应用概率统计 第二十五卷
第四期 2009年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.25 No.4 Aug. 2009

一类终端财富期望效用最大化问题: 通货膨胀情形 *

王光臣
(山东师范大学数学科学学院, 济南, 250014)

吴 臻
(山东大学数学学院, 济南, 250100)

摘 要

本文研究了一类受通货膨胀影响的终端财富期望效用最大化问题. 对常数相对风险厌恶(CRRA)情形的效用函数, 用直接构造的方法得到了代理人的显式最优投资策略和最大期望效用, 并给出其经济含义. 该思想来自线性二次最优控制问题中的完全平方技术. 根据股票价格和通货膨胀率的历史数据, 我们用SAS软件估计出模型中参数的近似值, 并给出代理人的最优投资策略和最大期望效用.

关键词: 效用最大化, 常数相对风险厌恶(CRRA), 通货膨胀, 居民消费价格总指数, 投资组合.

学科分类号: O211.63.

§1. 基本模型和问题的阐述

在现代经济社会中, 通货膨胀无疑已成为一种顽疾, 不论是发达国家还是发展中国家, 都不同程度上存在着通货膨胀. 通货膨胀往往造成物价上涨, 居民实际收入下降, 经济和政治不安定等等. 一个自然的问题是, 当金融市场受到通货膨胀影响时, 代理人应该怎样规避风险? 这是每个代理人都关心的问题, 也是金融数学中的一个重要研究课题.

本文研究一类受通货膨胀影响的终端财富期望效用最大化问题. 我们首先给出金融市场中的一些基本模型, 然后阐述要研究的问题. 考虑一个受通货膨胀影响的金融市场. 我们用完备概率空间$(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathsf{P})$刻画这一金融市场中的风险, 这里$\mathcal{F}_t=\sigma\{B_s,W_s;0\leq s\leq t\}$, $0\leq t\leq T$是满足通常条件的自然信息流, (B_t)和(W_t)是定义在该空间上的两个一维标准布朗运动, $T>0$是固定常数. 假定这两个布朗运动线性相关, 其相关系数恒为$-1\leq\rho\leq1$.

假定通货膨胀率是随机的, 且t时刻的价格水平Q_t满足下列随机微分方程

$$\mathrm{d}Q_t=Q_t(\alpha_t\mathrm{d}t+\beta_t\mathrm{d}W_t),\tag{1.1}$$

其中

$$\alpha_t=\lim_{\delta\downarrow0}\mathsf{E}\Big(\frac{Q_{t+\delta}-Q_t}{\delta Q_t}\Big),\qquad \beta_t^2=\lim_{\delta\downarrow0}\mathsf{E}\Big[\frac{1}{\delta}\Big(\frac{Q_{t+\delta}-Q_t}{Q_t}-\delta\alpha_t\Big)^2\Big]$$

分别表示t时刻通货膨胀率的预期增长率和波动率. 不失一般性, 假定$Q_0=1$, 即初始时刻不存在通货膨胀. 关于该种通货膨胀率数学模型的进一步解释, 可参见Malliaris和Brock [1].

*国家自然科学基金(10671112)、国家重点基础研究发展计划(973项目: 2007CB814904)、山东省自然科学基金(JQ200801和2008BS01024)和教育部博士点基金资助.

本文2005年10月27日收到, 2008年11月17日收到修改稿.

假定一代理人在市场上仅有两种投资选择. 一种是债券(银行存款), 其名义价格满足

$$\mathrm{d}P_t^0 = r_t P_t^0 \mathrm{d}t, \qquad P_0^0 = p_0, \tag{1.2}$$

其中r_t是t时刻的名义利率, $p_0 > 0$是常数; 另一种是股票, 其名义价格满足

$$\mathrm{d}P_t^1 = P_t^1(\mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}B_t), \qquad P_0^1 = s_0, \tag{1.3}$$

这里μ_t是t时刻股票的名义预期收益率, σ_t是名义波动率, $s_0 > 0$是常数. 假定$\sigma_t > 0$, $\beta_t > 0$, α_t, r_t, μ_t, $0 \le t \le T$是有界确定性的, σ_t^{-1}存在且有界.

