应用概率统计　第二十五卷
第四期　2009年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.25 No.4 Aug. 2009

随机捕食–被捕食模型

张术林
(中山大学工商管理博士后科研流动站, 广发证券有限公司, 广州, 510075)

魏正红
(深圳大学师范学院数学系, 深圳, 518000)

摘　要

本文建立了一类二维非线性生灭捕食–被捕食模型. 利用概率母函数, 我们得到其均值过程所满足的偏微分方程组, 并证明了捕食者和被捕食者以概率1灭绝.

关键词: 捕食–被捕食模型, 生灭过程, 概率母函数, 灭绝概率.

学科分类号: O211.62.

§1. 引　　言

捕食–被捕食关系是生物链中最重要的关系之一. 最早对这种关系进行定量描述的是Lotka-Volterra模型[1, 2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = \alpha X_t - \beta X_t Y_t, \\ \dfrac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}t} = -\gamma Y_t + \delta X_t Y_t. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中X_t和Y_t分别为t时被捕食者与捕食者数量. $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$. α代表被捕食者内在的繁殖率; β代表被捕食者死率, 显然被捕食者和捕食者数量越多其死亡几率越大; γ代表捕食者死亡率; δ代表捕食者的繁殖率, 显然其食物越丰富(被捕食者数量越多), 繁殖速度越快.

Lotka-Volterra模型非常简单的描述了捕食者和被捕食者间的交互作用. 许多学者对此模型进行修正, 建立了各种各样的捕食–被捕食模型[3]. 在模型(1.1)中, 如果捕食者灭绝, 则被捕食者会疯狂繁殖至无穷, 受地域及食物限制, 这不太现实. 考虑到这一点, Danca, M.等考虑了如下模型[4]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = \alpha X_t - \beta X_t Y_t - \mu X_t^2, \\ \dfrac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}t} = -\gamma Y_t + \delta X_t Y_t. \end{cases} \tag{1.2}$$

与模型(1.1)相比, (1.2)增加一项$-\mu X_t^2$, 代表被捕食者的自然死亡率. 受食物等因素限制, 被捕食者数量越多, 其死亡速度也越快, 最后达到一个平衡状态, 这是一个非常合理的假

本文2006年3月22日收到, 2008年3月13日收到修改稿.

定. 在本文中, 我们利用一个二维非线性生灭过程对模型(1.2)进行随机化, 以更符合现实, 并分析其均值过程和灭绝性质.

§2. 随机捕食–被捕食模型

设X_t, Y_t为两个取非负正数值的随机变量, 代表t时被捕食者和捕食者数量. 并记$\{P_{x,y}(t), x=0,1,2,\cdots; y=0,1,2,\cdots\}$为其概率分布, 即

$$P_{x,y}(t)=\mathsf{P}[X_t=x,Y_t=y], \qquad x=0,1,2,\cdots;\ y=0,1,2,\cdots. \tag{2.1}$$

与一维简单生灭过程一样, 我们假定当前被捕食者和捕食者数量为x, y, 在充分小的时间段$[t,t+\Delta t]$内, 以下五类事件有且仅有一种发生: 一, 被捕食者增加一, 捕食者数量不变, 概率为$\alpha x\Delta t+o(\Delta t)$; 二, 被捕食者减少一, 捕食者数量不变, 概率为$(\beta xy+\mu x^2)\Delta t+o(\Delta t)$, βxy反映被捕食者被捕食的几率, 显然其被捕食的几率与其自身数量和捕食者数量呈正相关, μx^2反映被捕食者自然死亡率, 受地域和食物限制, 其死亡几率以平方增加; 三, 被捕食者不变, 捕食者数量增加一, 概率为$\delta xy\Delta t+o(\Delta t)$, 显然被捕食者越多, 其食物越丰富, 捕食者繁殖越快, 故其概率与xy呈正比; 四, 被捕食者不变, 捕食者数量减少一, 概率为$\gamma y\Delta t+o(\Delta t)$; 五, 被捕食者, 捕食者数量维持不变, 概率为$1-(\alpha x+\mu x^2+\delta xy+\gamma xy)\Delta t+o(\Delta t)$.

其转移概率规律也可以表述如下:

$$\begin{aligned}&p(X_{t+\Delta t}=x_1;Y_{t+\Delta t}=y_1|X_t=x;Y_t=y)\\=&\begin{cases}\alpha x\Delta t+o(\Delta t), & \text{如果}\, x_1=x+1,y_1=y;\\(\beta xy+\mu x^2)\Delta t+o(\Delta t), & x_1=x-1,y_1=y;\\\delta xy\Delta t+o(\Delta t), & x_1=x,y_1=y+1;\\\gamma xy\Delta t+o(\Delta t), & x_1=x,y_1=y-1;\\1-(\alpha x+\mu x^2+\delta xy+\gamma xy)\Delta t+o(\Delta t), & x_1=x,y_1=y;\\o(\Delta t), & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned} \tag{2.2}$$

注: 若不做特别说明, 上式及以后考虑的均是被捕食者和捕食者未灭绝条件下的分布规律.

