2004,**24A**(6):641－653

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

多种群生态时滞系统正周期解的全局吸引性*

[1] 文贤章 [2] 王志成

([1] 湖南师范大学数学系 长沙 410081; [2] 湖南大学应用数学系 长沙 410082)

摘要:利用比较定理结合 *Liapunov* 泛函，讨论一类具有多个周期时滞的多种群生态竞争-捕食系统正周期解的存在性和全局吸引性.最后，利用一致持久性理论，讨论捕食-食饵系统正周期解存在的充要条件.

关键词:比较定理；竞争-捕食系统；全局吸引性.

MR(2000)主题分类:34C25; 34K15; 92D25 **中图分类号**:O175.14 **文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)06-641-13

1 引言

生态系统周期正解的存在性和全局吸引性具有非常重要的实际意义，历来受到学术界的重视，许多学者都进行了深入研究，但大部分工作都是竞争系统[1,2,3]或二维的系统[4-13]. 尤其在文[1, 3, 14]，分别考虑了竞争的 Kolmogorov 系统，具有时滞多种群竞争的 Volterra-Latka 系统，以及竞争-捕食的时滞 Volterra-Latka 系统，都得到周期解全局吸引的条件. 本文进一步考虑具有周期时滞的 $n+m$ 维竞争-捕食具有周期系数的 Volterra-Latka 系统.

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=x_i(t)(b_i(t)-a_i(t)x_i(t)-\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\,x_k(t-\tau_{ik}(t))-\sum\limits_{k=1}^{m}e_{ik}(t)y_k(t-\eta_{ik}(t))),\\ \dot{y}_j(t)=y_j(t)(r_j(t)+\sum\limits_{k=1}^{n}d_{jk}(t)x_k(t-\delta_{jk}(t))-c_j(t)y_j(t)-\sum\limits_{k=1}^{m}c_{jk}(t)y_k(t-\xi_{jk}(t))),\\ x_i(\theta)=\phi_i(\theta)\geqslant 0,\ y_j(\theta)=\psi_j(\theta)\geqslant 0,\ \theta\in[-\tau,0],\ i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m.\end{cases}\tag{1.1}$$

这里 $\phi_i(0)>0,\psi_j(0)>0,x_i(t)$表示 t 时刻种群 X_i 的密度，$y_j(t)$表示 t 时刻种群 Y_j 的密度，为了更好地描述系统(1.1),假设

(H1) $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_j(t)$, $a_{ik}(t)$ $(i\neq k)$,$c_{jk}(t)$ $(j\neq k)$, $d_{jk}(t)$, $e_{ik}(t)$ 都是严格正的连续的 T 周期函数，$a_{ii}(t)$, c_{jj} , $r_j(t)$是连续的 T 周期函数；

(H2) $\tau_{ik}(t)$, $\delta_{jk}(t)$, $\eta_{ik}(t)$, $\xi_{jk}(t)$都是非负连续可微的 T 周期函数，且 $\min\limits_{t\in[0,T]}(1-\dot{\tau}_{ik}(t))>0$, $\min\limits_{t\in[0,T]}(1-\dot{\delta}_{jk}(t))>0$, $\min\limits_{t\in[0,T]}(1-\dot{\eta}_{ik}(t))>0$, $\min\limits_{t\in[0,T]}(1-\dot{\xi}_{jk}(t))>0$, 这里 $\dot{x}(t)=\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$. 且记 $\phi_{ij}^{-1}(t)$, $h_{ik}^{-1}(t)$, $g_{jk}^{-1}(t)$, $\psi_{jk}^{-1}(t)$分别为函数 $\phi_{ij}(t)=t-\tau_{ij}(t)$, $h_{ik}(t)=t-\eta_{ik}$

收稿日期:2002-04-11; 修订日期:2002-12-23

* 基金项目:国家自然科学基金(A0324623;10271044)资助

(t)，$g_{jk}(t)=t-\delta_{jk}(t)$，$\psi_{jk}(t)=t-\xi_{jk}(t)$的反函数，且

$$\tau=\max_{t\in[0,T]}\{\max_{1\leqslant i,k\leqslant n}\tau_{ik}(t),\ \max_{1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant m}\eta_{jk}(t),\ \max_{1\leqslant i,\ k\leqslant m}\xi_{ik}(t),\ \max_{1\leqslant j\leqslant m,\ 1\leqslant k\leqslant n}\delta_{jk}(t)\}>0.$$

显然，下列引理成立

引理 1.1 $C_+^{n+m}=\{u=(u_1,u_2,\cdots,u_{n+m})\in C^{n+m}([-\tau,0],R):u_i(\theta)\geqslant 0,\theta\in[-\tau,0],$ $i=1,2,\cdots,n+m\}$关于系统(1.1)是正向不变的.

本文的安排如下，在第二节,讨论系统的持续生存,从而得到周期解的存在性.在第三节,讨论周期解的全局吸引性. 最后，利用一致持久性理论，讨论捕食-食饵系统正周期解存在的充要条件.

为了统一起见,本文的概念参见文[13].

2 系统的持久性

首先，考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t)(b(t)-a(t)x(t)-k(t)x(t-\tau(t))),\\ x(\theta)=\phi(\theta)\geqslant 0,\ \theta\in[-\tau,0].\end{cases}\tag{2.1}$$

这里$\phi(0)>0$，$a(t)$，$b(t)$，$k(t)$均是连续的 T 周期函数，$a(t)>0,b(t)>0$. $\tau(t)$是正的连续可微的 T-周期函数，$\min\limits_{t\in[0,T]}(1-\dot{\tau}(t))>0$,记 $\psi^{-1}(t)$是函数 $\psi(t)=t-\tau(t)$的反函数，$\tau=\max\limits_{t\in[0,T]}\tau(t)$.

定理 2.1 如果 $a(t)>\dfrac{|k(\psi^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(t))}$，则系统(2.1)存在全局渐近稳定的 T 周期解.