若约定使用同一货币单位表示P_t^0, P_t^1, Q_t, 则$U_t = P_t^0/Q_t$, $V_t = P_t^1/Q_t$分别是将t时刻债券和股票的名义价格转化成不受通货膨胀影响时的价格, 即, 实际价格. 由Itô公式容易得

$$\mathrm{d}U_t = U_t[(r_t + \beta_t^2 - \alpha_t)\mathrm{d}t - \beta_t \mathrm{d}W_t], \qquad U_0 = p_0, \tag{1.4}$$

$$\mathrm{d}V_t = V_t[(\mu_t + \beta_t^2 - \alpha_t - \rho\sigma_t\beta_t)\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}B_t - \beta_t \mathrm{d}W_t], \qquad V_0 = s_0, \tag{1.5}$$

其中$r_t + \beta_t^2 - \alpha_t$, $\mu_t + \beta_t^2 - \alpha_t - \rho\sigma_t\beta_t$分别是将单位货币投入到债券和股票上所产生的预期收益率, 它们可以取负值, 我们将其解释为, 受通货膨胀的影响, 单位货币投入的收益率负增长. ρ是两个布朗运动(B_t)和(W_t)间的线性相关系数, 它反映了影响股票和通货膨胀率的两个噪声源间的相关程度.

假定用$X_t^{\pi,x}$表示代理人t时刻的财富, π_t是投资于股票的财富, 它是$\mathcal{F}_t$适应的, 且满足$\mathsf{E}\displaystyle\int_0^T \pi_t^2 \mathrm{d}t < +\infty$. 若代理人采用自融资交易策略, 则他/她应将$X_t^{\pi,x} - \pi_t$存入银行. 由以上假定和记号, 我们有

$$\mathrm{d}X_t^{\pi,x} = \pi_t \frac{\mathrm{d}V_t}{V_t} + (X_t^{\pi,x} - \pi_t)\frac{\mathrm{d}U_t}{U_t}.$$

因此, 对于一个初始财富为$x > 0$的投资者来说, 他/她在t时刻的财富应满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{\pi,x} = [\pi_t(\mu_t + \beta_t^2 - \alpha_t - \rho\sigma_t\beta_t) + (X_t^{\pi,x} - \pi_t)(r_t + \beta_t^2 - \alpha_t)]\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad +\pi_t\sigma_t \mathrm{d}B_t - X_t^{\pi,x}\beta_t \mathrm{d}W_t, \\ X_0^{\pi,x} = x, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中$\pi_t(\mu_t + \beta_t^2 - \alpha_t - \rho\sigma_t\beta_t)$和$\pi_t^2\sigma_t^2$分别表示投资者将$\pi_t$单位的财富投资到股票上所产生的预期收益率和由影响股票价格变化的噪声源布朗运动B所产生的财富变化方差率, $(X_t^{\pi,x} - \pi_t)(r_t + \beta_t^2 - \alpha_t)$表示将$X_t^{\pi,x} - \pi_t$单位的财富投资到债券上所产生的预期收益率, 而$(X_t^{\pi,x}\beta_t)^2$则表示由影响通货膨胀率的噪声源布朗运动$W$所产生的财富变化方差率.

我们给出下列定义.

定义 1.1 一个投资策略π被称为关于初始财富x容许的, 若对任意的$0 \le t \le T$, 都有$X_t^{\pi,x} \ge 0$成立. 我们把所有容许策略组成的集合记为$\mathcal{U}_{ad}(x)$.