下面我们讨论$P_{x,y}(t)$的性质. 由以上假设知:

$$\begin{aligned}P_{x,y}(t+\Delta t)=&[1-(\alpha x+\beta xy+\mu x^2+\delta xy+\gamma y)\Delta t+o(\Delta t)]P_{x,y}(t)\\&+(\alpha(x-1)\Delta(t)+o(\Delta t))P_{x-1,y}(t)+(\delta x(y-1)\Delta t+o(\Delta t))P_{x,y-1}\\&+((\beta(x+1)y+\mu(x+1)^2)\Delta t+o(\Delta t))P_{x+1,y}\\&+(\gamma(y+1)\Delta t+o(\Delta t))P_{x,y+1}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

整理上式, 并令Δt逼近于0, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{x,y}(t)}{\partial t} &= \lim_{\Delta t\longrightarrow 0}\frac{P_{x,y}(t+\Delta t)-P_{x,y}(t)}{\Delta t}\\ &= -(\alpha x+\beta xy+\mu x^2+\delta xy+\gamma y)P_{x,y}(t)\\ &\quad +\alpha(x-1)P_{x-1,y}(t)+\delta x(y-1)P_{x,y-1}(t)\\ &\quad +(\beta(x+1)y+\mu(x+1)^2)P_{x+1,y}(t)\\ &\quad +\gamma(y+1)P_{x,y+1}(t).\end{aligned}\tag{2.4}$$

偏微分方程组(2.4)完全刻画了被捕食者和捕食者数量随时间变化的概率规律, 但我们无法得到此方程组的封闭解, 借助随机化技巧[5], 可以获得其数值解. 这里我们不讨论其数值解, 而是通过概率母函数讨论其性质.

定义概率母函数如下:

$$\Phi(z_1,z_2,t)=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}P_{x,y}(t)z_1^x z_2^y.\tag{2.5}$$

由方程(2.4)知道, $\Phi(z_1,z_2,t)$满足如下的偏微分方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(z_1,z_2,t)}{\partial t} &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\partial P_{x,y}(t)}{\partial t}z_1^x z_2^y\\ &= -\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}(\alpha x+\beta xy+\mu x^2+\delta xy+\gamma y)P_{x,y}(t)z_1^x z_2^y\\ &\quad +\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\alpha(x-1)P_{x-1,y}(t)z_1^x z_2^y\\ &\quad +\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\delta x(y-1)P_{x,y-1}(t)z_1^x z_2^y\\ &\quad +\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}(\beta(x+1)y+\mu(x+1)^2)P_{x+1,y}(t)z_1^x z_2^y\\ &\quad +\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\gamma(y+1)P_{x,y+1}(t)z_1^x z_2^y.\end{aligned}\tag{2.6}$$

因为

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\alpha(x-1)P_{x-1,y}(t)z_1^x z_2^y=\alpha z_1\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}xP_{x,y}(t)z_1^x z_2^y;$$
$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\delta x(y-1)P_{x,y-1}(t)z_1^x z_2^y=\delta z_2\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}xyP_{x,y}(t)z_1^x z_2^y;$$
$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\gamma(y+1)P_{x,y+1}(t)z_1^x z_2^y=\frac{\gamma}{z_2}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}yP_{x,y}(t)z_1^x z_2^y;$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}(\beta(x+1)y+\mu(x+1)^2)P_{x+1,y}(t)z_1^x z_2^y \\
=\;& \frac{\beta}{z_1}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}xyP_{x,y}(t)z_1^x z_2^y+\frac{\mu}{z_1}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}x^2P_{x,y}(t)z_1^x z_2^y
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1} &= \frac{1}{z_1}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}xP_{x,y}(t)z_1^x z_2^y;\\
\frac{\partial\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_2} &= \frac{1}{z_2}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}yP_{x,y}(t)z_1^x z_2^y;\\
\frac{\partial^2\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1\partial z_2} &= \frac{1}{z_1z_2}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}xyP_{x,y}(t)z_1^x z_2^y;\\
\frac{\partial^2\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1^2} &= \frac{1}{z_1^2}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}x(x-1)P_{x,y}(t)z_1^x z_2^y,
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial t} =\;& (\mu-\alpha z_1)(1-z_1)\frac{\partial\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1}+\gamma(1-z_2)\frac{\partial\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_2}\\
&+[\beta z_2(1-z_1)-\delta z_1z_2(1-z_2)]\frac{\partial^2\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1\partial z_2}\\
&+\mu z_1(1-z_1)\frac{\partial^2\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1^2}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