证 由文[1],知系统

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=y(t)(b(t)-a(t)y(t)),\\ y(0)=\phi(0)>0,\end{cases}$$

存在全局渐近稳定严格正的的 T 周期解 $y^*(t)$，且 $\int_0^T b(t)\mathrm{d}t=\int_0^T a(t)y^*(t)\mathrm{d}t$. 即对任意的 $0<\varepsilon<\min\limits_{t\in[0,T]}y^*(t)$，存在 $t_0=t(\phi(0))>0$，当 $t>t_0$ 时

$$|y(t)-y^*(t)|<\varepsilon.$$

1) 当 $k(t)\geqslant 0$ 时,由比较定理知，当 $t>t_0$ 时

$$x(t)<y^*(t)+\varepsilon.\tag{2.2}$$

利用 $\psi^{-1}(t+T)=T+\psi^{-1}(t)$，以及 $k(t)$，$y^*(t)$的 T 周期性,我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^T(b(t)-k(t)y^*(t-\tau(t)))\mathrm{d}t\\ =&\int_0^T b(t)\mathrm{d}t-\int_{-\tau(0)}^{T-\tau(0)}\frac{k(\psi^{-1}(t))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(t))}y^*(t)\mathrm{d}t\\ =&\int_0^T\Big[b(t)-\frac{k(\psi^{-1}(t))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(t))}y^*(t)\Big]\mathrm{d}t\\ >&\int_0^T[b(t)-a(t)y^*(t)]\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

因此选择 $\varepsilon>0$ 充分小,使得 $\int_0^T(b(t)-k(t)(y^*(t-\tau(t))+\varepsilon))\mathrm{d}t>0$. 则方程

$$\begin{cases}\dot{z}(t)=z(t)(b(t)-a(t)z(t)-k(t)(y^*(t-\tau(t))+\varepsilon)),\\ z(0)=\phi(0)>0,\end{cases}$$

存在全局渐近稳定的 T 正周期解 $z^*(t)$，即对任意的 $\varepsilon_1>0(\varepsilon_1<\min\limits_{t\in[0,T]} z^*(t))$，存在 $t_1=t(\phi(0))>t_0$，当 $t\geqslant t_1$ 时

$$|z(t)-z^*(t)|<\varepsilon_1.$$

由比较定理知，当 $t\geqslant t_1$ 时

$$x(t)>z^*(t)-\varepsilon_1. \tag{2.3}$$

2）当 $k(t)<0$ 时，由比较定理知，当 $t>t_0$ 时

$$x(t)>y^*(t)-\varepsilon. \tag{2.4}$$

下面证 $x(t)$有界，令

$$L(t)=\ln x(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\frac{k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}x(s)\mathrm{d}s, \tag{2.5}$$

则

$$L'(t)=b(t)-(a(t)+\frac{k(\psi^{-1}(t))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(t))})x(t). \tag{2.6}$$

因为 $L(t)$有界,等价于 $x(t)$有界. 下面证 $L(t)$有界,若 $L(t)$无界. 令

$$m=\min_{s\in[0,T]}\{a(s)+\frac{k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}\}, M=\max_{s\in[0,T]}\{-\frac{k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}\}.$$

若 $L(t)$无界,由(2.6)式知,存在点列$\{s_n\}$,$\{t_n\}$,$\{L_n\}$满足，当 $n\to+\infty$时

$$t_n-s_n\to+\infty,\ L_n\to+\infty,$$

使得

$$L(s_n)=\frac{\tau\bar{b}M+\bar{b}}{m}+1, L(t_n)=L_n, \frac{\tau\bar{b}M+\bar{b}}{m}+1<L(t)<L_n,\ t\in(s_n,t_n).$$

由(2.6)式易推得

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n-s_n}\int_{s_n}^{t_n}[a(s)+\frac{k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}]x(s)\mathrm{d}s\leqslant\bar{b},$$

因此

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n-s_n}\int_{s_n}^{t_n}x(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\bar{b}}{m}, \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n-s_n}\int_{s_n}^{t_n}\frac{-k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}x(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{M\bar{b}}{m}.$$

注意到 $\psi^{-1}(s)$是单调增加函数,且 $0\leqslant\psi^{-1}(s)-s\leqslant\tau(\psi^{-1}(s))\leqslant\tau$,因为

$$L(s_n)=\ln x(s_n)-\int_{s_n-\tau(s_n)}^{s_n}\frac{k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}x(s)\mathrm{d}s.$$

因此

$$0\leqslant\int_{s_n-\tau(s_n)}^{s_n}\frac{-k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}x(s)\mathrm{d}s\leqslant 1+\frac{\bar{b}+\bar{b}\tau M}{m}-\ln(y^*(s_n)-\varepsilon).$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n-s_n}\int_{s_n-\tau(s_n)}^{s_n}[\psi^{-1}(s)-s_n]\frac{-k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}x(s)\mathrm{d}s=0.$$

对(2.5)式两边积分,注意交换积分次序,有

$$\begin{aligned}1+\frac{\tau M\bar{b}}{m}+\frac{\bar{b}}{m}&\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n-s_n}\int_{s_n}^{t_n}L(s)\mathrm{d}s\\&=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n-s_n}\int_{s_n}^{t_n}[\ln x(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\frac{k(\phi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}x(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{\bar{b}}{m}+\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n-s_n}\int_{s_n-\tau(s_n)}^{s_n}(\psi^{-1}(s)-s_n)\frac{-k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}x(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n-s_n}\int_{s_n}^{t_n-\tau(t_n)}(\psi^{-1}(s)-s)\frac{-k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}x(s)\mathrm{d}s\\
&+\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n-s_n}\int_{t_n-\tau(t_n)}^{t_n}(t_n-s)\frac{-k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}x(s)\mathrm{d}s\\
\leqslant&\frac{\tau M\bar{b}}{m}+\frac{\bar{b}}{m},
\end{aligned}
$$

矛盾,因此 $L(t)$ 有界，故 $x(t)$ 有界.

3）函数 $k(t)$ 不定号时，作变换

$$
k_1(t)=\begin{cases}0, & k(t)<0;\\ k(t), & k(t)\geqslant 0,\end{cases}\quad k_2(t)=\begin{cases}0, & k(t)\geqslant 0;\\ -k(t), & k(t)<0,\end{cases}
$$

$k_1(t)$，$k_2(t)$ 都是连续周期函数，$k(t)=k_1(t)-k_2(t)$，$a(t)>\frac{|k_1(\psi^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(t))}+\frac{|k_2(\psi^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(t))}$.

考虑系统

$$
\begin{cases}\dot{z}_1(t)=z_1(t)(b(t)-a(t)z_1(t)-k_1(t)z_1(t-\tau(t))),\\ z_1(\theta)=\phi(\theta),\ \theta\in[-\tau,0].\end{cases}\tag{2.7}
$$

由 1)知，系统(2.7)是一致持久的，故存在 $\eta>0$，使得 $\liminf\limits_{t\to\infty}z_1(t)>\eta$.

考虑系统

$$
\begin{cases}\dot{z}_2(t)=z_2(t)(b(t)-a(t)z_2(t)-k_2(t)z_2(t-\tau(t))),\\ z_2(\theta)=\phi(\theta),\ \theta\in[-\tau,0].\end{cases}\tag{2.8}
$$

由 2)知，系统(2.8)是一致持久的，故存在 $M>0$，使得 $\limsup\limits_{t\to\infty}z_2(t)<M$.

利用比较定理，$z_1(t)\leqslant x(t)\leqslant z_2(t)$,因此

$$
\eta<\liminf_{t\to\infty}x(t)\leqslant\limsup_{t\to\infty}x(t)<M.
$$

由 1)，2)，3）的证明知，系统(2.1)是一致持久的. 存在 $t^*=t^*(\phi(\theta))>0$ 和 $0<\eta<M$,当 $t\geqslant t^*$ 时，$\eta<x(t)<M$.