定义 1.2　一个函数$f(x)$被称为效用函数, 若$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续可微、严格增、严格凹, 且满足Inada条件

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=+\infty,\qquad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=0.$$

代理人的目的是, 寻找$\pi^*\in\mathcal{U}_{ad}(x)$, 使得

$$J(\pi^*;0,x)=\max_{\pi\in\mathcal{U}_{ad}(x)}\mathsf{E}[f(X_T^{\pi,x})]. \tag{1.7}$$

此时, 称π^*是最优的, $X^{\pi^*,x}$和$J(\pi^*;0,x)$是相应的最优财富和最大期望效用.

财富方程(1.6)在指标泛函(1.7)下构成一类随机最优控制问题. 一般来说, 可用下列几种方法处理该类优化问题: 随机动态规划原理方法(参见Merton [2]), 鞅和凸对偶方法(参见Pliska [3])等. 然而, 对于我们的问题, 文献[2, 3]介绍的方法都比较繁琐. 在下一节, 我们将采用一种直接构造的技术(参见Wu和Xu [4]), 非常方便地得到CRRA效用代理人的显式最优投资策略和最大期望效用, 并给出明确的经济学解释. 最后, 根据股票价格和通货膨胀率的历史数据, 我们用SAS软件估计出模型(1.1)和(1.3)中的各参数值, 并给出投资者的最优投资策略和最大期望效用.

§2.　CRRA情形

在这一小节, 对CRRA情形的效用函数, 运用线性二次最优控制问题中的完全平方技术, 我们构造出了显式的最优投资策略和期望效用, 同时讨论其对模型中各参数的灵敏度.

令$f(X_T^{\pi,x})=K[X_T^{\pi,x^{1-\lambda}}/(1-\lambda)]$, 其中$K$是正的常数, $0<\lambda<1$是相对风险厌恶Pratt-Arrow测度(参见Karatzas和Shreve [5]), 它反映了投资者对股票投资风险的态度. 下面我们来计算最优投资策略π^*和$J(\pi^*;0,x)$.

令$\theta_t>0$是有界确定性函数, 其满足的方程由(2.3)式给出. 对$\theta_t[X_t^{\pi,x^{1-\lambda}}/(1-\lambda)]$用Itô公式,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Big(\theta_t\frac{X_t^{\pi,x^{1-\lambda}}}{1-\lambda}\Big)\;=\;&\theta_tX_t^{\pi,x^{-\lambda}}\Big[\pi_t(\mu_t-r_t-\rho\sigma_t\beta_t)+X_t^{\pi,x}(\beta_t^2+r_t-\alpha_t)\\&-\frac{1}{2}\lambda X_t^{\pi,x^{-1}}(\pi_t^2\sigma_t^2+X_t^{\pi,x^2}\beta_t^2-2\rho\pi_tX_t^{\pi,x}\sigma_t\beta_t)\Big]\mathrm{d}t\\&+\dot{\theta}_t\frac{X_t^{\pi,x^{1-\lambda}}}{1-\lambda}\mathrm{d}t+\theta_tX_t^{\pi,x^{-\lambda}}\pi_t\sigma_t\mathrm{d}B_t-\theta_tX_t^{\pi,x^{1-\lambda}}\beta_t\mathrm{d}W_t,\end{aligned}$$

将上式两端由0到T积分并取数学期望得

$$0=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\theta_0\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}-\mathsf{E}\Big(\theta_T\frac{X_T^{\pi,x^{1-\lambda}}}{1-\lambda}\Big), \tag{2.1}$$

其中

$$\mathrm{I} := -\mathsf{E}\int_0^T \frac{\lambda\theta_t\sigma_t^2}{2X_t^{\pi,x\,1+\lambda}}\Big(\pi_t - \frac{\mu_t - r_t - (1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t}{\lambda\sigma_t^2}X_t^{\pi,x}\Big)^2\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{II} := \mathsf{E}\int_0^T \frac{X_t^{\pi,x\,1-\lambda}}{1-\lambda}\Big\{\dot{\theta}_t+(1-\lambda)\Big[\Big(1-\frac{1}{2}\lambda\Big)\beta_t^2+r_t-\alpha_t+\frac{(\mu_t-r_t-(1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t)^2}{2\lambda\sigma_t^2}\Big]\theta_t\Big\}\mathrm{d}t.$$

