

# 用一维方法计算一些迴转型静电偏转场问题

蒋欣荣  
(浙江大学,杭州)

**摘要** 本文介绍了将一些迴转型静电偏转场问题归结成圆筒模型,给出了用一维方法计算三维静电偏转场的方法,并解决了计算中比较棘手的奇点处理问题。实例计算表明,这种方法简便、精确,具有较大的概括性和实用性。

**关键词** 电子光学;迴转型静电偏转场;一维方法;奇点

## 1. 圆筒模型及其计算方法

图1为理想的迴转型静电偏转场模型,偏转空间电位分布 $\varphi(r, \theta, z)$ 的数学描述为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \\ \varphi(r, \theta, z) \Big|_{\substack{r=R \\ -L \leq z \leq L}} &= f(\theta) = V_x \cos \theta + V_y \sin \theta \\ \varphi(r, \theta, z) \Big|_{\substack{r=0 \\ -\infty < z < +\infty}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $V_x, V_y$ 分别为 $x, y$ 方向的偏转信号,  $R, L$ 分别为偏转器的半径和半长。在实用中,某些静电偏转器的场分布经过适当近似后均可化成(1)式的圆筒模型。如文献[1]的电阻盒式静偏器,以 $R$ 为半径、 $2L$ 为长度的假想内切圆筒上的边界条件就与(1)式相同;文献[2]的两种 $n$ 极静偏器,以“均场条件”选取“调节参数”后,以 $R$ 为半径、 $2L$ 为长度的圆筒上的边界条件也与式(1)相同。因此,研究(1)式圆筒模型的简便计算方法具有较大的概括性和普遍的意义。

经过傅里叶分析<sup>[1,2]</sup>, (1)式的解为

$$\varphi(r, \theta, z) = \phi(r, z) \cos \theta + \psi(r, z) \sin \theta \quad (2)$$

在直角坐标系下, (2)式成为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & -xF(z) + F''(z)x(x^2 + y^2)/8 - yE(z) \\ & + E''(z)y(x^2 + y^2)/8 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\phi(r, z), \psi(r, z)$  分别为 $x, y$ 方向的基波傅里叶函数<sup>[1,2]</sup>;  $F(z), E(z)$ 分别为图1光轴上 $x, y$ 方向的电场强度;  $F''(z), E''(z)$ 分别为 $F(z), E(z)$ 对 $z$ 的二阶导数。电场强度与基波傅里叶函数的关系为

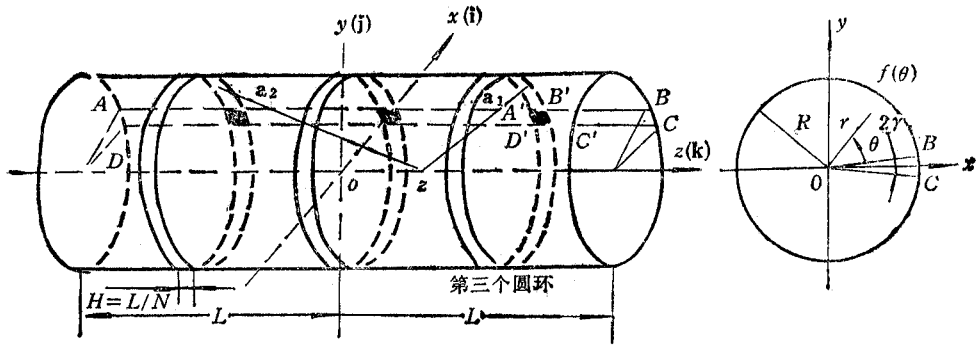


图1 理想的迴转型静电偏转场模型

(图中的第三个圆环应为第*i*个圆环)

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= - \left. \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \right|_{r=0}, \quad E(z) = - \left. \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{V_y}{V_x} F(z) \\ \phi(r, -z) &= \phi(r, z), \quad \phi(r, z) = (V_y/V_x) \phi(r, z) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