由文[2]知，系统(2.1)存在一个 T 正周期解 $x^*(t)$. 作 V 函数

$$
V(t)=\left|\int_{x^*(t+t^*)}^{x(t+t^*)}\frac{1}{w}\mathrm{d}w\right|+\int_{t+t^*-\tau(t+t^*)}^{t+t^*}\left|\frac{k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}\right||x(s)-x^*(s)|\,\mathrm{d}s.
$$

因为 $x(\cdot+t^*)\in(\eta,M)$，故 $V(t)$ 有意义,对 $V(t)$ 求右上导数得

$$
D^+V(t)\leqslant\left(-a(t+t^*)+\left|\frac{k(\psi^{-1}(t+t^*))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(t+t^*))}\right|\right)|x(t+t^*)-x^*(t+t^*)|.
$$

令 $\alpha=\min\limits_{t\in[0,T]}\left(a(t+t^*)-\left|\frac{k(\psi^{-1}(t+t^*))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(t+t^*))}\right|\right)$，则

$$
V(t)+\alpha\int_0^t|x(s+t^*)-x^*(s+t^*)|\,\mathrm{d}s<V(0)<+\infty.
$$

因此

$$
\lim_{t\to\infty}|x(t)-x^*(t)|=0.
$$

由上面的证明知，系统(2.1)的正周期解存在唯一的，且是全局吸引的. 下面我们仅证明周期解的稳定性. 因为 $x^*(t)\in(\eta,M)$，存在 $\delta>0$，对所有的 $t\in R$,$\xi\in(-\delta,\delta)$，有 $\eta<x^*(t)+\xi<M$.

令

$$W(t)=\left|\int_{x^*(t)}^{x(t)}\frac{1}{w}\mathrm{d}w\right|+\int_{t-\tau(t)}^{t}\left|\frac{k(\psi^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}\right|\left|x(s)-x^*(s)\right|\mathrm{d}s.$$

在变换 $\xi=x-x^*(t)$下,对所有 $t\geqslant 0$, $|\xi|<\delta$,沿着方程(2.1)计算 $W(t)$的右上导数得

$$D^+W(t)\leqslant-\alpha\,|\eta(t)|.$$

由 Lyapunov 定理知 $\xi=0$ 是稳定的,因此,周期解 $x^*(t)$是稳定的. 证明完毕. ▌

注记 2.1 若 $\tau(t)$为常数,则 $k(t)x(t-\tau(t))$ 可为 $\sum_{i=1}^{n}k_i(t)x(t-\tau_i)$. 只要 $a(t)>\sum_{i=1}^{n}|k_i(t+\tau_i)|$,定理依然成立.

由定理 2.1 有

推论 2.1 如果(H1),(H2),和

$$a_i(t)>\frac{|a_{ii}(\phi_{ii}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ii}(\phi_{ii}^{-1}(t))},\ c_j(t)>\frac{|c_{jj}(\psi_{jj}^{-1}(t))|}{1-\dot{\xi}_{jj}(\psi_{jj}^{-1}(t))}\quad(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m).\tag{P0}$$

成立,则系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=x_i(t)(b_i(t)-a_i(t)x_i(t)-a_{ii}(t)x_i(t-\tau_{ii}(t)))$$

存在一个全局渐近稳定的 T 周期解 $\bar{x}_i^*(t)$.

推论 2.2 如果(H1),(H2),(P0)成立,且

$$\int_0^T(r_j(t)+\sum_{i=1}^{n}d_{ij}(t)\bar{x}_i^*(t-\delta_{ij}(t)))\mathrm{d}t>0\quad(j=1,2,\cdots,m).\tag{P1}$$

则系统

$$\frac{\mathrm{d}y_j(t)}{\mathrm{d}t}=y_j(t)(r_j(t)+\sum_{i=1}^{n}d_{ij}(t)\bar{x}_i^*(t-\delta_{ij}(t))-c_j(t)y_j(t)-c_{jj}(t)y_j(t-\xi_{jj}(t)))$$

存在一个全局渐近稳定的 T 周期解 $\bar{y}_j^*(t)$.

推论 2.3 如果(H1),(H2),(P0),(P1)成立,且

$$\int_0^T(b_i(t)-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}(t)\bar{x}_j^*(t-\tau_{ij}(t))-\sum_{j=1}^{m}e_{ij}(t)\bar{y}_j^*(t-\eta_{ij}(t)))\mathrm{d}t>0\quad(i=1,2,\cdots,n).\tag{P2}$$

则系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=x_i(t)(b_i(t)-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}(t)\bar{x}_j^*(t-\tau_{ij}(t))-\sum_{j=1}^{m}e_{ij}(t)\bar{y}_j^*(t-\eta_{ij}(t))-a_i(t)x_i(t)-a_{ii}(t)x_i(t-\tau_{ii}(t)))$$

存在一个全局渐近稳定的周期解 $\underline{x}_i^*(t)$.

推论 2.4 如果(H1),(H2),(P0),(P1),(P2)成立,且

$$\int_0^T(r_j(t)+\sum_{k=1}^{n}d_{jk}(t)\underline{x}_k^*(t-\delta_{jk}(t))-\sum_{k=1,k\neq j}^{m}c_{jk}(t)\bar{y}_k^*(t-\xi_{jk}(t)))\mathrm{d}t>0\quad(j=1,2,\cdots,m).\tag{P3}$$

则系统

$$\frac{\mathrm{d}y_j(t)}{\mathrm{d}t}=y_j(t)(r_j(t)+\sum_{k=1}^{n}d_{jk}(t)\underline{x}_k^*(t-\delta_{jk}(t))$$

$$-\sum_{k=1,k\neq j}^{m}c_{jk}(t)\bar{y}_k^*(t-\xi_{jk}(t))-c_j(t)y_j(t)-c_{jj}(t)y_j(t-\xi_{jj}(t)))$$

存在一个全局渐近稳定的周期解$\underline{y}_j^*(t)$.