注意到(2.1)式, 易知

$$\mathsf{E}\Big[K\frac{X_T^{\pi,x\,1-\lambda}}{1-\lambda}\Big] = \mathsf{E}\Big[K\frac{X_T^{\pi,x\,1-\lambda}}{1-\lambda} - \theta_T\frac{X_T^{\pi,x\,1-\lambda}}{1-\lambda}\Big] + \theta_0\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \mathrm{I} + \mathrm{II}. \tag{2.2}$$

若令

$$\begin{cases}\dot{\theta}_t + (1-\lambda)\Big[\Big(1-\frac{1}{2}\lambda\Big)\beta_t^2 + r_t - \alpha_t + \frac{(\mu_t-r_t-(1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t)^2}{2\lambda\sigma_t^2}\Big]\theta_t = 0,\\ \theta_T = K,\end{cases} \tag{2.3}$$

则(2.2)式可改写为

$$\mathsf{E}\Big[K\frac{X_T^{\pi,x\,1-\lambda}}{1-\lambda}\Big] = \theta_0\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \mathrm{I}, \tag{2.4}$$

其中

$$\theta_0 = K\exp\Big\{\int_0^T(1-\lambda)\Big[\Big(1-\frac{1}{2}\lambda\Big)\beta_s^2+r_s-\alpha_s+\frac{(\mu_s-r_s-(1-\lambda)\rho\sigma_s\beta_s)^2}{2\lambda\sigma_s^2}\Big]\mathrm{d}s\Big\} > 0. \tag{2.5}$$

下面寻找$\pi^* \in \mathcal{U}_{ad}(x)$, 使得(2.4)式取得最大值. 显然, 只需使I取得最大值即可. 令

$$g(\pi_t) = -\frac{\lambda\theta_t\sigma_t^2}{2X_t^{\pi,x\,1+\lambda}}\Big(\pi_t - \frac{\mu_t-r_t-(1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t}{\lambda\sigma_t^2}X_t^{\pi,x}\Big)^2,$$

因为$-\lambda\theta_t\sigma_t^2/(2X_t^{\pi,x\,1+\lambda}) < 0$, 所以若取

$$\pi_t^* = \frac{\mu_t-r_t-(1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t}{\lambda\sigma_t^2}X_t^{\pi,x}, \tag{2.6}$$

则$g(\pi_t^*) = \max\limits_{\pi_t\in\mathcal{U}_{ad}(x)} g(\pi_t) = 0$, 即$\mathrm{I}_{\max} = 0$. 将(2.6)代入(1.6)得

$$\begin{aligned} X_t^{\pi,x} &= x\exp\Big\{\int_0^t h(\lambda,\rho,r_s,\mu_s,\sigma_s,\alpha_s,\beta_s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\mu_s-r_s-(1-\lambda)\rho\sigma_s\beta_s}{\lambda\sigma_s}\mathrm{d}B_s - \int_0^t \beta_s\mathrm{d}W_s\Big\} \\ &> 0, \end{aligned}$$

这里h是关于$\lambda,\rho,r_s,\mu_s,\sigma_s,\alpha_s,\beta_s$的有界确定性函数. 显然$\pi_t^*$是容许的, 因此

$$J(\pi^*;0,x) = \max_{\pi\in\mathcal{U}_{ad}(x)}\mathsf{E}\Big(K\frac{X_T^{\pi,x\,1-\lambda}}{1-\lambda}\Big) = \theta_0\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

总结以上, 我们得到本文主要定理.

