\in(0,\infty)^N:(t,Z(t))\in B\},\quad\forall B\in\mathscr{B}(R^{N+d}),$$

令 $V_\xi(\rho)$ 为 R^{N+d} 上中心为 ξ，边长为 2ρ 且平行于坐标轴的超立方体，并设 L 表示 Z 的局部时，则利用[5]中的(5)式得

$$H(V_{(t,Z(t))}(\rho))\leqslant(2\rho)^d\sup_{x\in R^d}L\{t-\langle\rho\rangle,t+\langle\rho\rangle,x\},$$

$\forall t\in(0,\infty)^N$ 及充分小的 $\rho>0$．故由[6]中定理1知存在一个有限常数 c 使得

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}}H(V_{(t,Z(t))}(\rho)/\phi_2(2\rho))\leqslant c\tilde{\delta}(t)^{-(1-1/N)d/\alpha},\ \text{a.s. 对每个 } t\in(0,\infty)^N,$$

由此不等式及密度定理[9, p. 448]知

$$\begin{aligned}&m^{\phi_2}(G(Q))\\&\geqslant m^{\phi_2}((t,Z(t))\in G(Q);\overline{\lim_{\rho\to 0}}H(V_{(t,Z(t))}(\rho))/\phi_2(\rho)\leqslant c\tilde{\delta}(_Qt)^{-(1-1/N)d/\alpha})\\&\geqslant kc^{-1}\tilde{\delta}(_Qt)^{(1-1/N)d/\alpha}H((t,Z(t))\in G(Q);\overline{\lim_{\rho\to 0}}H(V_{(t,Z(t))}(\rho))/\phi_2(\rho)\leqslant c\tilde{\delta}(_Qt)^{-(1-1/N)d/\alpha})\\&=kc^{-1}\tilde{\delta}(_Qt)^{(1-1/N)d/\alpha}\lambda(Q)\end{aligned}\tag{2.17}$$

以概率1同时对所有区间 Q 成立，其中 k 为仅与 $N+d$ 有关的正常数，现在，把(2.17)式应

用到 Q 的每个小子区间,让这些小子区间一直细分下去即可得(2.2)式.

最后,(2.7)式也可由同样方法得到,只要在上面证明中用到的[6]定理 1 用[8]中推论 1 代替. 而(2.4)式是(2.7)式的直接推论,因为 $m^{\phi_4}(G(Q))\geqslant m^{\phi_4}(R(Q))$,由投影讨论可知. ▌

推论 1 当 $\beta_1=\beta_2=1, c_1=c_2=1$,即为 α-stable 过程.

推论 2 当 $\alpha=2$,即为广义 Brownian Sheet.

注 取 $\beta_1=\beta_2=1, c_2>c_1>1, \alpha<2$,此时该广义 α-stable 过程既不是 α-stable 过程,也不是广义 Brownian Sheet. 由(2.1)式-(2.5)式知其图集的确切 Hausdorff 测度函数为

$$\phi(r)=\begin{cases} r^{N+d(1-1/\alpha)}(\log\log r^{-1})^{d/\alpha}, & \text{当 } \alpha>1, \text{且 } N\alpha>d \text{ 时}, \\ (r^{\alpha}\log\log r^{-1})^{N}, & \text{当 } \alpha>1, \text{且 } N\alpha<d \text{ 时}, \\ r^{N}, & \text{当 } \alpha\leqslant 1 \text{ 时} \end{cases}$$

由(2.6)式及(2.7)式知,其像集的确切 Hausdorff 测度函数为

$$\phi(r)=(r^{\alpha}\log\log r^{-1})^{N}, \text{ 当 } N\alpha<d \text{ 时}.$$

而当 $N\alpha>d$ 时,其像集充满整个 R^d 空间[1],故其测度函数是平凡的.

作者试图证明 $N\alpha=d\beta_1$ 的情形,但没有成功.

参 考 文 献

[1] Ehm W. Sample function properties of multi-parameter stable processes, New York: Springer-Velag, 1981, (56): 195-228

[2] Rogers C A, Taylor S J. Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure. Mathematica, 1961, **8**: 1-31

[3] Pruitt W E, Taylor S J. Sample path properties of processes with stable components. Z W, 1969, **12**: 267-289

[4] 何声武,汪嘉冈,严加安. 半鞅与随机分析. 北京:科学出版社,1995

[5] 郑水草. 指标维广义 α-stable 过程的局部时. 福建师范大学学报,1999, **15**(2):16-20

[6] 郑水草,庄兴无. 广义 α-stable 过程局部时增量的律. 数学物理学报,1999,**19**(4):415-423

[7] 郑水草. 指标维广义 α-stable 过程的标准表示. 集美大学学报,2001, (4):369-374

[8] 郑水草,胡迪鹤. 指标维广义 α-stable 过程的逗留时. 武汉大学学报,2002,(3):274-280

[9] Ciesielski Z, Taylor S J. First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. Trans Amer Math Soc, 1962, **103**: 434-450

The Exact Hausdorff Function of Generalized α-stable Process

Zheng Shuicao

(*School of Mathematical Sciences*, *Peking University*, *Beijing* 100871;

The Basic Teaching Department, *Jimei University*, *Xiamen* 361021)

Abstract: A process, generalized α-stable process, is introduced. It contains N-parameter d-dimensional generalized Brownian sheet and N-parameter d-dimensional α-stable process. The exact Hausdorff measure functions of this process are shown.

Key words: Exact Hausdorff measure functions; α-stable process; Generalized Brownian sheet.

MR(2000) Subject Classification: 65J55; 60G60