有了上面的准备，证明类似于文[14]，可得到下列定理

定理 2.2 假设(H1)，(H2)，(P0)－(P3)成立，则系统(1.1)是一致持久的. 亦即存在 $M>\eta>0$，使得对任何 $u_0=(\phi_1(\theta),\cdots,\phi_n(\theta),\psi_1(\theta),\cdots,\psi_m(\theta))^T\in \mathrm{int}(C([-\tau,0],R_+)^{n+m})$，存在 $T(u_0)>0$，使得 $u(t,u_0)=(x_1(t,u_0),\cdots,x_n(t,u_0),y_1(t,u_0),\cdots,y_m(t,u_0))^T$ 对所有的 $t>T(u_0)$，$i=1,\cdots,n$；$j=1,\cdots,m$ 满足

$$\eta<x_i(t,u_0)<M,\ \eta<y_j(t,u_0)<M.$$

由文[2]，我们可知

定理 2.3 在定理 2.2 的条件下，系统(1.1)存在严格正的 T 周期解

$$u^*(t)=(x_1{}^*(t),\cdots,x_n{}^*(t),y_1{}^*(t),\cdots,y_m{}^*(t)).$$

3 解的渐近性

在介绍解的全局吸引性之前，先给出一个条件

(P4) 存在一个正的 T 周期函数 $b(t):R\to R$，和正常数 α_i，β_j，$i=1,\cdots,n$；$j=1,\cdots,m$，一致地有

$$\begin{cases}\alpha_i a_i(t)-[\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\dfrac{|a_{si}(\phi_{si}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{si}(\phi_{si}^{-1}(t))}+\sum_{k=1}^{m}\beta_k\dfrac{d_{ki}(g_{ki}^{-1}(t))}{1-\dot{\delta}_{ki}(g_{ki}^{-1}(t))}]>b(t), & i=1,2,\cdots,n;\\ \beta_j c_j(t)-[\sum_{s=1}^{m}\beta_s\dfrac{|c_{sj}(\psi_{sj}^{-1}(t))|}{1-\dot{\xi}_{sj}(\psi_{sj}^{-1}(t))}+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\dfrac{e_{sj}(h_{sj}^{-1}(t))}{1-\dot{\eta}_{sj}(h_{sj}^{-1}(t))}]>b(t), & j=1,2,\cdots,m.\end{cases}$$

定理 3.1 假设定理 2.2 的条件成立，且(P4)成立，则系统(1.1)存在一个全局吸引的严格正的 T 周期解 $u^*(t)=(x_1{}^*(t),\cdots,x_n{}^*(t),y_1{}^*(t),\cdots,y_m{}^*(t))$.

证 由定理 2.2，知道系统(1.1)是一致持久的，亦即存在 $M>\eta>0$，使得对任何初值 $u_0=(\phi_1(\theta),\cdots,\phi_n(\theta),\psi_1(\theta),\cdots,\psi_m(\theta))^T\in\mathrm{int}(C([-\tau,0],R_+)^{n+m})$，存在 $T_0=T(u_0)>0$，使得 $u(t,u_0)=(x_1(t,u_0),\cdots,x_n(t,u_0),y_1(t,u_0),\cdots,y_m(t,u_0))^T$ 对所有的 $t\geqslant T_0$，$i=1,\cdots,n$；$j=1,\cdots,m$ 满足

$$\eta<x_i(t,u_0)<M,\ \eta<y_j(t,u_0)<M. \tag{3.1}$$

定义

$$\begin{aligned}V(t)=&\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[|\int_{x_i(t+T_0)}^{x_i^*(t+T_0)}\frac{1}{w}\mathrm{d}w|+\sum_{j=1}^{n}\int_{t+T_0-\tau_{ij}(t+T_0)}^{t+T_0}\frac{|a_{ij}(\phi_{ij}^{-1}(s))|}{1-\dot{\tau}_{ij}(\phi_{ij}^{-1}(s))}|x_j^*(s)-x_j(s)|\mathrm{d}s\\&+\sum_{k=1}^{m}\int_{t+T_0-\eta_{ik}(t+T_0)}^{t+T_0}\frac{e_{ik}(h_{ik}^{-1}(s))}{1-\dot{\eta}_{ik}(h_{ik}^{-1}(s))}|y_k^*(s)-y_k(s)|\mathrm{d}s]\\&+\sum_{j=1}^{m}\beta_j[|\int_{y_j(t+T_0)}^{y_j^*(t+T_0)}\frac{1}{w}\mathrm{d}w|+\sum_{k=1}^{n}\int_{t+T_0-\delta_{jk}(t+T_0)}^{t+T_0}\frac{d_{jk}(g_{jk}^{-1}(s))}{1-\dot{\delta}_{jk}(g_{jk}^{-1}(s))}|x_k^*(s)-x_k(s)|\mathrm{d}s\\&+\sum_{k=1}^{m}\int_{t+T_0-\xi_{jk}(t+T_0)}^{t+T_0}\frac{|c_{jk}(\psi_{jk}^{-1}(s))|}{1-\dot{\xi}_{jk}(\psi_{jk}^{-1}(s))}|y_k^*(s)-y_k(s)|\mathrm{d}s],\end{aligned}$$

由(3.1)知 $V(t)$是有意义的. 对 $V(t)$求右上导数，由条件(P5)得到

$$D^+V(t)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[-a_i(t+T_0)|x_i{}^*(t+T_0)-x_i(t+T_0)|$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t+T_0)||x_j^*(t+T_0-\tau_{ij}(t+T_0))-x_j(t+T_0-\tau_{ij}(t+T_0))|\\
&+\sum_{k=1}^{m}e_{ik}(t+T_0)|y_k^*(t+T_0-\eta_{ik}(t+T_0))-y_k(t+T_0-\eta_{ik}(t+T_0))|\\
&+\sum_{j=1}^{n}\frac{|a_{ij}(\phi_{ij}^{-1}(t+T_0))|}{1-\dot{\tau}_{ij}(\phi_{ij}^{-1}(t+T_0))}|x_j^*(t+T_0)-x_j(t+T_0)|\\
&-\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t+T_0)||x_j^*(t+T_0-\tau_{ij}(t+T_0))-x_j(t+T_0-\tau_{ij}(t+T_0))|\\
&+\sum_{k=1}^{m}\frac{e_{ik}(h_{ik}^{-1}(t+T_0))}{1-\dot{\eta}_{ik}(h_{ik}^{-1}(t+T_0))}|y_k^*(t+T_0)-y_k(t+T_0)|\\
&-\sum_{k=1}^{m}e_{ik}(t+T_0)|y_k^*(t+T_0-\eta_{ik}(t+T_0))-y_k(t+T_0-\eta_{ik}(t+T_0))|]\\
&+\sum_{j=1}^{m}\beta_j[-c_j(t+T_0)|y_j^*(t+T_0)-y_j(t+T_0)|\\
&+\sum_{k=1}^{n}d_{jk}(t+T_0)|x_k^*(t+T_0-\delta_{jk}(t+T_0))-x_k(t+T_0-\delta_{jk}(t+T_0))|\\
&+\sum_{k=1}^{m}|c_{jk}(t+T_0)||y_k^*(t+T_0-\xi_{jk}(t+T_0))-y_k(t+T_0-\xi_{jk}(t+T_0))|\\
&+\sum_{k=1}^{n}\frac{d_{jk}(g_{jk}^{-1}(t+T_0))}{1-\dot{\delta}_{jk}(g_{jk}^{-1}(t+T_0))}|x_k^*(t+T_0)-x_k(t+T_0)|\\
&-\sum_{k=1}^{n}d_{jk}(t+T_0)|x_k^*(t+T_0-\delta_{jk}(t+T_0))-x_k(t+T_0-\delta_{jk}(t+T_0))|\\
&+\sum_{k=1}^{m}\frac{|c_{jk}(\psi_{jk}^{-1}(t+T_0))|}{1-\dot{\xi}_{jk}(\psi_{jk}^{-1}(t+T_0))}|y_k^*(t+T_0)-y_k(t+T_0)|\\
&-\sum_{k=1}^{m}|c_{jk}(t+T_0)||y_k^*(t+T_0-\xi_{jk}(t+T_0))-y_k(t+T_0-\xi_{jk}(t+T_0))|]\\
=&\sum_{i=1}^{n}[-\alpha_i a_i(t+T_0)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\frac{d_{ji}(g_{ji}^{-1}(t+T_0))}{1-\dot{\delta}_{ji}(g_{ji}^{-1}(t+T_0))}\\
&+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\frac{|a_{ji}(\phi_{ji}^{-1}(t+T_0))|}{1-\dot{\tau}_{ji}(\phi_{ji}^{-1}(t+T_0))}]\cdot|x_i^*(t+T_0)-x_i(t+T_0)|\\
&+\sum_{j=1}^{m}[-\beta_j c_j(t+T_0)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{e_{ij}(h_{ij}^{-1}(t+T_0))}{1-\dot{\eta}_{ij}(h_{ij}^{-1}(t+T_0))}\\
&+\sum_{k=1}^{m}\beta_k\frac{|c_{kj}(\psi_{kj}^{-1}(t+T_0))|}{1-\dot{\xi}_{kj}(\psi_{kj}^{-1}(t+T_0))}]\cdot|y_j^*(t+T_0)-y_j(t+T_0)|\\
\leqslant&-b(t+T_0)[\sum_{i=1}^{n}|x_i^*(t+T_0)-x_i(t+T_0)|\\
&+\sum_{j=1}^{m}|y_j^*(t+T_0)-y_j^*(t+T_0)|],
\end{aligned}
$$