定理 2.1 在第一节给定的假设下, 具有CRRA效用的代理人的最优投资策略和最大期望效用分别是

$$\pi_t^* = \frac{\mu_t - r_t - (1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t}{\lambda\sigma_t^2} X_t^{\pi^*,x}, \qquad J(\pi^*;0,x) = \theta_0 \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}, \tag{2.7}$$

其中θ_0由(2.5)式给出.

下面我们运用市场投资学理论对最优投资比例和最大期望效用加以分析, 并给出经济学解释. 由(2.7)式得

$$\frac{\pi_t^*}{X_t^{\pi^*,x}} = \frac{1}{\sigma_t^2}\left[\frac{\mu_t - r_t - \rho\sigma_t\beta_t}{\lambda} + \rho\sigma_t\beta_t\right] = H_1 + H_2,$$

其中

$$H_1 = \frac{1}{\lambda\sigma_t^2}(\mu_t - r_t - \rho\sigma_t\beta_t), \qquad H_2 = \frac{1}{\sigma_t^2}\rho\sigma_t\beta_t.$$

我们将H_1称为“投机需求”, 它依赖于投资者的相对风险厌恶Pratt-Arrow测度λ; H_2被称为“对冲需求”, 它独立于投资者对风险的态度. H_1中的项$\mu_t - r_t$反映了股票投资受到其收益率是否高于银行利率的影响. H_1和H_2中的项$\rho\sigma_t\beta_t$则反映了股票市场和通货膨胀率波动的相关程度. 根据定理2.1, 若$\mu_t - r_t \geq (1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t + \lambda\sigma^2$, 则代理人应从银行贷款$\{[\mu_t - r_t - (1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t]/(\lambda\sigma_t^2) - 1\}\cdot X_t^{\pi^*,x}$单位, 并将它投资于股票; 若$(1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t \leq \mu_t - r_t < (1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t + \lambda\sigma^2$, 代理人应把$\{[\mu_t - r_t - (1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t]/(\lambda\sigma_t^2)\}\cdot X_t^{\pi^*,x}$单位的财富投资于股票, 其余的存入银行; 若$\mu_t - r_t < (1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t$, 代理人应卖空价值为$\{[r_t + (1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t - \mu_t]/(\lambda\sigma_t^2)\}\cdot X_t^{\pi^*,x}$单位的股票, 而将$\{1 - [\mu_t - r_t - (1-\lambda)\rho\sigma_t\beta_t]/(\lambda\sigma_t^2)\}\cdot X_t^{\pi^*,x}$单位的财富存入银行. (2.7)式中的最大期望效用则反映了一个具有CRRA效用的投资者如果采用π^*的投资策略, 那么他/她在$[0,T]$的投资期限内所获得的最优财富累加效用的最大均值为$J(\pi^*;0,x)$. 关于最优投资策略和最大期望效用的解释, 也可参见Wu和Wei [6].

接下来, 我们给出两个数值算例以展示定理2.1的应用.

例 2.1 令$r_t = 0.10$, $\mu_t = 0.125$, $\sigma_t = 0.3$, $\alpha_t = 0.05$, $\beta_t = 0.2$, $\lambda = 0.5$, $\rho = -0.5$. 根据定理2.1, 最优投资比例$\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x} = 8/9$. 此时, 投资者应购买价值$(8/9)X_t^{\pi^*,x}$单位的股票, 并把$(1/9)X_t^{\pi^*,x}$单位的财富存入银行. 期望效用为$J(\pi^*;0,x) = 2Kx^{1/2}\mathrm{e}^{0.04889T}$.

例 2.2 令$r_t = 0.10$, $\mu_t = 0.119$, $\sigma_t = 0.3$, $\alpha_t = 0.05$, $\beta_t = 0.2$, $\lambda = 0.5$, $\rho = 0.8$. 根据定理2.1, 最优投资比例$\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x} = -1/9$. 最优投资策略是卖空价值为$(1/9)X_t^{\pi,x}$单位的股票, 并将$(10/9)X_t^{\pi,x}$单位的财富存入银行. 期望效用为$J(\pi^*;0,x) = 2Kx^{1/2}\mathrm{e}^{0.04014T}$.