可用有限差分法<sup>[1,2]</sup>、有限元法<sup>[3]</sup>、面电荷密度法等计算基波傅里叶函数  $\phi(r, z)$  和  $\phi(r, -z)$ 。但这些方法或须假定封闭边界,引入人为误差;或为二维计算,运算量浩繁。本文采用一维方法计算,不须假定封闭边界。

实际上,图1圆筒模型的面电荷密度  $\sigma(R, \theta, z)$  在  $\theta$  方向上是按正余弦规律分布的,即

$$\begin{aligned} \sigma(R, \theta, z) &= \epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi(r, \theta, z)}{\partial r} \right|_{r=R} \\ &= \epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \right|_{r=R} \cos \theta + \epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \right|_{r=R} \sin \theta \\ &= Q(z) \cos \theta + \Gamma(z) \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

因此,计算  $\sigma(R, \theta, z)$  时,只要计算  $\theta$  取某一值(如  $\theta = 0$ ) 圆筒母线上的线电荷密度  $Q(z)$  或  $\Gamma(z)$  中的一个即可(因(4)式的变换关系)。下面介绍(5)式  $\theta = 0$  时  $Q(z)$  的计算方法(由叠加原理,计算  $Q(z)$  时,可设  $V_y = 0$ )。

在图1中,将圆筒分成  $2N$  个长度为  $H = L/N$  的圆环,计算圆心角  $2\gamma$  足够小时的弧条  $ABCD$  之电荷密度分布。取  $2\gamma$  足够小(如  $\gamma \leq 0.01^\circ$ ) 有两个原因。其一,用以假定图1  $\theta = 0$  时某一圆环的小单元(如第  $i$  个圆环  $A'B'C'D'A'$ ) 的电荷密度分布是均匀的;其二,用以简化下述(13)式推出(15)式的解析表达式。

由电位关系式可直接写出图1直角坐标为

$$\left( R, 0, iH - \frac{H}{2} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

这一点的电位表达式:

$$V_i = \sum_{j=1}^N \frac{2\gamma R H Q_j}{4\pi \epsilon_0 r'_{1ij}} + \sum_{j=1}^N \frac{2\gamma R H Q_j}{4\pi \epsilon_0 r'_{2ij}}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N 2 \int_{\gamma}^{\pi} \frac{Q_j H R \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r'_{1ij}} d\theta + \sum_{j=1}^N 2 \int_{\gamma}^{\pi} \frac{Q_j H R \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r'_{2ij}} d\theta \\
& = \sum_{j=1}^N \frac{R H}{2 \pi \epsilon_0} Q_j \left[ \frac{\gamma}{r'_{1ij}} + \frac{\gamma}{r'_{2ij}} + \int_{\gamma}^{\pi} \cos \theta \left( \frac{1}{r'_{1ij}} + \frac{1}{r'_{2ij}} \right) d\theta \right] \\
& = \sum_{j=1}^N Q'_j A_{ij} \equiv V_x \tag{6}
\end{aligned}$$

可见, (6) 式为一  $N$  阶线性方程组。其中

$$Q'_j = R H Q_j / (2 \pi \epsilon_0) \tag{7}$$

$$A_{ij} = \frac{\gamma}{r'_{1ij}} + \frac{\gamma}{r'_{2ij}} + \int_{\gamma}^{\pi} \cos \theta \left( \frac{1}{r'_{1ij}} + \frac{1}{r'_{2ij}} \right) d\theta \tag{8}$$

$$r'_{2ij} = H(i + j - 1) \tag{9}$$

$$r'_{1ij} = \sqrt{H^2(j - i)^2 + 2R^2(1 - \cos \theta)} \tag{10}$$

$$r'_{2ij} = \sqrt{H^2(i + j - 1)^2 + 2R^2(1 - \cos \theta)} \tag{11}$$

$$r'_{1ij} = H|j - i|, \quad i \neq j \tag{12}$$

当  $i = j$  时, (8) 式系数矩阵出现奇点。

## 2. 奇点处理和电场强度分布

将图 1  $i = j$  时的小单元  $A'B'C'D'A'$  画成图 2, 图中中点  $G$  之电位为

$$\begin{aligned}
\varphi_G & = \frac{Q_i R}{\pi \epsilon_0} \int_0^{\gamma} d\theta \int_0^{\frac{H}{2}} \frac{dz}{\sqrt{4R^2 \sin^2 \theta / 2 + z^2}} \\
& = \frac{Q_i R}{\pi \epsilon_0} \int_0^{\gamma} \ln \frac{H/2 + \sqrt{H^2/4 + 4R^2 \sin^2 \theta / 2}}{2R \sin \theta / 2} d\theta \tag{13}
\end{aligned}$$