利用 $b(t)$ 的周期性，有

$$\lim_{t\to\infty}(u(t)-u^*(t))=0.$$

周期解的唯一性类似可证，全局吸引性可得. 证明完毕. ▌

注记 3.1 对无时滞或时滞为常数的模型，定理 3.1 的结果成立，见文[14,15].

作为定理 2.2 和定理 3.1 的推论，有下列定理

定理 3.2 如果(P4)成立，对所有的 $i,k=1,\cdots,n$; $j,l=1,\cdots,m$, $a_i(t)>0$, $a_{ik}(t)\geqslant 0$, $b_i(t)>0$, $c_j(t)>0$, $c_{jl}(t)\geqslant 0$, $d_{jk}\geqslant 0$, $e_{ij}\geqslant 0$ 且

$$p_i=\max_{t\in[0,T]}\frac{b_i(t)}{a_i(t)},\quad q_j=\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{c_j(t)}\Big(\sum_{s=1}^{n}d_{js}(t)p_s+r_j(t)\Big)>0,$$

$$f_i=\min_{t\in[0,T]}\frac{1}{a_i(t)}\Big(b_i(t)-\sum_{s=1}^{n}a_{is}(t)p_s-\sum_{s=1}^{m}e_{is}(t)q_s\Big)>0,$$

$$g_j=\min_{t\in[0,T]}\frac{1}{c_j(t)}\Big(r_j(t)+\sum_{s=1}^{n}d_{js}(t)f_s-\sum_{s=1}^{m}c_{js}(t)q_s\Big)>0.$$

则系统(1.1)存在全局吸引的周期解.

事实上，在定理 2.2 的证明中，有

$$f_i\leqslant \underline{x}_i^*(t)\leqslant \bar{x}_i^*(t)\leqslant p_i,\ (i=1,\cdots,n);$$
$$g_j\leqslant \underline{y}_j^*(t)\leqslant \bar{y}_j^*(t)\leqslant q_j,\ (j=1,\cdots,m).$$

即系统(1.1)是一致持久的. 再由定理 3.1 知，定理 3.2 成立.

下列的例子说明主要定理 3.1 的条件是相容的，考虑方程

$$\begin{cases}
x'_1(t)=x_1(t)\Big[(5+\sin t)-(13+\cos t)x_1(t)-\dfrac{2+\sin t}{4}x_2\Big(t-\dfrac{1}{2}\sin t\Big)\\
\qquad -(5+\cos t)y_1(t-1)-\dfrac{2+\cos t}{40}y_2(t-2)\Big];\\
x'_2(t)=x_2(t)\Big[(5-\cos t)-\dfrac{2+\sin t}{4}x_1\Big(t-\dfrac{1}{2}\cos t\Big)-(13+\cos t)x_2(t)\\
\qquad -\dfrac{2+\cos t}{40}y_1(t-1)-(5+\cos t)y_2(t-2)\Big];\\
y'_1(t)=y_1(t)\Big[-\dfrac{2+\sin t}{100}+\dfrac{3+\sin t}{4}x_1(t-1)+(2-\cos t)x_2(t-2)\\
\qquad -(5-\sin t)y_1(t)-\dfrac{2+\sin t}{200}y_2\Big(t-\dfrac{\cos t}{4}\Big)\Big];\\
y'_2(t)=y_2(t)\Big[-\dfrac{2-\cos t}{100}+(2-\cos t)x_1(t-2)+\dfrac{3+\sin t}{4}x_2(t-1)\\
\qquad -\dfrac{2+\sin t}{200}y_1\Big(t-\dfrac{\sin t}{4}\Big)-(5-\sin t)y_2(t)\Big].
\end{cases}$$

由定理 2.2，3.1，知道上述方程存在全局吸引的正周期解.

4 捕食-食饵系统

首先，介绍一些概念，令(X,d)为度量 d 的完备度量空间，假设 $\Phi(t):X\to X$, $t\geqslant 0$ 是定义在 X 上的 C^0-半流. 即：$\Phi(0)=I$, 对 $t,s\geqslant 0$, $\Phi(t+s)=\Phi(t)\Phi(s)$. 且 $\Phi(t)x$ 关于 x 和 t 连续. 如果在 X 中存在一个非空有界集 B，对任何 $x\in X$，存在 $t_0=t_0(x,B)>0$，使当 $t>t_0$ 时$\Phi(t)x\in B$，我们说 $\Phi(t)$在 X 中是点耗散的.

记 $\omega(x)$ 为 $x\in X$ 的 ω 极限集，$\widetilde{A}_\partial=\bigcup_{x\in\partial X_0}\omega(x)$. 如果存在 $\widetilde{A}_\partial$ 的一个孤立覆盖 $\bigcup_{i=1}^{k}M_i$，使得 M_i 的任何子集不能形成一个环，则称集 $\widetilde{A}_\partial$ 是非环的.