最后, 我们研究最优投资比例和最大期望效用与模型中一个参数的关系, 此时总假定模型中其它参数不变. 这通常被称为最优投资比例和最大期望效用关于参数的灵敏度(参见[6]). 若假定定理2.1的条件成立, 则很容易得到下列两个系.

系 2.1 最优投资比例$\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}$不依赖于α_t. 当$\rho=0$时, 通货膨胀存在与否不会影响$\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}$的大小; 但当$\rho\neq 0$时, $\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}$与β_t密切相关. 代理人的最大期望效用$J(\pi^*;0,x)$同时受到α_t,β_t的影响. 确切地说, 若α_t增大, 则$J(\pi^*;0,x)$减小; 当$-1\leq\rho<0$且$\mu_t\geq r_t$时, 若β_t增大, 则$J(\pi^*;0,x)$增大.

证明: 仅给出主要步骤. $\partial J(\pi^*;0,x)/\partial\alpha_t=-\theta_0x^{1-\lambda}T<0$. 当$-1\leq\rho<0$且$\mu_t\geq r_t$时,

$$\frac{\partial J(\pi^*;0,x)}{\partial\beta_t}=\theta_0x^{1-\lambda}\int_0^T\Big[(2-\lambda)\beta_t+\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}\rho^2\beta_t+\Big(\frac{1}{\lambda}-1\Big)(r_t-\mu_t)\frac{\rho}{\sigma_t}\Big]\mathrm{d}t>0.$$

□

系 2.2 当股票的预期收益率μ_t增大时, 为了获得最大期望效用, 代理人应当增大其在股票上的投资比例$\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}$; 当利率r_t和线性相关系数ρ其中之一增大时, 代理人应当减少$\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}$; 当$-1\leq\rho<0$时, 若β_t增加, 代理人应增大其在股票上的投资比例; 当$0<\rho\leq 1$时, 若β_t增加, 代理人应减少$\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}$.

证明: 仅给出主要步骤.

$$\frac{\partial\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}}{\partial\mu_t}=\frac{1}{\lambda\sigma_t^2}>0,\quad \frac{\partial\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}}{\partial r_t}=-\frac{1}{\lambda\sigma_t^2}<0,\quad \frac{\partial\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}}{\rho}=\Big(1-\frac{1}{\lambda}\Big)\frac{\beta_t}{\sigma_t}<0.$$

当$-1\leq\rho<0$时,

$$\frac{\partial\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}}{\partial\beta_t}=\Big(1-\frac{1}{\lambda}\Big)\frac{\rho}{\sigma_t}>0;$$

当$0<\rho\leq 1$时,

$$\frac{\partial\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x}}{\partial\beta_t}=\Big(1-\frac{1}{\lambda}\Big)\frac{\rho}{\sigma_t}<0.$$

□

§3. 估计模型参数

在这一小节, 如果假定模型(1.1)和(1.3)中的参数$\alpha,\beta,\mu,\sigma,\rho$均为常数, 那么根据$Q,P^1$的历史数据, 借助SAS统计软件, 我们可以估计出它们的近似值, 并给出具有CRRA效用的代理人的显式投资策略和最大期望效用.

根据(1.1)式得

$$\mathrm{d}\ln Q_t=\Big(\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\Big)\mathrm{d}t+\beta\mathrm{d}W_t,$$

其离散形式为

$$\ln Q_{t+\Delta t}-\ln Q_t=\Big(\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\Big)\Delta t+\beta\varepsilon_1\sqrt{\Delta t},\tag{3.1}$$

其中$\Delta t>0$, 且随机变量ε_1服从标准正态分布, 即$\varepsilon_1\sim N(0,1)$, 显然

$$Y_{t+\Delta t}:=\ln\frac{Q_{t+\Delta t}}{Q_t}\sim N\Big(\Big(\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\Big)\Delta t,\beta^2\Delta t\Big).$$