由于取  $\gamma$  足够小 (如  $\gamma \leq 0.01^\circ$ ), 则在  $\theta \in [0, \gamma]$  内可取  $\sin \theta / 2 \approx \theta / 2$ , 故 (13) 式积分后

$$\begin{aligned}
\varphi_G & \approx \frac{Q_i R}{\pi \epsilon_0} \left[ \gamma \ln \frac{H/2 + \sqrt{H^2/4 + R^2 \gamma^2}}{R \gamma} \right. \\
& \quad \left. + \frac{H}{2R} \ln \frac{R \gamma + \sqrt{H^2/4 + R^2 \gamma^2}}{H/2} \right] \tag{14}
\end{aligned}$$

由 (14) 式可得 (8) 式  $r'_{1ij} (i = j)$  之等效值为

$$r'_{1ij} = \frac{\gamma \cdot H/2}{\gamma \ln \frac{H/2 + \sqrt{H^2/4 + R^2 \gamma^2}}{R \gamma} + \frac{H}{2R} \ln \frac{R \gamma + \sqrt{H^2/4 + R^2 \gamma^2}}{H/2}} \tag{15}$$

综上所述, (8) 式的系数矩阵被完全确定之后, 即可计算 (6) 式的线性方程组, 求解  $Q'_i (i = 1, 2, \dots, N)$ , 进而计算 (3) 式光轴上  $x$  方向的电场强度  $F(x)$ , 即

$$F(x) = \sum_{i=1}^N 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_i R H \cos \theta d\theta}{4 \pi \epsilon_0 |\alpha_i|^2} \cos(\alpha_i \cdot i)$$

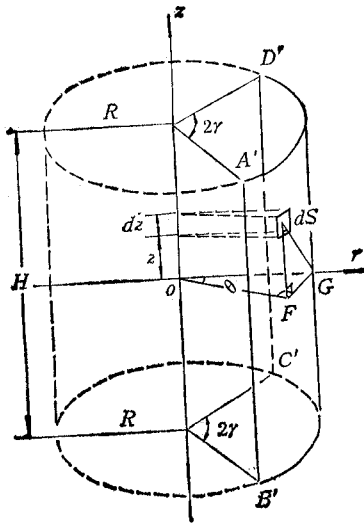
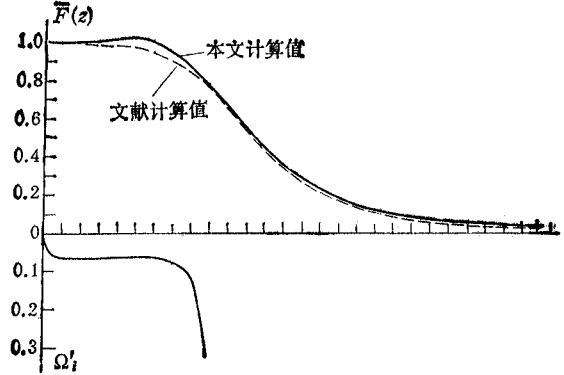


图2 图1A'B'C'D'A'小单元

图3 两种方法计算的光轴电场强度的比较  
(图中的横轴为z轴,1格为1)

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^N 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_i H R \cos \theta d\theta}{4 \pi \epsilon_0 |\alpha_2|^2} \cos(\alpha_2 \cdot i) \\
 = & \sum_{i=1}^N \frac{R H Q_i}{4 \pi \epsilon_0} \left\{ \frac{\pi R}{[R^2 + (iH - H/2 - z)^2]^{3/2}} \right. \\
 & \left. + \frac{\pi R}{[R^2 + (iH - H/2 + z)^2]^{3/2}} \right\} \\
 = & \frac{\pi R}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \left\{ \frac{1}{[R^2 + (iH - H/2 - z)^2]^{3/2}} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{[R^2 + (iH - H/2 + z)^2]^{3/2}} \right\} \quad (16)
 \end{aligned}$$