下面讨论捕食-食饵系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t)(b(t)-a(t)x(t)-a_1(t)x(t-\tau_1(t))-e(t)y(t-\tau_2(t)));\\ \dot{y}(t)=y(t)(r(t)+d(t)x(t-\tau_3(t))-c(t)y(t)-c_1(t)y(t-\tau_4(t)));\\ x(\theta)=\phi(\theta)>0,\ y(\theta)=\psi(\theta)>0,\ \theta\in[-\tau,0].\end{cases}\tag{4.1}$$

这里 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$，$d(t)$，$e(t)$，$\tau_i(t)$，$i=1,2,3,4$ 均是正的连续的 T 周期函数，$a_1(t)$，$c_1(t)$是连续的 T 周期函数. 且 $1-\dot{\tau}_i(t)>0$，$t\in[0,T]$，记 $\psi_i^{-1}(t)$为 $\psi_i(t)=t-\tau_i(t)$的反函数，记 $\tau=\max\limits_{t\in[0,T]}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}\{\tau_i\}>0$. 假设

$$a(t)>\frac{|a_1(\psi_1^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_1(\psi_1^{-1}(t))},\ c(t)>\frac{|c_1(\psi_4^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_4(\psi_4^{-1}(t))}.\tag{H$_0$}$$

由定理 2.1 的证明过程，可以看出，存在正常数 M，使得 $0\leqslant x(t)\leqslant M$. 类似地，存在正常数 N，使得 $0\leqslant y(t)\leqslant N$. 这样，我们可以定义一个周期半流，$\Phi(t)$：$C([-\tau,0],R_+^2)\to C([-\tau,0],R_+^2)$为 $\Phi(t)\phi=(x_t(\phi),\ y_t(\phi))$，$x_0(\phi)=\phi_1$，$y_0(\phi)=\phi_2$. 令

$$X_0=\{(\phi_1,\phi_2)\in C([-\tau,0],R_+^2)\mid\phi_i(0)>0,\ i=1,2\},$$
$$\partial X_0=\{(\phi_1,\phi_2)\in C([-\tau,0],R_+^2)\mid\phi_i(0)=0,\ i=1\text{ 或 }2\}.$$

则 $C([-\tau,0],R_+^2)=X_0\cup\partial X_0$，$X_0$ 关于 $C([-\tau,0],R_+^2)$开，∂X_0 关于 $C([-\tau,0],R_+^2)$ 闭，且 $\Phi(t)X_0\subset X_0$，$\Phi(t)\partial X_0\subset\partial X_0$，$t\geqslant 0$. 当 $t>\tau$ 时，$\Phi(t)$是连续和紧的. 下面定义 Poincare 映射 S：$C([-\tau,0],R_+^2)\to C([-\tau,0],R_+^2)$.

$$S(\phi)=\Phi(n_0T)\phi=(x_{n_0T}(\phi),\ y_{n_0T}(\phi)),\ \phi\in C([-\tau,0],R_+^2),$$

这里 $n_0T>\tau$. 显然，S 是一个连续的、点耗散的紧映射，且 $S(X_0)\subset X_0$，$S(\partial X_0)\subset\partial X_0$，由文[16，定理 2.4.7]有一个全局吸引子 A.

下面介绍一些引理

引理 4.1　假设

$$\int_0^T r(t)\mathrm{d}t>0,\ \int_0^T b(t)\mathrm{d}t>0\ \text{和}\ \int_0^T(b(t)-e(t)\bar{y}^*(t-\tau_2(t)))\mathrm{d}t>0.$$

则存在一个 $\delta>0$，使得对任何 $\phi\in X_0$

$$\limsup_{t\to+\infty}x(0,\phi)(t)>\delta,\limsup_{t\to+\infty}y(0,\phi)(t)>\delta.\tag{4.2}$$

在这里 $\bar{y}^*(t)$是下列方程

$$y'(t)=y(t)[r(t)-c(t)y(t)-c_1(t)y(t-\tau_4(t))]\tag{4.3}$$

唯一的正周期解.

证　记：$\lambda_0=\int_0^T(b(t)-e(t)\bar{y}^*(t-\tau_2(t)))\mathrm{d}t$. 若(4.2)式不成立，则有

$$\limsup_{t\to+\infty}x(0,\ \phi)(t)<\frac{\delta_1^*}{4},\tag{4.4}$$

这里 $\delta_1^*>0$ 满足

$$\int_0^T(a(t)+\frac{a_1(\psi^{-1}(t))}{1-\dot{\tau}(\psi_i^{-1}(t))})\delta_1{}^*\,\mathrm{d}t<\frac{\lambda_0}{4}.$$

记 $x(t)=x(0,\phi)(t)$，$y(t)=y(0,\phi)(t)$，则存在 $M_1>0$，当 $t>M_1-\tau$ 时，有 $x(t)<\delta_1^*$. 于是有

$$y'(t)<y(t)(r(t)+d(t)\delta_1{}^*-c(t)y(t)-c_1(t)y(t-\tau_4(t))),\quad t>M_1.$$

考虑辅助方程

$$\begin{cases} z'(t)=z(t)(r(t+M_1)+d(t+M_1)\delta_1{}^*-c(t+M_1)z(t) \\ \qquad -c_1(t+M_1)z(t-\tau_4(t+M_1))), \\ z(0)=y(M_1), \end{cases} \tag{4.5}$$

由于

$$\int_0^T (r(t+M_1)+d_k(t+M_1)\delta_1^*)\mathrm{d}t>0.$$

(4.5)式存在全局渐近稳定的 T 正周期解 $z^*(t)$. 即，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 T_0，当 $t>T_0$ 时

$$z^*(t)+\frac{\varepsilon}{2}>z(t)>z^*(t)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

由微分方程解对参数的连续依赖性，对上述的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta^*>0$，当 $0<\delta_1^*\leqslant\delta^*$ 时，$z^*(t)<\bar{y}^*(t+M_1)+\frac{\varepsilon}{2}$，$t\in[0,T]$. 由比较定理知，存在 $M_2>M_1$，使得当 $t>M_2$ 时，$y(t)<\bar{y}^*(t)+\varepsilon$. 选择 $\varepsilon>0$，使得

$$\int_0^T (b(s)-e(t)\ (\bar{y}^*(t-\tau_2(t))+\varepsilon))\mathrm{d}t>\frac{\lambda_0}{2},$$

则当 $t>M_2$ 时有

$$\begin{aligned} x(t)&=x(M_2)\mathrm{e}^{\int_{M_2}^t [b(t)-a(t)x(t)-a_1(t)x(t-\tau_1(t))-e(t)y(t-\tau_2(t))]\mathrm{d}t} \\ &\geqslant x(M_2)\mathrm{e}^{\int_{M_2}^t [b(t)-e(t)(y^*(t-\tau_2(t))+\varepsilon)-a(t)x(t)-a_1(t)x(t-\tau_1(t))]\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