在Q的历史数据中, 以月为时间单位, 连续取出某$n+1$个月的月度通货膨胀率的一个可能时间序列, 这样就形成了来自母体Y的容量为n的子样$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$. 若记子样均值和子样标准差分别为

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\qquad S_Y=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-\frac{1}{n(n-1)}\Big(\sum_{i=1}^{n}Y_i\Big)^2},$$

则根据矩估计法的基本思想, 我们有

$$\overline{Y}=\mathsf{E}Y_{t+\Delta t}=\Big(\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\Big)\Delta t,\qquad S_Y=\sqrt{\mathsf{D}Y_{t+\Delta t}}=\beta\sqrt{\Delta t},$$

解之得

$$\widehat{\alpha}=\frac{\overline{Y}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\widehat{\beta}^2,\qquad \widehat{\beta}=\frac{S_Y}{\sqrt{\Delta t}},\tag{3.2}$$

其中$\overline{Y}$和估计$\widehat{\beta}$的标准误差分别近似为$S_{\overline{Y}}=S_Y/\sqrt{n}$和$S_{\widehat{\beta}}=\widehat{\beta}/\sqrt{2n}$.

同理, 由(1.3)式可知,

$$Z_{t+\Delta t}:=\ln S_{t+\Delta t}-\ln S_t=\Big(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\Big)\Delta t+\sigma\varepsilon_2\sqrt{\Delta t},\tag{3.3}$$

其中$\Delta t>0$, 且$\varepsilon_2\sim N(0,1)$, 因此

$$\widehat{\mu}=\frac{\overline{Z}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\widehat{\sigma}^2,\qquad \widehat{\sigma}=\frac{S_Z}{\sqrt{\Delta t}},\tag{3.4}$$

其中

$$\overline{Z}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Z_j,\qquad S_Z=\sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}Z_j^2-\frac{1}{m(m-1)}\Big(\sum_{j=1}^{n}Z_j\Big)^2},$$

$(Z_1,Z_2,\cdots,Z_m)$是来自P^1的容量为m的子样, 这里$\overline{Z}$和估计$\widehat{\sigma}$的标准误差分别近似为$S_{\overline{Z}}=S_Z/\sqrt{m}$和$S_{\widehat{\sigma}}=\widehat{\sigma}/\sqrt{2m}$.

注意到(3.1)和(3.3)两式, 并结合协方差的性质易知

$$\widehat{\rho}=\rho_{\varepsilon_1\varepsilon_2}=\rho_{YZ}.\tag{3.5}$$

下面的任务是: 按照上述规则, 采集Q, P^1的历史数据, 运用SAS软件估计出$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma}$和$\widehat{\rho}$, 并给出代理人的显式最优投资策略和最大期望效用.

假定用居民消费价格总指数(CPI)衡量通货膨胀率. 为了方便起见, 我们取$m=n=12$, $\Delta t=1$ (单位: 月), 下面的表1列出了丹麦2002年每月Q, P^1的12对可能时间序列数据.

表1 丹麦2002年每月通货膨胀率和股票价格列表

No.	Q_i	Y_i	P_j^1	Z_j	No.	Q_i	Y_i	P_j^1	Z_j
0	103.1		10.0		6	104.7	-0.00286	10.5	0.16532
1	103.8	0.00677	8.7	-0.13926	7	104.8	0.00094	12.0	0.13353
2	104.5	0.00672	7.8	-0.10920	8	105.4	0.00571	13.6	0.12516
3	104.9	0.00382	6.5	-0.18232	9	105.6	0.00190	15.3	0.11778
4	105.0	0.00095	8.0	0.20764	10	105.6	0.00000	16.5	0.07551
5	105.0	0.00000	8.9	0.10661	11	105.6	0.00000	18.6	0.11980