一旦确定了  $F(z)$  后,即可按(4)式关系得到光轴上  $y$  方向电场强度  $E(z)$ ,从而确定了图1偏转场分布(3)式。(3)式不含偏转场的横向分量,其三级几何偏转像差系数公式非常简单<sup>[2,4]</sup>。

### 3. 计算结果和讨论

实例计算取图1  $L=9, R=6, \gamma=0.5^\circ$ ,并将半长  $L$  分成30个小圆环, $y$  方向偏转信号  $V_y=0, x$  方向偏转信号  $V_x=$  任意值。考察  $x$  方向归一化电场强度  $\bar{F}(z) = F(z)/F(0)$  与文献[1,2]有限差分法计算结果的差别,则计算结果如图3和表1所示;图中还画出了图1  $\theta=0$  之母线上的电荷密度  $\Omega'_i$  随  $z$  的变化规律。文献计算中,以  $r=4R, z=4L$  作封闭边界,网格结点数目取2400,超松弛迭代,迭代收敛精度为  $10^{-4}$ 。从表1和图3实例计算比较中可得如下结论:

- (1) 本文计算结果和文献计算结果的趋势完全一样,但本文一维计算方法更简单。
- (2) 两种方法均为近似算法,其与实际值的差别有下列原因:差分方法中,首先要

表 1 一维方法和有限差分法计算的规一化电场强度比较

变量 $\alpha$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
本文 $\bar{F}(\alpha)$	1.0000	1.0139	0.9872	0.7785	0.4453	0.2244	0.1193	0.0693	0.0436	0.0293
文献 $\bar{F}(\alpha)$	1.0000	0.9926	0.9421	0.7450	0.4233	0.2053	0.1015	0.0532	0.0290	0.0162

引入人为的封闭边界,并假定这个边界的数值为零,实际上这种边界应在“无穷远”;只能选取有限个网格结点数目;迭代法近似求解方程组;利用离散的基波傅里叶函数近似求数值微分获得电场强度。一维方法中,实际计算时不可能将夹角  $\gamma$  取得无穷小,只能取得足够小;图 1 小单元只能选取有限个。比较两种计算方法,一维方法比差分方法的近似步骤少,近似程度低;如设一维方法线性方程组数目为  $N$ ,则差分方法的线性方程组数目一般达  $(4N)^2$  之多。因此,只要在一维方法中将  $\gamma$  取得足够小(如  $\gamma \leq 0.01^\circ$ ),就能获得与实际数值相差很小的结果;由图 3 和表 1 可见,即使取  $\gamma = 0.5^\circ$ ,也可获得比较满意的结果。

## 参 考 文 献

- [1] 蒋欣荣,微细加工技术,1987年,第3—4期,第14页;或 Jiang Xinrong, *J. Vac. Sci. Technol.*, B6 (1988), 422.  
 [2] 蒋欣荣,那兆凤,微细加工技术,1986年,第2期,第6页;或 Jiang Xinrong, Na Zhaofeng, *J. Vac. Sci. Technol.*, B5(1987), 156.  
 [3] E. Munro et al., *Optik*, 60(1982), 1.  
 [4] 蒋欣荣,那兆凤,电子学报,1987年,第6期,第98页。

## CALCULATION OF ROTATIONAL ELECTROSTATIC DEFLECTION FIELDS BY USING ONE-DIMENSIONAL METHOD

Jiang Xinrong

(Zhejiang University, Hangzhou)

**Abstract** Calculation of some rotational electrostatic deflection fields by the use of one dimensional method is put forward, and the difficulty in singular point has been overcome. The calculation example shows that the method is simple and practical.

**Key words** Electron optics; Rotationally electrostatic deflection fields; One-dimensional method; Singular point