由此易知

$$x(M_2+lT)\geqslant x(M_2)\mathrm{e}^{\frac{\lambda_0}{4}l-B},$$

这里 $B=2\delta^*\tau(M_2)\max\limits_{t\in[0,T]}a(t)$. 当 $l\to+\infty$时，$x(M_2+lT)\to+\infty$. 这与(4.4)式矛盾. 类似地，我们可以证明$\limsup\limits_{n\to+\infty}y(0,\phi)(t)>\delta$. 命题得证. ▎

同样地，可以证明

引理 4.2 假设，

$$\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\leqslant 0,\int_0^T b(t)\mathrm{d}t>0\ 和\ \int_0^T (r(t)+d(t)\bar{x}^*(t-\tau_3(t)))\mathrm{d}t>0.$$

则存在一个 $\delta>0$，使得对任何 $\phi\in X_0$

$$\limsup_{t\to+\infty}x(0,\phi)(t)>\delta,\ \limsup_{t\to+\infty}y(0,\phi)(t)>\delta.$$

在这里 $\bar{x}^*(t)$是下列方程

$$x'(t)=x(t)[b(t)-a(t)x(t)-a_1(t)x(t-\tau_1(t))]$$

唯一的正周期解.

有了上面的准备，下面给出本节的主要定理

定理 4.1 1) 如果 $\int_0^T r(t)\mathrm{d}t>0$，则系统(4.1)一致持久的充要条件是

$$\int_0^T b(t)\mathrm{d}t>0\ 和\ \int_0^T (b(t)-e(t)\bar{y}^*(t-\tau_2(t)))\mathrm{d}t>0. \tag{4.6}$$

2) 如果 $\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\leqslant 0$，则系统(4.1)一致持久的充要条件是

$$\int_0^T b(t)\mathrm{d}t>0\ 和\ \int_0^T (r(t)+d(t)\bar{x}^*(t-\tau_3(t)))\mathrm{d}t>0. \tag{4.7}$$

证 我们证明 1)，同样可证 2).

充分性:由定理 2.1, $\widetilde{A}_\partial=\bigcup_{\phi\in\partial X_0}\omega(\phi)=\{(\check{0},\check{0}),(\bar{\check{x}}_0^*,\check{0}),(\check{0},\bar{\check{y}}_0^*)\}$. 令 $M_1=(\check{0},\check{0})$, $M_2=(\bar{\check{x}}_0^*,\check{0})$, $M_3=(\check{0},\bar{\check{y}}_0^*)$, 这里 $\bar{\check{x}}_0^*(\theta)=\bar{x}^*(\theta)$, $\bar{\check{y}}_0^*(\theta)=\bar{y}^*(\theta)$, $\check{0}(\theta)=0$, $\theta\in[-\tau,0]$. 则 $\widetilde{A}_\partial=M_1\cup M_2\cup M_3$. 相对于离散流 $S_\partial=S|_{\partial X_0}$, M_i 和 $M_j(i\neq j)$ 是不交的, 是紧的、孤立的不变集. 因为 $\int_0^T b(t)\mathrm{d}t>0$, $\int_0^T r(t)\mathrm{d}t>0$, $\int_0^T[b(t)-\sum_{j=1}^n d_j(t)\bar{y}^*(t)]\mathrm{d}t>0$. 由引理 4.1, 可知对 X_0 的流 S, $M_i(i=1,2,3)$ 是孤立的. 因为, $S:X_0\to X_0$, $S:\partial X_0\to\partial X_0$. 因此, 对 $X_0\cup\partial X_0$ 内的流 S, $M_i(i=1,2,3)$ 是孤立的.

由定理 2.1 知, M_1,M_2,M_3 在 ∂X_0 内是非环的. 因此, 在 ∂X_0 上 $M_1\cup M_2\cup M_3$ 是 A_∂ 的一个孤立的非环覆盖. 由引理 4.1 知, $W^s(M_i)\cap X_0=\varnothing$, $i=1,2,3$. 因此, 由文[17,定理 2.2], S 关于 $(X_0,\partial X_0)$ 是一致持久的. 由文[17,定理 2.1], $\Phi(t)$ 关于 $(X_0,\partial X_0)$ 是一致持久的.

必要性:若系统(4.1)是一致持久的, 则存在常数 $\eta>0$, 对任意的 $u\in X_0$, $\liminf\limits_{t\to+\infty}d(\Phi(t)u,\partial X_0)>\eta$. 也就是存在常数 $m_1>0$, 使得

$$\liminf_{t\to+\infty}x(0,\phi)(t)>m_1,\ \liminf_{t\to+\infty}y(0,\phi)(t)>m_1. \tag{4.8}$$

由(4.8)式知, 存在 T_0, 当 $t>T_0-\tau$ 时

$$x(0,\phi)(t)>\frac{m_1}{2},\ y(0,\phi)(t)>\frac{m_1}{2}.$$

因此

$$y'(t)>y(t)(r(t)+d(t)\frac{m_1}{2}-c(t)y(t)-c_1(t)y(t-\tau_4(t))),\quad t>T_0. \tag{4.9}$$

考虑系统

$$\begin{aligned}z'(t)=&z(t)(r(t+T_0)+d(t+T_0)\frac{m_1}{2}-c(t+T_0)z(t)\\&-c_1(t+T_0)z(t-\tau_4(t+T_0))),\ z(0)=y(T_0),\end{aligned}\tag{4.10}$$

由于系统(4.10)存在一个全局渐近稳定的正周期解 $z^*(t)$, 比较系统(4.10)和(4.3)知道, 存在正常数 ξ, 使得 $z^*(t)>\bar{y}^*(t+T_0)+\xi$, $t\in[0,T]$. 比较系统(4.10)和(4.9)知, 存在 $T_1>T_0$, 当 $t>T_1-\tau$ 时

$$y(t)\geqslant z^*(t-T_0)>\bar{y}^*(t)+\frac{\xi}{2}. \tag{4.11}$$

因为

$$\int_{T_1}^t a_1(s)x(s-\tau(s))\mathrm{d}s=\int_{T_1-\tau(T_1)}^{t-\tau(t)}a_1(\psi^{-1}(s))\frac{x(s)}{1-\dot{\tau}(\psi^{-1}(s))}\mathrm{d}s,$$