用SAS软件处理表1中的数据, 得到如下结果,

$$\overline{Y}=0.00218,\qquad S_Y^2=0.00001,\qquad S_Y=0.00316,$$
$$\overline{Z}=0.05642,\qquad S_Z^2=0.01788,\qquad S_Z=0.13371,$$

这里估计$\overline{Y}$, $\overline{Z}$的标准误差分别近似为

$$S_{\overline{Y}}=\frac{S_Y}{\sqrt{11}}=0.00095,\qquad S_{\overline{Z}}=\frac{S_Z}{\sqrt{11}}=0.04031.$$

由(3.2)和(3.4)两式容易得到

$$\widehat{\alpha}=0.00219,\qquad \widehat{\beta}=0.00316,\qquad \widehat{\mu}=0.06536,\qquad \widehat{\sigma}=0.13371,$$

其中$\widehat{\beta}$, $\widehat{\sigma}$的标准误差近似为

$$S_{\widehat{\beta}}=\frac{\widehat{\beta}}{\sqrt{22}}=0.00067,\qquad S_{\widehat{\beta}}=\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{22}}=0.02851.$$

下面仅需要计算ρ_{YZ}, SAS软件输出结果如下表2所示.

表2 Pearson相关系数表

THE CORR Procedure

2 Variables: Y Z

Pearson Correlation Coefficients, $N=11$

Prob $>|\rho_{YZ}|$ under $H_0:\rho=0$

	Y		Z	
Y		1.00000	-0.69567	0.01740
Z	-0.69567	0.01740		1.00000

结果分析: 在0.05的显著性检验水平下, 因为$p = 0.01740 < 0.05$, 所以应该拒绝原假设H_0, 即$\rho_{YZ} = -0.69567$是合理的, 从而由(3.5)式知$\widehat{\rho} = -0.69567$.

若取$r = 0.05$, $\lambda = 0.5$, 则代理人的最优投资比例为$\pi_t^*/X_t^{\pi^*,x} = 1.73490$, 投资策略为从银行贷款$0.73490X_t^{\pi^*,x}$单位并投资于股票, 最大期望效用为$J(\pi^*;0,x) = 2Kx^{1/2}\mathrm{e}^{0.03064T}$.

参 考 文 献

[1] Malliaris, A.G. and Brock, W.A., *Stochastic Methods in Economics and Finance*, Elsevier Science, New York, 1999.

[2] Merton, R.C., Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case, *Rev. Econ. Statist.*, **51**(1969), 247–257.

[3] Pliska, S.K., A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolio, *Math. Oper. Res.*, **11**(1986), 371–382.

[4] Wu, Z. and Xu, W.S., A direct method in optimal portofolio and consumption choise, *Appl. Math.-JCU*, **11B**(1996), 349–354.

[5] Karatzas, I. and Shreve, S.E., *Methods of Mathematical Finance*, Springer, New York, 1998.

[6] Wu, Z. and Wei, G., One kind of optimal international security investment portfolio and consumption choice problem, *Acta Automatica Sinica*, **29**(2003), 673–680.

A Kind of Problem of Maximizing the Expected Utility from the Terminal Wealth: the Case of Inflation

Wang Guangchen

(*School of Mathematical Sciences, Shandong Normal University, Jinan, 250014*)

Wu Zhen

(*School of Mathematics, Shandong University, Jinan, 250100*)

This paper is concerned with a kind of problem of maximizing the expected utility from the terminal wealth in the case of inflation. For a class of CRRA utility, we obtain by a direct method an agent's explicit optimal portfolio strategy and the corresponding maximum expected utility. Moreover, we give some economical interpretations. This idea comes from the completion-of-square technique of linear quadratic optimal control problems. In Section 3, based on the history data of the stock price and the inflation rate, the values of the parameters in models are estimated with SAS software. And then, the explicit optimal portfolio strategy and the maximum expected utility are also given.

Keywords: Utility maximization, CRRA, inflation, CPI, portfolio.

AMS Subject Classification: 60H10.