对偏微分方程(2.7)关于z_1微分, 我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial t} =\;& (2\alpha z_1-\alpha-\mu)\frac{\partial\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1}\\
&+(\mu-\alpha z_1)(1-z_1)\frac{\partial^2\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1^2}\\
&+\gamma(1-z_2)\frac{\partial^2\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1\partial z_2}+\mu z_1(1-z_2)\frac{\partial^3\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1^3}\\
&+\mu(1-2z_1)\frac{\partial^2\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1^2}\\
&+(\delta z_2-\beta-\delta)z_2\frac{\partial^2\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1\partial z_2}\\
&\cdot[\beta z_2(1-z_1)-\delta z_1z_2(1-z_2)]\frac{\partial^3\Phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1^2\partial z_2}.
\end{aligned}
$$

令$z_1=z_2=1$, 得

$$
\frac{\partial}{\partial t}\mathsf{E}X_t=\alpha\mathsf{E}X_t-\beta\mathsf{E}X_tY_t-\mu\mathsf{E}X_t^2. \tag{2.8}
$$

其中$\mathsf{E}(\cdot)$表示取期望.

类似的讨论可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathsf{E}(Y_t)=-\gamma\mathsf{E}(Y_t)+\delta\mathsf{E}X_tY_t. \tag{2.9}$$

我们称$\{\mathsf{E}(X_t),\mathsf{E}(Y_t)\}$为过程$\{X_t,Y_t\}$的均值过程. 由以上讨论, 我们有下述定理

定理 2.1　$\{X_t,Y_t,t>0\}$为如上定义的随机捕食–被捕食模型, 则其均值过程满足如下偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\mathsf{E}X_t=\alpha\mathsf{E}X_t-\beta\mathsf{E}X_tY_t-\mu\mathsf{E}X_t^2;\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\mathsf{E}(Y_t)=-\gamma\mathsf{E}(Y_t)+\delta\mathsf{E}X_tY_t.\end{cases} \tag{2.10}$$

比较(2.10)和(1.2), 显然我们的生灭过程模型是(1.2)的一个随机版本.

§3.　灭绝概率

下面我们讨论随机捕食–被捕食模型的灭绝问题.

先假设没有捕食者, 则模型退化为一维生灭过程. 记X_t为时刻t的被捕食者数量, 其转移规律可以描述如下:

$$p(X_{t+\Delta t}=y|X_t=x)=\begin{cases}\alpha x\Delta t+o(\Delta t), & \text{如果 } y=x+1;\\ \mu x^2\Delta t+o(\Delta t), & y=x-1;\\ 1-(\alpha x+\mu x^2)\Delta t+o(\Delta t), & y=x;\\ o(\Delta t), & \text{否则}.\end{cases} \tag{3.1}$$

根据生灭过程的一般理论, 我们有如下定理

定理 3.1　设$\{X_t,t>0\}$是如上定义的一维生灭过程, 则其以概率1灭绝.

证明:　令$\lambda_i=\alpha i$, $\mu_i=\mu i^2$, $\rho_0=1$, $\rho_k=\prod\limits_{i=1}^k\mu_i\Big/\prod\limits_{i=1}^k\lambda_i=k!(\mu/\alpha)^k$. 容易证明$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho_k=\infty$. 根据具有吸收点的生灭过程的性质([6]), 我们知道$\{X_t,t>0\}$以概率1灭绝.　□

由定理3.1知道, 被捕食者以概率1灭绝, 如果被捕食者灭绝了, 显然捕食者也以概率1灭绝, 故我们有下面定理

定理 3.2　$\{X_t,Y_t,t>0\}$为上节定义的随机捕食–被捕食模型, 则其以概率1灭绝.

参 考 文 献

[1] Lotka, A.J., *Elements of Physical Biology*, William and Wilkins, Baltimore, 1925.

[2] Volterra, V., Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, *Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei*, **2**(1926), 31–113.

[3] Murray, J.D, *Matematical Biology* (3rd), Springer, 2002.

[4] Danca, M., Codreanu, S. and Bakó, B., Detailed analysis of a nonlinear prey-predator model, *Journal of Biological Physics*, **23**(1997), 11–20.

[5] Gross, D. and Miller, D., The randomization technique as a modeling tool and solution procedure for transient Markov processes, *Operations Research*, **32**(1984), 343–381.

[6] 胡迪鹤, 随机过程论, 基础, 理论, 应用, 武汉大学出版社, 2000.

Stochastic Prey-Predator Model

Zhang Shulin

(*Sun Yat-sen University, GF Securities Co., LTD, Guangzhou, 510075*)

Wei Zhenghong

(*Shenzhen University, Shenzhen, 518000*)

In this paper, a 2-dimension, nonlinear birth-death prey-predator model is established. By generating function, we derive the partial differential equations that the mean process of our model satisfied and prove that the preys and predators will extinct with probability 1.

Keywords: Prey-predator model, birth-death process, generating function, extinction probability.

AMS Subject Classification: 60J85.