注意到系统(4.1)是一致持久的, 及假设(H_0), 由系统(4.1)第一式知道

$$\begin{aligned}0&=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t-T_1}\ln\frac{x(t)}{x(T_1)}\\&\leqslant\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t-T_1}\int_{T_1}^t(b(s)-e(s)(\bar{y}^*(s-\tau_2(s))+\frac{\xi}{2})\\&\quad-a(s)x(s)-a_1(s)x(s-\tau_1(s)))\mathrm{d}s\\&\leqslant\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t-T_1}\int_{T_1}^t(b(s)-e(s)(\bar{y}^*(s-\tau_2(s))+\frac{\xi}{2}))\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t-T_1}\int_{T_1}^{t}-([a(s)+\frac{a_1(\psi_1^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}_1(\psi_1^{-1}(s))}]x(s))\mathrm{d}s\\
&-\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t-T_1}\int_{T_1-\tau_1(T_1)}^{T_1}\frac{a_1(\psi_1^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}_1(\psi_1^{-1}(s))}x(s-\tau_1(s))\mathrm{d}s\\
&+\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t-T_1}\int_{t-\tau_1(t)}^{t}\frac{a_1(\psi_1^{-1}(s))}{1-\dot{\tau}_1(\psi_1^{-1}(s))}x(s-\tau_1(s))\mathrm{d}s\\
<&\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t-T_1}\int_{T_1}^{t}(b(s)-e(s)\bar{y}^*(s-\tau_2(s)))\mathrm{d}s\\
=&\frac{1}{T}\int_0^T(b(s)-e(s)\bar{y}^*(s-\tau_2(s)))\mathrm{d}s\\
<&\frac{1}{T}\int_0^T b(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由上面的不等式，得到

$$
\int_0^T(b(s)-e(s)\bar{y}^*(s-\tau_2(s)))\mathrm{d}s>0,\int_0^T b(s)\mathrm{d}s>0.
$$

因此，1)得证. ▌

利用由文[2]的定理 1，类似定理 4.1 的必要性证明，有

定理 4.2 1) 如果 $\int_0^T r(t)\mathrm{d}t>0$，则系统(4.1)存在正 T 周期解的充要条件是

$$
\int_0^T b(t)\mathrm{d}t>0 \text{ 和 } \int_0^T(b(t)-e(t)\bar{y}^*(t-\tau_2(t)))\mathrm{d}t>0.
$$

2) 如果 $\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\leqslant 0$，则系统(4.1)存在正周期解的充要条件是

$$
\int_0^T b(t)\mathrm{d}t>0 \text{ 和 } \int_0^T(r(t)+d(t)\bar{x}^*(t-\tau_3(t)))\mathrm{d}t>0.
$$

记

$$
a=\min_{t\in[0,T]}a(t),\quad c=\min_{t\in[0,T]}c(t),
$$

$$
A_1=\max_{t\in[0,T]}\frac{|a_1(\psi_1^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_1(\psi_1^{-1}(t))},\quad E=\max_{t\in[0,T]}\frac{e(\psi_2^{-1}(t))}{1-\dot{\tau}_2(\psi_2^{-1}(t))},
$$

$$
C_1=\max_{t\in[0,T]}\frac{|c_1(\psi_4^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_4(\psi_4^{-1}(t))},\quad D=\max_{t\in[0,T]}\frac{d(\psi_3^{-1}(t))}{1-\dot{\tau}_3(\psi_3^{-1}(t))}.
$$

推论 4.1 如果系统(4.1) 存在正周期解，并且 $a>A_1$，$c>C_1$，$(a-A_1)(c-C_1)-DE>0$，则正周期解是全局吸引的.

证 只验证定理 3.1 的条件(P5)，只要取

$$
\frac{c-C_1}{E}>\frac{\alpha_1}{\beta_1}>\frac{D}{a-A_1},
$$

有

$$
\begin{cases}\alpha_1(a-A_1)-\beta_1 D>0;\\ \beta_1(c-C_1)-\alpha_1 E>0,\end{cases}
$$

由定理 3.1，得到推论 4.1. ▌

推论 4.1 推广了文[13，14]的相应结论.

参 考 文 献

[1] Wu J H, Zhao X Q, He X Z. Global asymptotic behavior in almost periodic Kolmogorov equations and chemostat models. Nonlin World, 1996, **3**: 589—611

[2] Teng Z D, Chen L S. The positive periodic solutions of periodic Kolmogorove type systems with delays. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1999, **22**: 446—456

[3] 范猛, 王克. 多种群生态竞争系统周期正解的存在性和全局吸引性. 数学学报, 2000, **43**(1): 77—82

[4] Lansun C. Mathematical Models and Methods in Ecology. Beijing:Science Press, 1988(in Chinese)

[5] de Mottoni P, Schiaffino A. Competition system with periodic coefficient:A geometric approach. J Math Biol, 1981, **11**: 319—335

[6] Cushing J M. Two species competition in a periodic environment. J Math Biol, 1980, **10**: 385—400

[7] Cushing J M. Periodic Lotka-Volterra competition equations. J Math Biol, 1986, **24**: 381—403

[8] Ahmad S. On almost periodic solutions of the competing species problems. Proc Amer Math Soc, 1988, **102**: 855—865

[9] Ahmad S. On the nonautonomous Volterra-Lotka competition equations. Proc Amer Math Soc, 1993, **177**: 199—204

[10] Gopalsamy K. Global asymptotic stability in a almost periodic Lotka-Volterra system. J Austral Math Soc(Ser B), 1986, **28**: 346—360

[11] Gopalsamy K. Global asymptotic stability in a periodic Lotka-Volterrasystem. J Austral Math Soc(Ser B), 1985, **27**: 66—72

[12] Alvarz C, Lazer A C. An application of topological degree to the periodic competing species problem. J Austral Math Soc Ser B, 1986, **28**: 202—219

[13] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究. 合肥:安徽科技出版社, 1996

[14] 文贤章. 多种群生态捕食-食饵时滞系统正周期解的全局吸引性. 数学学报, 2002, **45**(1): 83—92

[15] Yang P H, Xu R. Global attractivity of the periodic Lotka-Volterra system. J Math Anal Appl, 1999, **233**: 221—232

[16] Hale J K. Asymptotic behavior of dissipative system. Math Surveys Monographs 25. Amer Math Soc, Rhode Island: Providence, 1988

[17] Zhao X Q. Uniform persistence and periodic coexistence states in infinite-dimensional periodic semiflows with applications. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 1995, **3**(4): 473—495

Global Attractivity of Positive Periodic Solution of Multispecies Ecological Delay System

[1]Wen Xianzhang [2]Wang Zhicheng

([1]*Department of Mathematics*, *Hunan Normal University*, *Changsha* 410081)

([2]*Department of Applied Mathematics*, *Hunan University*, *Changsha* 410082)

Abstract: In this paper, by means of comparison theorem and Liapunov functionals, the authors consider the global attractivity of positive periodic solution of multispecies ecological competition-predator system with several periodic delays. Finally, by using persistence theory, the sufficient and necessary conditions of positive periodic solutions are obtained for predator-prey delay systems.

Key words: Comparison theorem; Competition-predator system; Global attractivity.

MR(2000) Subject Classification: 34C25; 34K15; 92D25